

Вероятностные свойства квазиоптимальных траекторий агента, движущегося по решетке

А.В. Кузнецов¹

¹Воронежский государственный университет, Университетская пл., 1, Воронеж, Россия, 394018

Аннотация. В статье рассматриваются вероятностные свойства траектории движущегося агента. Агент находит маршрут, близкий к оптимальному, на решетке, состоящей из клеток с разной непроходимостью. С помощью имитационного моделирования изучается распределение времени выхода агента в конечную точку для случайных ландшафтов разного вида. Затем полученная эмпирическая функция распределения вероятности сравнивается с функцией распределения вероятности, полученной исходя из теоретических соображений. Наконец, анализируется распределение вероятности пребывания агента в данной ячейке в данный момент времени для случайных ландшафтов разных типов.

1. Введение

Ранее автором был разработан клеточный автомат, моделирующий движение иерархически организованных групп и строя агентов по пересеченной местности [1, 2, 3]. Также автор выявил связь дискретной модели, лежащей в основе клеточного автомата, и непрерывной задачи оптимизации [4].

Движение агента по случайному ландшафту можно рассматривать как реализацию броуновского моста. В работе [5] рассматривалась модель движения броуновского моста (ВВММ), которая обеспечивает биологически обоснованное приближение пути движения животного на основе дискретных данных местоположения и является мощным методом количественной оценки распределения использования (utilization distribution, т.е. распределения, сконструированного из данных о местоположении животного в пространстве в различные моменты времени). В настоящем докладе исследуются статистические свойства квазиоптимальных траекторий агента, получаемых с помощью предложенного клеточного автомата. Эти траектории также интерпретируются как реализации броуновского моста и используются предположения о распределении скорости агента, аналогичные сделанным в вышеупомянутой статье.

2. Непрерывная постановка задачи и ее дискретизация

Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ и движение агента, ищущего кратчайший по времени маршрут \mathbf{r} из точки $A \in \Omega$ в точку $B \in \Omega$ описывается уравнениями

$$\|\dot{\mathbf{r}}(t)\| = u^c(t, \mathbf{r}(t)), \quad (1)$$

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{A}, \quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{B}, \quad t \in [0, T], \quad (2)$$

$$T \rightarrow \min, \quad 0 \leq T \leq T_{\max} \quad (3)$$

где $\mathbb{R}_{\geq 0}$ – множество вещественных неотрицательных чисел, $u^c : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ – функция проходимости области Ω , определяющая максимально возможную скорость $u^c(t, \rho)$ в точке $\rho \in \Omega$ в момент времени t , $\|\cdot\|$ – евклидова норма,

$$T(\mathbf{r}) = \min\{t \in \mathbb{R}_{\geq 0} | \mathbf{r}(t) = B\}.$$

Из (1)–(3) можно получить выражение для $T : C([0, T_{\max}]; \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$

$$T(\mathbf{r}) = \int_0^T \frac{\|\dot{\mathbf{r}}(t)\| dt}{u^c(t, \mathbf{r}(t))}, \quad (4)$$

где $\dot{\mathbf{r}}$ – производная \mathbf{r} .

Очевидно, из выражения (4) выразить явно T в общем случае невозможно (исключение составляет, например, случай, когда \mathbf{r} является графиком некоторой функции $y \in C^2[a, b]$, т.е.

$$\mathbf{r} = \{(x, y(x)) | x \in [a, b]\},$$

а u^c не зависит от времени). Однако, можно получить различные свойства функционала T , доказать разрешимость задачи минимизации (1)–(3) в классе $\mathcal{Y} \subset W_p^1([0, T_{\max}]; \mathbb{R}^2)$, построить алгоритм приближенного решения и дать оценки для него [4].

Обозначим $u_{\max}^c = \max_{(t, \rho) \in [0, T_{\max}] \times \Omega} u^c(t, \rho)$. Введем функцию непроходимости

$$u(t, \rho) = \frac{u_{\max}^c}{u^c(t, \rho)}.$$

Пусть $\Omega_h \supseteq \Omega$ – замощение Ω , $\Omega_h = \{\omega_{ij} | (i, j) \in \mathbb{Z}^2\}$, $\mathbf{r}_h \supseteq \mathbf{r}$ – клеточный маршрут, т.е. минимальное покрытие маршрута \mathbf{r} клетками из Ω_h . Множество всех клеточных маршрутов, приближающих маршруты из \mathcal{Y} , обозначим как \mathcal{Y}_h .

Обозначим $\mathbf{r}_h[k]$ k -ю по порядку прохождения клетку \mathbf{r}_h . Функционал T имеет дискретный аналог

$$T_h(\mathbf{r}_h) = \sum_{(i, j) \in \mathbf{r}_h} u_{ij}(t) \|\mathbf{d}_{ij}\|, \quad (5)$$

где $u_{ij}(t) = \max_{\rho \in \omega_{ij}} u(t, \rho)$ – непроходимость клетки (i, j) в момент времени t ,

$$\mathbf{d}_{ij} = \mathbf{d}_k = \mathbf{r}_h[k+1] - \mathbf{r}_h[k], \quad \mathbf{r}_h[k] = (i, j).$$

При измельчении шага сетки h последовательность минимизирующих функционал (5) маршрутов $\{\mathbf{r}_h\}$ будет в некотором смысле сходиться к маршруту \mathbf{r} , минимизирующему функционал (4). Далее мы будем использовать обозначение

$$u_{ij}(t) = u(t, (i, j)) = \max_{\rho \in \omega_{ij}} u(t, \rho).$$

Обозначим $\mathbf{r}_h(t)$ ту клетку маршрута, в которой агент находится в момент времени t . Обратим внимание, что при $\chi \leq \kappa d(t) u(t, \mathbf{r}_h(t))$ получается дискретный аналог (1)

$$\|\mathbf{r}_h(t + \chi) - \mathbf{r}_h(t)\| = \|\mathbf{d}(t)\| \left\lfloor \frac{\chi}{\kappa \|d(t)\| u(t, \mathbf{r}_h(t))} \right\rfloor, \quad (6)$$

где $\mathbf{d}(t) \in \mathcal{D} = \{(i, j) | i, j = \overline{-1, 1}\}$ – вектор направления движения агента, κ – количество секунд в одном кванте дискретного времени, $\lfloor x \rfloor$ – целая часть x .

Автором был сконструирован клеточный автомат, в котором агенты, движущиеся в соответствии с (6) искали кратчайший путь к точки назначения, минимизируя функционал (5) в некоторой своей окрестности, а затем склеивали из получившихся фрагментов квазиоптимальный маршрут. Как альтернативный вариант, вероятность выбора агентом локально оптимального маршрута максимальна, и чем менее маршрут оптимальный, тем меньше вероятность его выбора.

При этом, в каждой окрестности агента, находящегося в клетке ω_{ij} , $U_o(i, j) = \{\omega_{ij} \mid \|(i, j)\| \leq o, \omega_{ij} \in \Omega_h\}$, $B \notin U_o(i, j)$, минимизировалось время до точки B_i пересечения границы $U_o(i, j)$ с отрезком, соединяющим местоположение агента и B .

3. Выявление зависимости статистических свойств квазиоптимального маршрута от характеристик проходимой местности

Назовем ландшафтом в момент времени t множество непроходимостей клеток замощения $\mathcal{L}(\Omega_h, l) = \{u_{ij} \mid u_{ij} = u(t, \omega_{ij}), \omega_{ij} \in \Omega_h\}$, такого что u принимает на $\{\omega_{ij} \mid i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}\}$ не более l значений, причем к классу i принадлежит N_i клеток, то есть $\sum_{i=1}^l N_i = M$, $M = |\mathcal{L}(\Omega_h, l)|$.

Если ландшафт состоит из клеток, непроходимости которых распределены случайно, то каждый найденный агентом квазиоптимальный маршрут на определенном случайном ландшафте можно рассматривать как реализацию случайного блуждания на решетке, точнее, как броуновский мост. В этом случае

$$\tau = \min_{\mathbf{r} \in \mathcal{Y}} \tilde{T}(\mathbf{r}), \quad \tau_h = \min_{\mathbf{r}_h \in \mathcal{Y}_h} \tilde{T}_h(\mathbf{r}_h), \quad \tau_{\min} \leq \tau_h \leq \tau_{\max}$$

будут соответствовать времени выхода агента в конечную точку в непрерывном и дискретном случаях соответственно. Далее мы попытаемся определить закон распределения для случайных величин τ , τ_h и

$$\varrho = \arg \min_{\mathbf{r} \in \mathcal{Y}} \tilde{T}(\mathbf{r}), \quad \varrho_h = \arg \min_{\mathbf{r}_h \in \mathcal{Y}_h} \tilde{T}_h(\mathbf{r}_h)$$

экспериментально и из теоретических соображений и провести сравнение результатов. Здесь знак « \min » означает «является квазимиимумом». В качестве случайных ландшафтов мы будем брать ранее введенные автором «натуральные» и «равномерные» ландшафты [6].

В случае «равномерного» ландшафта $u(t, \rho) \in [1, u_{\max}]$,

$$u_{\max} = \max_{(t, \rho) \in [0, T] \times \Omega} u(t, \rho),$$

близко к равномерно распределенной случайной величине для всех $(t, \rho) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \Omega$. Таким образом,

$$u^c(t, \rho) = \frac{u_{\max}^c}{u(t, \rho)}$$

имеет обратное равномерное распределение с функцией плотности

$$invu(x) = \begin{cases} \frac{u_{\max}^c}{u_{\max}^c - 1} x^{-2} & , x \in [\frac{u_{\max}^c}{u_{\max}^c}, u_{\max}^c] \\ 0 & , x \notin [\frac{u_{\max}^c}{u_{\max}^c}, u_{\max}^c] \end{cases}$$

Далее, случайная величина $\|\dot{\mathbf{r}}(t)\|$ имеет для $t \in [0, T_{\max}]$ распределение Райса с функцией плотности (при $x \geq 0$)

$$rice(\nu, \sigma; x) = \frac{x}{\sigma^2(t)} \exp\left(\frac{-(x^2 + \nu^2(t))}{2\sigma^2(t)}\right) I_0\left(\frac{x\nu(t)}{\sigma^2(t)}\right),$$

если исходить из того, что скорость агента имеет 2-мерное нормальное распределение, что является обычным предположением [5]. Обозначим функцию под интегралом (4) как

$$\zeta(t) = \frac{\|\dot{\mathbf{r}}(t)\|}{u^c(t, \mathbf{r}(t))} = \frac{1}{u_{\max}^c} \|\dot{\mathbf{r}}(t)\| u(t, \mathbf{r}(t)).$$

Исходя из вышеуказанного, функция распределения подынтегральной функции $\zeta(t)$ имеет вид

$$\mathbb{P}\{\zeta(t) < z\} = \iint_{D_z} \text{rice}(\nu(t), \sigma(t); x) \Pi(y) dx dy, \tag{7}$$

где $D_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | xy < z\}$,

$$\Pi(y) = \begin{cases} 1, & y \in [\frac{1}{u_{\max}^c}, \frac{u_{\max}}{u_{\max}^c}], \\ 0, & y \notin [\frac{1}{u_{\max}^c}, \frac{u_{\max}}{u_{\max}^c}]. \end{cases}$$

4. Вычислительный эксперимент для времени выхода в конечную точку

Конфигурационная энтропия ландшафта $\mathcal{L}(\Omega_h, l)$ определяется как

$$S(\mathcal{L}(\Omega_h, l)) = - \sum_{i=1}^l \frac{N_i}{M} \ln \frac{N_i}{M}.$$

и характеризует неоднородность состава ландшафта в целом.

Было произведено по 10000 экспериментов в случайном ландшафте $\mathcal{L}(100 \times 100, 9)$ ($S = 2.125$) для оценки параметров распределения и дополнительно по 1000 экспериментов для проверки гипотезы о распределении. В каждом эксперименте агент перемещался из клетки (1, 1) в клетку (98, 98). Получились результаты, показанные в виде гистограмм на рисунке 1. На рисунке 1а показаны гистограммы распределения времени выхода в конечную точку для оптимальных (слева) и квазиоптимальных (справа) маршрутов для равномерных случайных ландшафтов, на рисунке 1б – то же самое для «естественных» ландшафтов. Далее координаты (x, y) будет совпадать с номерами клеток (i, j) , если $x, y \in \mathbb{Z}$.

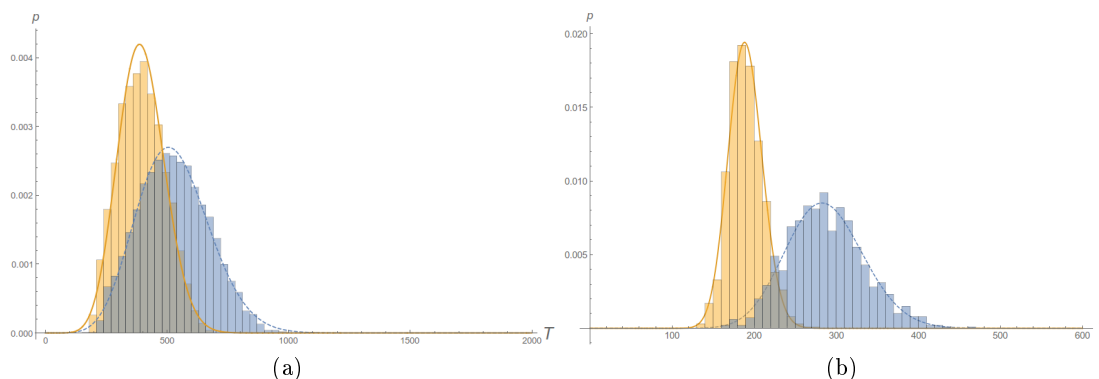


Рисунок 1. Гистограммы распределения времени прибытия в конечную точку маршрута τ для равномерного (а) и «естественного» (б) ландшафтов.

Для случайных равномерных ландшафтов для 10000 экспериментов получилось, что

$$\tau_{\min} = 204, \tau_{\max} = 1999, \tau = 527.923.$$

Было выяснено, что данным гистограммам наиболее соответствует (с p -значением около 0,7) распределение Нортон-Райса с функцией плотности

$$nrice(m, \nu, \sigma; x) = \begin{cases} \frac{\nu m \left(\frac{x}{\nu}\right)^m e^{-\frac{m(\nu^2+x^2)}{2\sigma^2}} I_{m-1}\left(\frac{mx\nu}{\sigma^2}\right)}{\sigma^2}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

где I_k – модифицированная функция Бесселя первого рода. Поиск производился среди распределений самых разных типов, и гипотеза о распределении Нортон-Райса возникла именно в силу вида теоретической функции плотности (7) и того факта, что сумма случайных величин, имеющих распределение Райса, . В действительности, из (7) следует, что распределение должно выражаться в виде ряда из обобщенных гипергеометрических функций с определенными параметрами.

Особенно хорошо это соответствие проявляется для «равномерных» ландшафтов. Для проверки гипотезы о распределении применялся критерий Крамера – фон Мизеса ω^2 со статистикой вида

$$n\omega_n^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n \left(F(x_i, \theta) - \frac{2i-1}{2n} \right)^2,$$

где $F(x, \theta)$ – теоретическая функция распределения с вектором параметров θ .

В соответствии с критерием Крамера – фон Мизеса было получено значение статистики 0.0802693, что для 1000 экспериментов позволяет сделать вывод, что гипотеза о распределении не отвергается с 15% уровнем значимости. Для равномерных ландшафтов были получены следующие значения параметров

$$m = 3.33579, \quad \nu = 11.4566, \quad \sigma = 387.896,$$

для «естественных» –

$$m = 9.47719, \quad \nu = 13.3365, \quad \sigma = 205.047.$$

5. Вычислительный эксперимент для поиска распределения координат местоположения агента

Для распределения координат агента $\mathbf{q}_h(t) = (x_h(t), y_h(t))$ были получены гистограммы, приведенные на рисунке 2.

Подбор распределения показал, что получившиеся гистограммы (одинаковые, как для x , так и для y) хорошо приближает Extreme Value Distribution (type I max extreme value distribution, т.е. асимптотическим распределением максимума из набора одинаково распределенных случайных величин) с функцией плотности распределения

$$evd(\alpha(t), \beta(t); x) = \frac{e^{-\frac{\alpha(t)-x}{\beta(t)}} - e^{-\frac{\alpha(t)}{\beta(t)}}}{\beta(t)}.$$

Сами же функции $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ при $t > 20$ приближаются линейными

$$\alpha(t) + \gamma\beta(t) = \mathbb{E}x(t) = 0.979616 + 0.199427t, r^2 = 0.999997,$$

где γ – постоянная Эйлера,

$$\alpha(t) = 0.352148 + 0.170925t, r^2 = 0.999965.$$

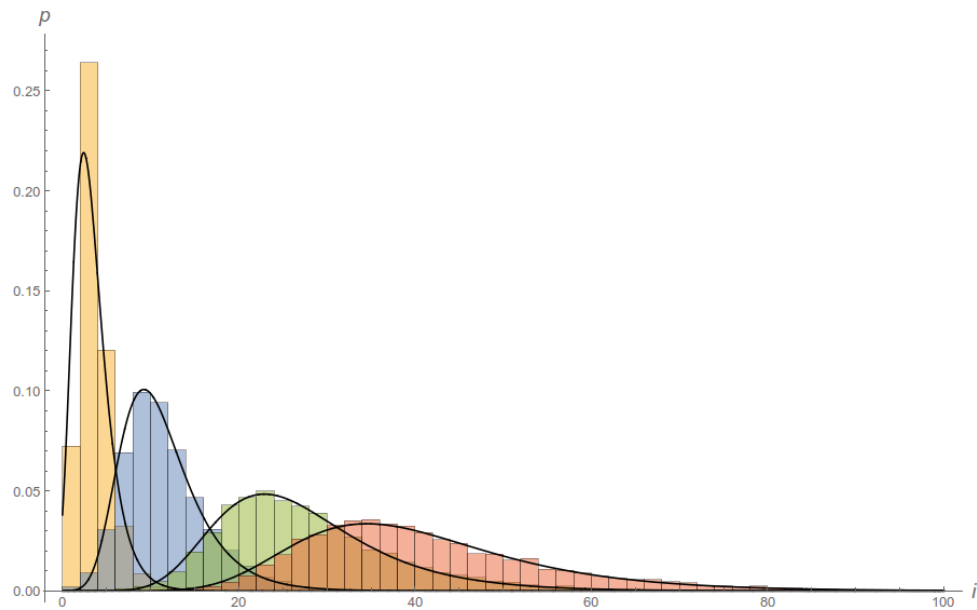


Рисунок 2. Распределение координаты i агента для $t = 12, 52, 132, 200$.

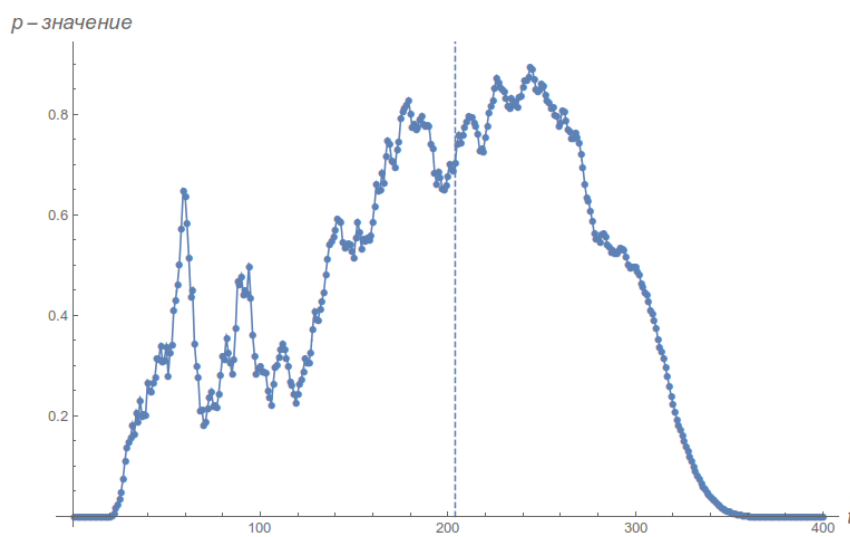


Рисунок 3. Зависимость p -значения для различных времен.

При этом качество аппроксимации падает исключительно вблизи от границы области, где происходит остановка или начало движения агента. График зависимости p -значения гипотезы от времени приведен на рисунке 3, пунктиром обозначено τ_{\min} .

Вблизи конечной точки маршрута гистограммы имеют вид, указанный на рисунке 4.

Можно предположить, что искомая функция плотности распределения имеет вид

$$rd(t, x) = \Theta(98 - x)evd(\alpha(t), \beta(t); x) + \varphi(t, x),$$

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

$\varphi(t, x) = 0, x < 94, t < \tau_{\min}$. Поведение φ в соответствии с данными вычислительного

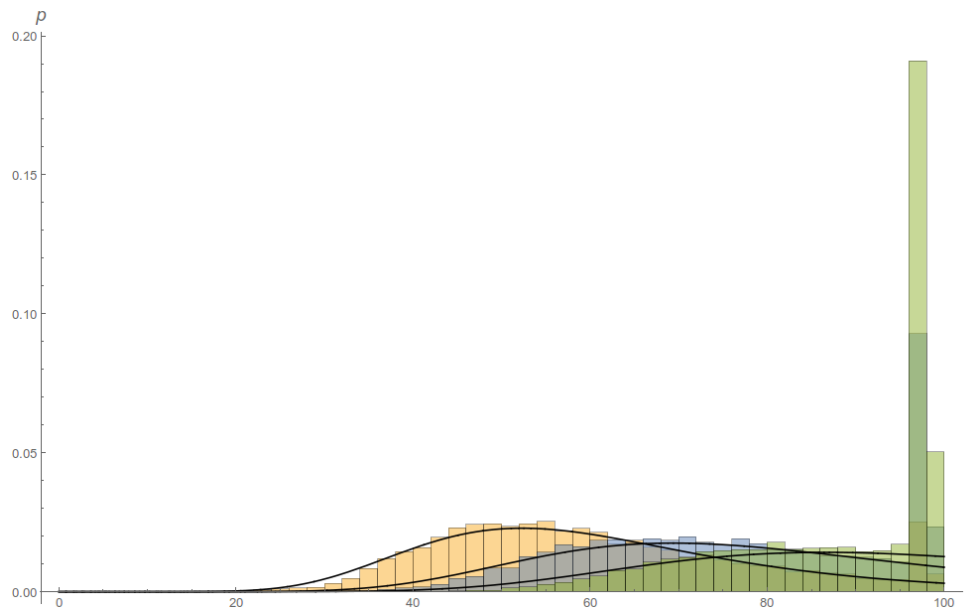


Рисунок 4. Вид гистограмм вблизи конца маршрута, $t = 304, 404, 504$.

эксперимента показано на рисунке 5, пунктирные линии слева направо соответствуют τ_{\min} и $\bar{\tau}$.

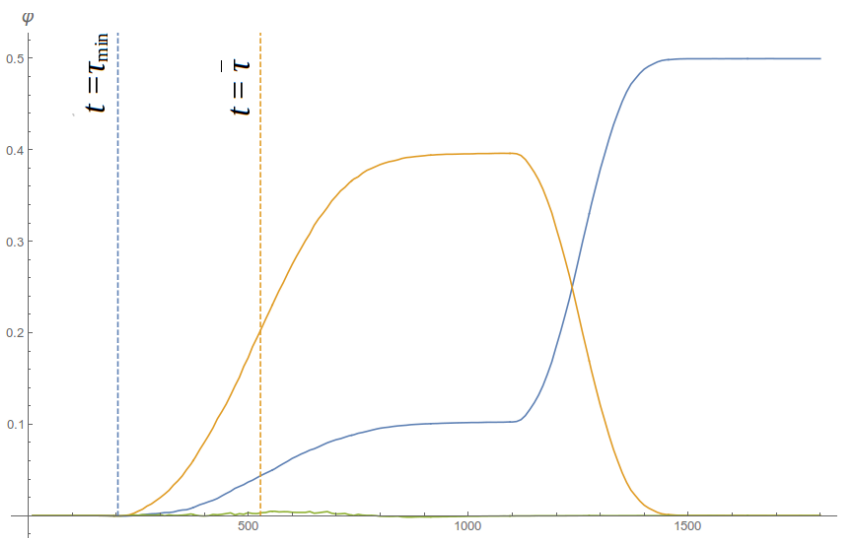


Рисунок 5. Поведение функции $\varphi(t, x)$, $x = 94, 96, 98$.

Очевидно, что функция φ должна отвечать следующим условиям:

$$1 = \int_0^\infty rd(t, x)dx = \int_0^{98} evd(\alpha(t), \beta(t); x)dx + \int_0^{98} \varphi(t, x)dx.$$

$$\varphi(x, 0) = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(x, t) = \begin{cases} 1/98, & x = 98, \\ 0, & x \neq 98. \end{cases}$$

Из раздела 1 следует, что агентом в клетке (i_0, j_0) выбирается упорядоченный набор $\{u_{ij}^k | (i, j) = \mathbf{r}_h[k]\}$, такой что

$$T_h(\mathbf{r}_h) = \min_{\mathbf{r}_h \in \mathcal{Y}_h \cap U_o(i_0, j_0)} \sum_{(i, j) \in \mathbf{r}_h} u_{ij}^k \|\mathbf{d}_{ij}\|.$$

Можно предположить, что распределение $\boldsymbol{\rho}(t)$ близко к Extreme Value Distribution потому, что агент всегда выбирает для движения набор клеток $\mathbf{r}_h = \{\mathbf{r}_h[1], \dots, \mathbf{r}_h[m + 1]\}$ (или кривую \mathbf{r}) чтоб минимизировать $T(\mathbf{r})$.

Обозначим для маршрута $\mathbf{r}_h = \{\mathbf{r}_h[1], \dots, \mathbf{r}_h[m + 1]\}$, что $\chi_m = m\kappa$, тогда в силу (6)

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}_h(t + \chi_m) - \mathbf{r}_h(t)\| &\leq \sum_{k=1}^m \|\mathbf{r}_h(t + \chi_k) - \mathbf{r}_h(t + \chi_{k-1})\| = \\ &= \sum_{k=1}^m \|\mathbf{d}_k\| \left[\frac{\kappa}{\kappa \|\mathbf{d}(t)\| u(t, \mathbf{r}_h(t))} \right] = \xi(t + \chi_m) = \sum_{(i, j) \in \mathbf{r}_h} \|\mathbf{d}_k\| \left[\frac{1}{\|\mathbf{d}_k\| u_{ij}^k} \right] \rightarrow \max. \end{aligned} \quad (8)$$

Таким образом, на каждый такт агент выбирает такое направление движения, что

$$\xi(t + \chi_m) = \max_{\mathbf{r}_h \in \mathcal{Y}_h \cap U_o(i_0, j_0)} \sum_{(i, j) \in \mathbf{r}_h} \|\mathbf{d}_k\| \left[\frac{1}{\|\mathbf{d}_k\| u_{ij}^k} \right],$$

и, следовательно, имеет распределение близкое к Extreme Value distribution (тип I, максимум). Из экспериментальных данных можно предположить, что оценка (8) является довольно точной и

$$\|\mathbf{r}_h(t + \chi_m) - \mathbf{A}\| = \|\mathbf{r}_h(t + \chi_m) - \mathbf{r}_h(0)\| \approx \xi(t + \chi_m).$$

6. Заключение

В докладе были получены эмпирические функции плотности распределения для времени выхода на границу и распределения использования для модели движения агента в виде броуновского моста, причем случайное блуждания приближалось с помощью дискретного случайного процесса, моделируемого с помощью клеточного автомата. Из вида аналитической модели движения сделаны предположения относительно теоретических функций плотности распределения и получены оценки p -значений для данных гипотез.

В дальнейших работах планируется получить вид функций распределения непосредственно из теоретической модели движения.

7. Литература

- [1] Кузнецов, А.В. Модель совместного движения агентов с трехуровневой иерархией на основе клеточного автомата // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2017. – Т. 57, № 2. – С. 339-349. – URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=28918677>.
- [2] Кузнецов, А.В. Упрощенная модель боевых действий на основе клеточного автомата // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2017. – Т. 56, № 3. – С. 59-71. – URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=29369822>.
- [3] Kuznetsov, A. Cellular automata-based model of group motion of agents with memory and related continuous model // Mathematical Modeling. Information Technology and Nanotechnology. – CEUR Workshp Pioceedings. – 2017. – Vol. 1904. - P. 223-231. – URL: <http://ceur-ws.org/Vol-1904/paper38.pdf>.
- [4] Кузнецов, А.В. О движении агентов по местности с препятствиям // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2018. – Т. 58, № 1. – С. 145-160.
- [5] Deriving movement properties and the effect of the environment from the brownian bridge movement model in monkeys and brids / Kevin Buchin, Stef Sijben, E. Emiel van Loon et al. // Movement Ecology. – 2015. – Vol. 3(1). – P. 18. – URL: <https://doi.org/10.1186/s40462-015-0043-8>.
- [6] Kuznetsov, A. Generation of a random landscape by given configuration entropy and total edge // Computational Technologies. – 2017. – Vol. 22(4). – P. 4-10.

Probabilistic properties of quasi-optimal trajectories of an agent moving over a lattice

A.V. Kuznetsov¹

¹Voronezh State University, Universitetskaya pl. 1, Voronezh, Russia, 394018

Abstract. The paper considers probabilistic properties of the trajectory of a moving agent. The agent finds a route close to the optimal on a lattice consisting of cells with different impassability. I study the distribution of the agent's exit time to the endpoint for random landscapes of different types with the help of simulation. Then I compare the obtained empirical probability distribution function with the probability distribution function obtained from theoretical considerations. Finally, the probability distribution of the agent's residence in a given cell at a given moment of time for random landscapes of different types is analyzed.

Keywords: random walk, utilization distribution, cellular automaton, pathfinding, special functions.