

## Вихревая оптика

А.Х. Султанов<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Уфимский государственный авиационный технический университет, К. Маркса 12,  
Уфа, Россия, 450077

**Аннотация.** В обзоре, с точки зрения автора, приведены основные работы, сыгравшие исторически важную роль в становлении и развитии одного из самых загадочных разделов современной оптики – вихревой (или сингулярной) оптики. Сингулярная оптика изучает, как ведет себя свет в тех местах, где света нет – в нулях интенсивности. Оптический вихрь, обладающий топологическим зарядом и орбитальным угловым моментом, распространяется в пространстве таким образом, что поток энергии в нем движется по спирали. У таких пучков есть точки неопределенности (сингулярности) фазы, в которых интенсивность равна нулю (нули интенсивности). Расстояние между двумя нулями интенсивности может быть сколь угодно малым и не ограничивается дифракционным пределом. Топологический заряд оптических вихрей наиболее устойчивая характеристика, которая сохраняется при амплитудных и простых фазовых искажениях пучка. Исследования научной школы академика РАН В.А.Сойфера внесли существенный вклад в формирование и развитие сингулярной оптики.

### 1. Введение. Цифровая голограмма и Бессель-оптика, 1983 год

Сингулярная оптика – современный, устоявшийся, имеющий более чем 40-летнюю историю, раздел оптики, который изучает дислокации волнового фронта, фазовые и поляризационные сингулярности, а также лазерные пучки, несущие такие сингулярности: вихревые или спиральные лазерные пучки с орбитальным угловым моментом. По сингулярной оптике имеются отдельные главы [1-4], обзоры [5, 6] и монографии [7-11], в которых отражены некоторые аспекты сингулярной оптики, близкие авторам этих монографий. Конечно, полного представления о сингулярной оптике, даже сумма этих обзоров и монографий дать не может. И в этом обзоре основное внимание будет уделено оптическим компонентам, которые формируют лазерные пучки с сингулярностями.

Первое теоретическое исследование по дислокациям волнового фронта было сделано Дж. Наем и М. Берри в 1974 году [12], а в 1978 году М. Берри исследовал статистику дислокаций в некогерентном случайном световом поле [13]. Экспериментальная работа по изучению плотности дислокаций волнового фронта в спекл-поле была проделана Н.Б. Барановой и Б.Я. Зельдовичем с соавторами в 1981 году [14].

Параллельно, начиная с 1967 года, А. Ломанном с соавторами проводились исследования по синтезу голограмм на компьютере [15, 16]. Эти работы послужили толчком к большому циклу экспериментальных работ в 80х годах М.А.Голуба, В.А.Сойфера и соавторов [17-20]. В этих работах с помощью компьютера и фотопостроительной машины синтезировались цифровые голограммы-фильтры, согласованные с пространственными модами (Эрмита-Гаусса или Лагерра-Гаусса), которые использовались для формирования лазерных пучков с заданным модовым составом и для селекции мод, то есть для пространственного разделения мод. Такие оптические элементы авторы называли моданами [21-23]. Заметим, что в фундаментальной

монографии по сингулярной оптике Гбура [7], которая вышла в 2017 году, работы М.А.Голуба, В.А.Сойфера и соавторов упоминаются 6 раз [17-20, 24, 25].

В 1984 году вышла работа А.Е.Березного, А.М. Прохорова, И.Н. Сисакяна и В.А. Сойфера [26], в которой был предложен вихревой фазовый фильтр для оптического выполнения преобразования Ханкеля. Эта работа положила начало нового подраздела сингулярной оптики – Бессель-оптики. Экспериментально вихревые пучки Бесселя высших порядков были сформированы Дюрниным с соавторами в 1987 году с помощью узкой кольцевой диафрагмы [27] и Я. Турунненом с соавторами в 1989 году с помощью амплитудной голограммы, синтезированной на компьютере [28]. В 1992 году бездифракционный пучок Бесселя первого порядка был сформирован с помощью фазового дифракционного вихревого аксикона в работе В.А. Сойфера с соавторами [29].

Следует отметить, что в 80-х годах в пионерских работах В.А. Сойфера с соавторами были созданы не только первые дифракционные элементы сингулярной оптики (моданы [23, 30] и Бессель-оптика [26]), но заложены основы нового раздела оптики – компьютерная оптика [22, 23, 31]. Методами компьютерной оптики были созданы новые фазовые дифракционные элементы – формователи заданных волновых фронтов [32, 33], фокусатор в продольный [34] и поперечный отрезок [35] и в произвольную фокальную линию [36], а также фокусаторы в кольцо [37], квадрат [38], буквы [39].

## **2. Дифракционная компьютерная оптика и формирование оптических вихрей, 1992 год**

Кроме пучков Бесселя другим распространенным примером вихревых пучков с орбитальным угловым моментом являются моды Лагерра-Гаусса. В 1991 году Е.Г. Абрамочкин и В.Г. Волостников с помощью астигматического конвертора, состоящего из двух цилиндрических линз, преобразовали моды Эрмита-Гаусса, которые возникали на выходе газового лазера в моды Лагерра-Гаусса и создали соответствующую теорию [40].

В 1990 году М.С.Соскиным с соавторами [41] был сформирован лазерный пучок с винтовой дислокацией волнового фронта с помощью наклонного падения света на торец оптического волокна. Гауссов пучок с внедренным оптическим вихрем был сформирован почти одновременно в 1992 году разными авторами и разными способами: с помощью амплитудной дифракционной решетки с «вилкой» М.С. Соскиным с соавторами [42], амплитудной спиральной зонной пластинки Н. Р. Хекенбергом с соавторами [43] и спиральной фазовой пластинки В.А. Сойфером с соавторами [44]. Последняя из этих работ была более продвинута в технологическом отношении, так как впервые был создан фазовый дифракционный оптический элемент (спиральная фазовая пластинка) [44], обладающий большей эффективностью, чем амплитудные линейная [42] и кольцевая [43] дифракционные решетки. В этом же 1992 году вышла работа Л. Аллена с соавторами [45], в которой на примере моды Лагерра-Гаусса было показано, что свет обладает орбитальным угловым моментом [1, 7].

Работы 1992-1993 годов В.А. Сойфера с соавторами по формированию кольцевого распределения интенсивности с фазовой сингулярностью с помощью вихревых аксиконов [29, 46] на много лет опередили работы по формированию совершенных оптических вихрей, у которых радиус светового кольца не зависит от величины топологического заряда [47]. В [48] разработан итеративный алгоритм для расчета фазового оптического элемента без несущей пространственной частоты, предназначенного для формирования суперпозиции с заданным составом бездифракционных вихревых мод Бесселя. А в [49] предложен итеративный алгоритм для формирования суперпозиции мод Бесселя не только с разными топологическими зарядами, но и с разным масштабом. Такая суперпозиция приводит к формированию в фокусе сферической линзы набора концентрических колец – совершенных вихрей разных масштабов.

В работе [50] в 1993 году были получены общие условия для вращения светового поля при распространении в пространстве. А через несколько лет после этой работы независимо, Дж. Шамиром и соавторами в 1996 году с помощью голограммы [51], В.Г. Волостниковым и соавторами в 1997 году внутри резонатора лазера [52], и В.А. Сойфером с соавторами в 1997 году с помощью дифракционных оптических элементов [53], были синтезированы вращающиеся лазерные пучки. В работах В.А. Сойфера с соавторами были синтезированы не

только вращающиеся пучки, состоящие из нескольких мод Лагерра-Гаусса, но и пучки, состоящие из набора мод Бесселя [54-57]. Для вращения световых пучков при распространении в пространстве требуется создать линейную комбинацию соосных вихревых лазерных пучков со специально подобранными топологическими зарядами. Причем суперпозиция из нескольких мод Бесселя [56] может вращаться с большей скоростью, чем пучок, состоящий из нескольких мод Лагерра-Гаусса [51], который поворачивается всего на угол 90 градусов. С помощью бинарного фазового элемента были сформированы два одинаковых лазерных пучка, вращающихся в разные стороны (по часовой и против часовой стрелки) [58]. Заметим, что хотя вращающийся пучок состоит из суперпозиции вихревых пучков, он может не обладать орбитальным угловым моментом [59].

### **3. Селекция мод и измерение орбитального углового момента, 2000 год**

Развитая В.А. Сойфером и его учениками технология расчета и изготовления моданов [22, 23] - дифракционных оптических элементов, согласованных с заданным модовым базисом, позволила создать дифракционные оптические элементы (ДОЭ), как для формирования вихревых лазерных пучков с заданным орбитальным угловым моментом (ОУМ), так и для селекции (пространственного разделения) отдельных мод. С помощью таких многопорядковых ДОЭ в 2001 году был впервые измерен ОУМ вихревого лазерного пучка [60-63]. В этом эксперименте [60] с помощью одного ДОЭ формировался лазерный пучок, состоящий из пяти мод Лагерра-Гаусса с разными топологическими зарядами. Этот лазерный пучок падал на второй 24-х канальный ДОЭ, согласованный с 24 разными модами Лагерра-Гаусса. После прохождения второго ДОЭ, свет пространственно разделялся на 24 дифракционных порядка. Если в падающем пучке была мода Лагерра-Гаусса, которая совпадала с одной из мод второго ДОЭ, то в данном дифракционном порядке наблюдался корреляционный максимум интенсивности. В эксперименте дробный ОУМ исходных пучков был измерен со средней ошибкой 8% [60]. Аналогичные работы по измерению ОУМ оптических вихрей стали появляться совсем недавно [64-66].

### **4. Новые вихревые лазерные пучки, 2004 год**

Начиная с 2004 года стали появляться работы по новым точным решениям волновых уравнений (уравнения Гельмгольца и его парааксиального варианта). Эти точные решения описывали структурно-стабильные (модовые) вихревые лазерные пучки, которые являлись примерами световых полей с фазовыми сингулярностями. Так в работе Е.Г. Абрамочкина и В.Г. Волостникова [67] рассмотрены пучки Эрмита-Лагерра-Гаусса, которые зависят от параметра, и при стремлении этого параметра к нулю или бесконечности пучки Эрмита-Лагерра-Гаусса переходят в хорошо известные моды Лагерра-Гаусса и Эрмита-Гаусса. Вихревые пучки Айнса-Гаусса, открытые М.А. Бендресом с соавторами [68, 69], тоже являются решением парааксиального уравнения типа Шредингера в эллиптических координатах, основанным на многочленах Айнса, и тоже при определенных параметрах переходят к пучкам Эрмита-Гаусса и Лагерра-Гаусса. В работе [70] рассмотрены непарааксиальные параболические лазерные пучки. В этом же 2004 году В.А. Сойфером с соавторами исследованы астигматические пучки Бесселя [71], которые формируются при наклонном падении лазерного пучка на ДОЭ, согласованным с модой Бесселя. При наклонном падении вместо набора световых колец появляются эллипсы и оптический вихрь в центре распадается на несколько оптических вихрей, число которых равно топологическому заряду исходного пучка Бесселя. В работе [72] описан расходящийся вихревой пучок Бесселя, с помощью которого было продемонстрировано вращение нескольких микрочастиц полистирола по первому светлomu кольцу. Такое вращение микрочастиц по окружности в сечении вихревого пучка наблюдается при передаче ОУМ от пучка к частице.

Следующий 2005 год был также богат на новые вихревые лазерные пучки. В работах М.А. Бендреса с соавторами [73, 74] были рассмотрены парааксиальные пучки Гельмгольца-Гаусса, которые сохраняют свою структуру при распространении. А в работе В.А. Сойфера с соавторами были детально исследованы «чистые» оптические вихри (когда в плоскую волну внедрен оптический вихрь) и Гауссовы вихри (когда Гауссов пучок проходит через спиральную

фазовую пластинку) [75]. Эти пучки описываются суммой двух функций Бесселя первого и второго рода.

В следующем году были рассмотрены эллиптические пучки Лагерра-Гаусса, которые были сформированы с помощью наклонного падения Гауссова пучка на ДОО, согласованный с обычной модой Лагерра-Гаусса [76]. Экспериментально и теоретически было показано, что при распространении пучка исходный набор концентрических световых эллипсов видоизменяется. При этом оптический вихрь в центре пучка распадается на несколько оптических вихрей с единичным топологическим зарядом, число которых равно топологическому заряду исходного вихря. В дальней зоне опять восстанавливается начальная структура пучка (набор концентрических эллипсов), но повернутая на 90 градусов.

В 2007 году группой ученых под руководством В.А. Сойфера был исследован новый тип вихревых лазерных пучков – гипергеометрические моды [77]. Эти пучки описываются гипергеометрической функцией (или функцией Куммера). В отличие от других точных решений параксиального уравнения Гельмгольца в цилиндрических координатах (например, пучков Лагерра-Гаусса), у гипергеометрических пучков есть дополнительный непрерывный параметр, с помощью которого можно управлять расходимостью таких пучков. Вслед за работой [77] вышла работа Э. Карими с соавторами [78], в которой рассматривались Гипергеометрические-Гауссовы пучки, обладающие конечной энергией, но из-за этого такие пучки уже не являются модами. Заметим, что гипергеометрические моды [77] не являются частным случаем более общих вихревых пучков с круговой симметрией [79].

В 2011 году В.А. Сойфером с соавторами были получены самофокусирующиеся гипергеометрические лазерные пучки [80], а также показано, что такие пучки формируются при дифракции на логарифмическом аксиконе [81]. В следующем году были открыты непараксиальные вихревые лазерные пучки Ханкеля-Бесселя [82], которые отличаются от мод Бесселя тем, что их комплексная амплитуда описывается произведением двух линейно независимых решений уравнения Куммера. Например, в частном случае пучок Ханкеля-Бесселя описывается произведением функции Ханкеля и Бесселя с полуцелыми номерами.

## **5. Асимметричные вихревые лазерные пучки, 2014 год**

Начиная с 2014 года, В.А. Сойфером и его учениками были найдены несколько новых семейств вихревых лазерных пучков, которые являются точными решениями уравнений Гельмгольца и его параксиального варианта. Эти вихревые пучки не имеют осевой (круговой) симметрии и поэтому называются асимметричными вихревыми пучками. Было рассмотрено двухпараметрическое семейство бездифракционных непараксиальных асимметричных пучков Бесселя [83] и параксиальных асимметричных пучков Бесселя-Гаусса [84], а также их суперпозиций [85]. Эти пучки описываются функциями Бесселя первого рода целого порядка с комплексным аргументом. Асимметричные пучки Бесселя имеют счётное число изолированных нулей интенсивности, лежащих на горизонтальной оси и имеющих единичный топологический заряд (за исключением осевого нуля интенсивности) и разные знаки с разных сторон от оптической оси. Ноль интенсивности, лежащий на оптической оси, имеет топологический заряд, равный порядку функции Бесселя. Асимметричные пучки Бесселя имеют кольцевой спектр по углу, задающему направление волнового вектора, и только распределение фазы по полярному углу. Асимметричные пучки Бесселя являются бездифракционными модами свободного пространства и имеют дробный ОУМ, который растёт линейно с ростом номера моды. Пучок нулевого порядка имеет максимум интенсивности на оптической оси и изолированные нули интенсивности вблизи корней функции Бесселя и обладает ОУМ. Также исследованы новые бездифракционные моды свободного пространства, не обладающие круговой симметрией – пучки Ломмеля [86]. Интересно, что суперпозиция смещённых с оптической оси одинаковых обычных симметричных пучков Бесселя, может приводить к асимметричному распределению интенсивности в сечении пучка, но такой асимметричный пучок Бесселя будет обладать целым ОУМ, равным топологическому заряду отдельного пучка в суперпозиции [87].

Развивая первые работы В.А. Сойфера с соавторами по асимметричным вихревым пучкам, были исследованы вихревые лазерные пучки Эрмита-Гаусса [88], асимметричные пучки Лагерра-Гаусса [89] и асимметричные эллиптические гауссовы вихри [90, 91]. У всех асимметричных вихревых пучков ОУМ зависит от параметра асимметрии, изменяя который можно непрерывно изменять ОУМ. Были предложены оптимальные оптические элементы для формирования совершенных оптических вихрей [92], в том числе и для формирования эллиптических совершенных вихрей [93]. У этих совершенных вихрей радиус светового кольца и размеры светового эллипса не зависят от величины топологического заряда.

Под руководством В.А. Сойфера в 2016 году были открыты новые векторные вихревые лазерные пучки Ханкеля с линейной [94] и круговой [95] поляризацией. Эти вихревые пучки описываются с помощью функций Ханкеля с полуцелыми номерами и являются точным решением системы уравнений Максвелла. Получены явные аналитические выражения для проекций электрического и магнитного векторов вихревых пучков Ханкеля с правой и левой круговой поляризациями.

#### **6. Терагерцовые вихревые пучки, 2016 год**

Пучки с орбитальным угловым моментом широко используются во многих спектральных диапазонах, включая видимый свет, радиочастотный диапазон и даже мягкое рентгеновское излучение. Но терагерцовый диапазон еще недостаточно изучен, и очень мало исследований было посвящено генерации терагерцовых вихревых пучков. Под руководством В.А. Сойфера с соавторами по технологии плазмохимического травления были изготовлены кремниевые бинарные фазовые пластины со спиральной структурой (типа спирального аксикона), которые преобразуют падающую плоскую волну с длиной волны 141 мкм в вихревую [96]. С использованием новосибирского лазера на свободных электронах в качестве источника непрерывного излучения были получены бездифракционные бесселевы вихревые пучки с топологическими зарядами  $\pm 1$  и  $\pm 2$  и средней мощностью 30 Вт в терагерцовом диапазоне. Пространственные характеристики пучков были исследованы с использованием матрицы микроболометров. Была продемонстрирована способность к самовосстановлению полученных пучков Бесселя после небольших искажений. Дифракционные оптические элементы терагерцового диапазона были позднее изготовлены с помощью фемтосекундного лазера путем абляции [97].

#### **7. Оптические вихри в случайных средах, 2017 год**

В 2017 году под руководством В.А. Сойфера было проведено экспериментальное исследование по распространению вихревых лазерных пучков в случайной аэрозольной среде [98]. Оптические вихри были сформированы с помощью жидкокристаллического пространственного модулятора света. Теоретическое исследование основано на расширенном принципе Гюйгенса–Френеля с генерацией случайного поля с использованием быстрого преобразования Фурье. Моделирование показало, что устойчивость вихревых пучков к флуктуациям оптической среды падает с ростом порядка оптических вихрей. Кроме того, длина когерентности (радиус) случайной среды имеет решающее значение. Увеличение радиуса когерентности отрицательно влияет на сохранение структуры пучка в случайной среде. Распространение в свободном пространстве (после прохождения случайной среды) компенсирует отрицательные эффекты флуктуаций для пучков с высокими топологическими зарядами. Экспериментальные исследования в случайной аэрозольной среде показали, что на малых расстояниях вихревые пучки в основном демонстрируют меньшую устойчивость, чем Гауссов пучок. Однако на значительных расстояниях вихревые пучки начинают демонстрировать большую устойчивость, что можно объяснить их способностью к регенерации после прохождения препятствий [98-100].

Показано также, что наличие вихревой компоненты приводит к образованию осесимметричной поверхности каустики, характерный диаметр которой увеличивается с увеличением топологического заряда [101-102].

## 8. Возможности практического использования

Изучение фундаментальных проблем управления излучением и формирования новых типов лазерных пучков имеет не только теоретическую значимость, но и открывает ряд интересных возможностей прикладного использования достижений сингулярной оптики [103-118]. Это не только оптическая связь в атмосфере [98-100] и создание устройств для оптического микроманипулирования [72, 109-110], но и перспективные информационные технологии [104], юстировка и лазерная обработка материалов, включая сверление отверстий [105-108], новые типы оптических датчиков [111-113], новые возможности для моделирования работы и проектирования оптических приборов [111-113], острая фокусировка [111-113], волоконная связь [114] и многое другое. Научная школа академика РАН В.А. Сойфера вносит значительный вклад в реализацию возможностей практического использования достижений вихревой оптики [72, 98-100, 103-104, 109-118].

## 9. Заключение

В данном обзоре описаны основные научные результаты, полученные академиком РАН В.А. Сойфером и его научной школой в рамках научного направления – сингулярная оптика. Многие из этих результатов были пионерскими и открыли новые горизонты в развитии данного направления науки. В работах В.А. Сойфера с соавторами было начато направление в сингулярной оптике – Бессель-оптика (1984 год). Другое новое направление – дифракционная компьютерная оптика (1980 год) позволило впервые синтезировать основные фазовые элементы сингулярной оптики, формирующие оптические вихри: спиральную фазовую пластинку и спиральный аксикон (1992 год). Пионерские работы по созданию моданов (1982 год) – многопорядковых дифракционных оптических элементов, согласованных с модами свободного пространства, позволили формировать вихревые лазерные пучки с заданным модовым составом и осуществлять их селекцию. С помощью многопорядковых ДОО был впервые измерен ОУМ вихревых лазерных пучков (2000 год).

И сегодня, во всех беспроводных системах оптической связи на основе лазерных пучков с ОУМ, демультимплексирование лазерных пучков в приемной части осуществляется аналогично селекции мод с помощью моданов.

Работы В.А. Сойфера и его учеников обогатили сингулярную оптику множеством новых семейств вихревых структурно-устойчивых лазерных пучков, которые являются точными решениями волновых уравнений оптики. Среди них эллиптические пучки Лагерра-Гаусса, гипергеометрические лазерные пучки, чистые оптические вихри, непараксиальные пучки Ханкеля-Бесселя, векторные пучки Ханкеля, вихревые эллиптические пучки Эрмита-Гаусса, асимметричные вихревые пучки Бесселя-Гаусса, бездифракционные моды Ломмеля и другие.

Достижения научной школы В.А. Сойфера активно подхватывают и развивают ученые во всем мире. Например, возможности фокусировки поверхностных электромагнитных волн с помощью дифракционных структур [119-120] применены международным коллективом ученых из Китая, Австралии и США [121] для формирования бездифракционных блоховских поверхностных волн. В нашем коллективе также развиваются и применяются идеи академика РАН В.А. Сойфера для использования возможностей вихревой оптики при решении задач волоконно-оптической связи и радиофотоники [122-125].

## 10. Благодарности

Обзор подготовлен при поддержке Российского научного фонда: грант 18-19-00123 (разделы 1-4) и грант 19-49-04112 (разделы 5-8).

## 11. Литература

- [1] Allen, L. The orbital angular momentum of light / L. Allen, M.J. Padgett, M. Babiker // Progress in Optics. – 1999. – Vol. 39. – P. 291-372.
- [2] Soskin, M.S. Chapter 4 Singular optics / M.S. Soskin, M.V. Vasnetsov // Progress in Optics. – 2001. – Vol. 42. – P. 219-276.

- [3] Desyatnikov, A.S. Chapter 5 Optical vortices and vortex solitons / A.S. Desyatnikov, Y.S. Kivshar, L. Toner // *Progress in Optics*. – 2005. – Vol. 47. – P. 291-391.
- [4] Dennis, M.R. Chapter 5 Singular Optics: optical vortices and polarization singularities / M.R. Dennis, O'Holleran, M.J. Padgett // *Progress in Optics*. – 2009. – Vol. 53. – P. 293-363.
- [5] Soskin, M. Singular optics and topological photonics / M. Soskin, S.V. Boriskina, Y. Chon, M.R. Dennis, A. Desyatnikov // *Progress in Optics*. – 2017. – Vol. 19. – P. 010401.
- [6] Pachava, S. Generation and decomposition of scalar and vector modes carrying orbital angular momentum: a review / S. Pachava, R. Dharmavarapu, A. Vijayakumar, S. Jayakumar, A. Dixit, N.K. Viswanathan, B. Srinivasan, S. Bhattacharya // *Optical Engineering*. – 2019. – Vol. 59. – P. 041205.
- [7] Allen, L. Optical angular momentum / L. Allen, S.M. Barnett, M.J. Padgett – CRC Press, 2003. – 300 p.
- [8] Котляр, В.В. Вихревые лазерные пучки / В.В. Котляр, А.А. Ковалев – ИСОИ РАН, Самара, 2012. – 248 с.
- [9] Gbur, G.J. Singular Optics / G.J. Gbur – CRC Press, 2017. – 546 p.
- [10] Kotlyar, V.V. Vortex laser beams / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Porfirev – CRC Press, Boca Raton, 2018. – 404 p.
- [11] Kotlyar, V.V. Accelerating and Vortex Laser Beams / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev – CRC Press, Boca Raton, 2019. – 298 p.
- [12] Nye, J.E. Dislocations in wave trains / J.E. Nye, M.V. Berry // *Prog. Roy. Soc. A*. – 1974. – Vol. 336(1605). – P. 165-190.
- [13] Berry, M.V. Disruption of wavefronts: statistics of dislocations in incoherent Gaussian random waves // *J. Phys. A*. – 1978. – Vol. 11. – P. 27-37.
- [14] Baranova, N.B. Dislocations of the wavefront of a speckle inhomogeneous field (theory and experiment) / N.B. Baranova, B.Ya. Zel'dovich, A.V. Mamaev, N.F. Pilipetskii, V.V. Shkunov // *JETP Lett.* – 1981. – Vol. 33(4). – P. 195-199.
- [15] Lohmann, A.W. Binary Fraunhofer holograms, generated by computer / A.W. Lohmann, D.P. Paris // *Appl. Opt.* – 1967. – Vol. 6. – P. 1739-1748.
- [16] Brown, B.R. Computer-generated binary holograms. IBM / B.R. Brown, A.W. Lohmann // *J. Res. Dev.* – 1969. – Vol. 13. – P. 160-168.
- [17] Golub, M.A. Synthesis of spatial filters for investigation of the transverse mode composition of coherent radiation / M.A. Golub, A.M. Prokhorov, I.N. Sisakyan, V.A. Soifer // *Sov. J. Quant. Electr.* – 1982. – Vol. 12. – P. 1208-1209.
- [18] Golub, M.A. Experimental investigation of spatial filters separating transverse modes of optical fields / M.A. Golub, S.V. Karpeev, S.G. Krivoshlykov, A.M. Prokhorov, I.N. Sisakyan, V.A. Soifer // *Sov. J. Quant. Electr.* – 1983. – Vol. 13. – P. 1123-1124.
- [19] Golub, M.A. Spatial filter investigation of the distribution of power between transverse modes in a fiber waveguide / M.A. Golub, S.V. Karpeev, S.G. Krivoshlykov, A.M. Prokhorov, I.N. Sisakyan, V.A. Soifer // *Sov. J. Quant. Electr.* – 1984. – Vol. 14. – P. 1255-1256.
- [20] Голуб, М.А. Фазовые пространственные фильтры, согласованные с поперечными модами / М.А. Голуб, С.В. Карпеев, Н.Л. Казанский, А.В. Мирзов, И.Н. Сисакян, В.А. Сойфер // *Квантовая электроника*. – 1988. – Т. 18. – С. 617-618.
- [21] Голуб, М.А. Оптические элементы для анализа и формирования поперечно-модового состава / М.А. Голуб, И.Н. Сисакян, В.А. Сойфер, Г.В. Уваров // *Квантовая электроника*. – 1989. – Т. 16. – С. 832-842.
- [22] Голуб, М.А. Моданы – новые элементы компьютерной оптики / М.А. Голуб, И.Н. Сисакян, В.А. Сойфер // *Компьютерная оптика*. – 1990. – Т. 8. – С. 3-64.
- [23] Soifer, V.A. Laser beam mode selection by computer generated holograms / V.A. Soifer, M.A. Golub – Boca Raton, USA: CRC Press, 1994.
- [24] Adzhalov, V.I. Multichannel computer-optics components matched to mode groups / V.I. Adzhalov, M.A. Golub, S.V. Karpeev, I.N. Sisakyan, V.A. Soifer // *Sov. J. Quant. Electr.* – 1990. – Vol. 20. – P. 136-140.

- [25] Golub, M.A. Experimental investigation of a multibeam holographic optical element matched to Gauss-Laguerre modes / M.A. Golub, E.L. Kaganov, A.A. Kondorov, V.A. Soifer, G.V. Uspleniev // *Sov. J. Quant. Electr.* – 1996. – Vol. 26. – P. 184-186.
- [26] Березный, А.Е. Бессель-оптика / А.Е. Березный, А.М. Прохоров, И.Н. Сисакян, В.А. Сойфер // *Доклады АН СССР.* – 1984. – Т. 274. – № 4. – С. 802-804.
- [27] Durnin, J. Diffraction-free beams / J. Durnin, Jr.J. Miceli, J.H. Eberly // *Physical Review Letters.* – 1987. – Vol. 58(15). – P. 1499-1501.
- [28] Vasara, A. Realization of general non-diffracting beams with coputer-generated holograms / A. Vasara, J. Turunen, A.T. Friberg // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 1989. – Vol. 6. – P. 1748-1754.
- [29] Kotlyar, V.V. Trochoson / V.V. Kotlyar, S.N. Khonina, V.A. Soifer, G.V. Uspleniev, M.V. Shinkarev // *Opt. Commun.* – 1992. – Vol. 91. – P. 158-162.
- [30] Golub, M.A. Mode selection of laser radiation by computer-generated optical elements / M.A. Golub, I.N. Sisakian, V.A. Soifer // *Optics and Lasers in Engineering.* – 1991. – Vol.15. – P. 341-356.
- [31] Сисакян, И.Н. Компьютерная оптика, достижения и проблемы / И.Н. Сисакян, В.А. Сойфер // *Компьютерная оптика.* – 1987. – Т. 1. – С. 5-19.
- [32] Голуб, М.А. Получение асферических волновых фронтов при помощи машинных голограмм / М.А. Голуб, Е.С. Живописцев, С.В. Карпеев, А.М. Прохоров, И.Н. Сисакян, В.А. Сойфер // *Доклады Академии Наук СССР.* – 1980. – Т. 253. – С. 1104-1108.
- [33] Golub, M.A. Wavefronts forming by computer-generated optical elements / M.A. Golub, N.L. Kazanskiy, I.N. Sisakyan, V.A. Soifer // *Proceedings of SPIE.* – 1990. – Vol. 1183. – P.727-750.
- [34] Голуб, М.А. Фокусировка когерентного излучения в заданную область пространства с помощью синтезированных на ЭВМ голограмм / М.А. Голуб, С.В. Карпеев, А.М. Прохоров, И.Н. Сисакян, В.А. Сойфер // *Письма в ЖТФ.* – 1981. – Т. 7. – С. 618-623.
- [35] Голуб, М.А. Машинный синтез фокусирующих элементов для CO<sub>2</sub> лазера / М.А. Голуб, А.А. Дегтярев А.А., А.Н. Климов, В.В. Попов, А.М. Прохоров, Е.В. Сисакян, И.Н. Сисакян, В.А. Сойфер // *Письма в ЖТФ.* – 1982. – Т. 8. – С. 449-451.
- [36] Данилов, В.А. Синтез оптических элементов, создающих фокальную линию произвольной формы / В.А. Данилов, В.В. Попов, А.М. Прохоров, Д.М. Сагателян, И.Н. Сисакян, В.А. Сойфер // *Письма в ЖТФ.* – 1982. – Т. 8. – С. 810-815.
- [37] Голуб, М.А. Дифракционный расчет оптического элемента, фокусирующего в кольцо / М.А. Голуб, Н.Л. Казанский, И.Н. Сисакян, В.А. Сойфер, С.И. Харитонов // *Автометрия.* – 1987. – Вып. 6. – С. 8-15.
- [38] Golub, M.A. Infra-red radiation focusators / M.A. Golub, I.N. Sisakian, V.A. Soifer // *Optics and Lasers in Engineering.* – 1991. – Vol. 15. – P. 297-309.
- [39] Golub, M.A. Focusators at letters diffraction design / M.A. Golub, L.L. Doskolovich, N.L. Kazanskiy, S.I. Kharitonov, I.N. Sisakian, V.A. Soifer // *Proceedings of SPIE.* – 1991. – Vol. 1500. – P. 211-221.
- [40] Abramochkin, E. Beam transformations and nontransformed beams / E. Abramochkin, V. Volostnikov // *Opt. Commun.* – 1991. – Vol. 83. – P. 123-135.
- [41] Bazhenov, V.Y. Laser beams with screw dislocations in their wavefronts / V.Y. Bazhenov, M. Vasnetsov, M. Soskin // *JEPT Lett.* – 1990. – Vol. 52. – P. 429-431.
- [42] Bashenov, V.Y. Screw dislocations in light wavefronts / V.Y. Bashenov, M. Soskin, M. Vasnetsov // *J. Mod. Opt.* – 1992. – Vol. 39. – P. 985-990.
- [43] Heckenberg, N.R. Generation of optical phase singularities by computer-generated holograms / N.R. Heckenberg, R. McDuff, C.P. Smith // *Opt. Lett.* – 1992. – Vol. 17. – P. 221-223.
- [44] Khonina, S.N. The rotor phase filter / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, M.V. Shinkarev, V.A. Soifer, G.V. Uspleniev // *J. Mod. Opt.* – 1992. – Vol. 39. – P. 1147-1154.
- [45] Allen, L. Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes / L. Allen, M.W. Beijersbergen, R.J.C. Spreeuw, J.P. Woerdmann // *Phys. Rev. A.* – 1992. – Vol. 45. – P. 8185-8189.

- [46] Doskolovich, L.L. Focusators into ring / L.L. Doskolovich, V.V. Kotlyar, I.V. Nikolsky, S.N. Khonina, G.V. Uspleniev, V.A. Soifer // *Opt. Quant. Electr.* – 1993. – Vol. 25. – P. 801-814.
- [47] Ostrovsky, A.S. Generation of the “perfect” optical vortex using a liquid-crystal spatial light modulator / A.S. Ostrovsky, C. Rickenstorff-Parrao, V. Arrizón // *Opt. Lett.* – 2013. – Vol. 38. – P. 534-536.
- [48] Kotlyar, V.V. Algorithm for the generation of nondiffracting Bessel modes / V.V. Kotlyar, S.N. Khonina, V.A. Soifer // *Journal of Modern Optics.* – 1995. – Vol. 42. – P. 1231-1239.
- [49] Kotlyar, V.V. Calculation of phase formers of non-diffracting images and a set of concentric rings / V.V. Kotlyar, S.N. Khonina, V.A. Soifer // *Optik.* – 1996. – Vol. 102. – P. 45-50.
- [50] Abramochkin, E. Spiral-type beams / E. Abramochkin, V. Volostnikov // *Opt. Commun.* – 1993. – Vol. 102. – P. 336-350.
- [51] Schechner, V.Y. Wave propagation with rotating intensity distributions / V.Y. Schechner, R. Piestun, J. Shamir // *Phys. Rev. E.* – 1996. – Vol. 54. – P. R50-R53.
- [52] Abramochkin, E. Generation of spiral-type laser beams / E. Abramochkin, N. Losevsky, V. Volostnikov // *Opt. Commun.* – 1997. – Vol. 141. – P. 59-64.
- [53] Котляр, В.В. Вращение световых многомодовых пучков Гаусса-Лагерра в свободном пространстве / В.В. Котляр, С.Н. Хонина, В.А. Сойфер // *Письма в ЖТФ.* – 1997. – Т. 23. – С. 1-6.
- [54] Kotlyar, V.V. An algorithm for the generation of laser beams with longitudinal periodicity: rotating images / V.V. Kotlyar, S.N. Khonina, V.A. Soifer // *Journal of Modern Optics.* – 1997. – Vol. 44. – P. 1409-1416.
- [55] Kotlyar, V.V. Rotation of multimodal Gauss-Laguerre light beams in free space and in a fiber / V.V. Kotlyar, S.N. Khonina, V.A. Soifer // *Optics and Lasers in Engineering.* – 1998. – Vol. 29. – P. 343-350.
- [56] Paakkonen, P. Rotating optical fields: experimental demonstration with diffractive optics / P. Paakkonen, J. Lautanen, M. Honkanen, M. Kuittinen, J. Turunen, S. Khonina, A. Friberg, V. Kotlyar, V. Soifer // *Journal of Modern Optics.* – 1998. – Vol. 45. – P. 2355-2369.
- [57] Khonina, S. Generation of rotating Gauss-Laguerre modes with binary-phase diffractive optics / S. Khonina, V. Kotlyar, V. Soifer, M. Honkanen, J. Lautanen, J. Turunen // *Journal of Modern Optics.* – 1999. – Vol. 46. – P. 227-238.
- [58] Khonina, S. Generating a couple of rotating nondiffracting beams using a binary-phase DOE / S. Khonina, V. Kotlyar, V. Soifer, M. Honkanen, J. Lautanen, J. Turunen // *Optik.* – 1999. – Vol. 110. – P. 137-144.
- [59] Kotlyar, V.V. Rotation of laser beams with zero of the orbital angular momentum / V.V. Kotlyar, S.N. Khonina, R.V. Skidanov, V.A. Soifer // *Opt. Commun.* – 2007. – Vol. 274. – P. 8-14.
- [60] Khonina, S.N. Measuring the light field orbital angular momentum using DOE / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, V.A. Soifer, P. Paakkonen, J. Turunen // *Optical Memory and Neural Networks.* – 2001. – Vol. 10. – P. 241-255.
- [61] Khonina, S.N. An analysis of the angular momentum of a light field in terms of angular harmonics / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, V.A. Soifer, P. Paakkonen, J. Simonen, J. Turunen // *Journal of Modern Optics.* – 2001. – Vol. 48. – P. 1543-1557.
- [62] Котляр, В.В. Измерение орбитального углового момента светового поля с помощью дифракционного оптического элемента / В.В. Котляр, С.Н. Хонина, В.А. Сойфер, Я. Ванг // *Автоматрия.* – 2002. – Т. 38. – С. 33-44.
- [63] Khonina, S.N. Generation and selection of laser beams represented by a superposition of two angular harmonics / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, V.A. Soifer, K. Jefimovs, J. Turunen // *Journal of Modern Optics.* – 2004. – Vol. 51. – P. 761-773.
- [64] Alperin, S.N. Quantitative measurement of the orbital angular momentum of light with a single, stationary lens / S.N. Alperin, R.D. Niederriter, J.T. Gopinath, M.E. Siemens // *Opt. Lett.* – 2016. – Vol. 41. – P. 5019-5022.

- [65] D'Errico, A. Measuring the complex orbital angular momentum spectrum and spatial mode decomposition of spectrum light beams / A. D'Errico, R. D'Amelio, B. Piccirillo, F. Cardano, L. Marrucci // *Optica*. – 2017. – Vol. 4. – P. 1350-1357.
- [66] Volyar, A.V. Beyond the light intensity or intensity moments and measurements of the vortex spectrum in complex light beams / A.V. Volyar, M.V. Bretsko, Ya.E. Akimova, Yu.A. Egorov // *Computer Optics*. – 2018. – Vol. 42. – P. 736-743. DOI: 10.18287/2412-6179-2017-42-5-736-743.
- [67] Abramochkin, E.G. Generalized Gaussian Beams / E.G. Abramochkin, V.G. Volostnikov // *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* – 2004. – Vol. 6. – P. S157-S161.
- [68] Bandrez, M.A. Ince-Gaussian beams / M.A. Bandrez, J. C. Gutierrez-Vega // *Opt. Lett.* – 2004. – Vol. 29. – P. 144-146.
- [69] Bandrez, M.A. Elegant Ince-Gaussian beams / M.A. Bandrez, J. C. Gutierrez-Vega // *Opt. Lett.* – 2004. – Vol. 29. – P. 1724-1726.
- [70] Bandres, M.A. Parabolic nondiffracting optical wave fields / M.A. Bandres, J.C. Gutierrez-Vega, S. Chavez-Cedra // *Opt. Lett.* – 2004. – Vol. 29. – P. 44-46.
- [71] Khonina, S.N. Astigmatic Bessel laser beams / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, V.A. Soifer, K. Jefimovs, J. Turunen, P. Paakkonen // *Journal of Modern Optics*. – 2004. – Vol. 51. – P. 677-687.
- [72] Khonina, S.N. Rotation of microparticles with Bessel beams generated by diffractive elements / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, R.V. Skidanov, V.A. Soifer, K. Jefimovs, J. Turunen, J. Simonen // *Journal of Modern Optics*. – 2004. – Vol. 51. – P. 2167-2184.
- [73] Gutierrez-Vega, J.C. Helmholtz-Gauss waves / J.C. Gutierrez-Vega, M.A. Bandres // *J. Opt. Soc. Am. A*. – 2005. – Vol. 22. – P. 289-298.
- [74] Bandres, M.A. Vector Helmholtz-Gauss and vector Laplace-Gauss beams / M.A. Bandres, J.C. Gutierrez-Vega, S. Chavez-Cedra // *Opt. Lett.* – 2004. – Vol. 30. – P. 2155-2157.
- [75] Kotlyar, V.V. Generation of phase singularity through diffracting a plane or Gaussian beam by a spiral phase plate / V.V. Kotlyar, A.A. Almazov, S.N. Khonina, V.A. Soifer, H. Elfstrom, J. Turunen // *J. Opt. Soc. Am. A*. – 2005. – Vol. 22. – P. 849-861.
- [76] Kotlyar, V.V. Elliptic Laguerre-Gaussian beams / V.V. Kotlyar, S.N. Khonina, A.A. Almazov, V.A. Soifer, K. Jefimovs, J. Turunen // *J. Opt. Soc. Am. A*. – 2006. – Vol. 25. – P. 43-56.
- [77] Kotlyar, V.V. Hypergeometric modes / V.V. Kotlyar, R.V. Skidanov, S.N. Khonina, V.A. Soifer // *Opt. Lett.* – 2007. – Vol. 32. – P. 742-744.
- [78] Karimi, E. Hypergeometric-Gaussian modes / E. Karimi, G. Zito, B. Piccirillo, L. Martucci, E. Santamato // *Opt. Lett.* – 2007. – Vol. 32. – P. 3053-3055.
- [79] Bandres, M.A. Circular beams / M.A. Bandres, J.C. Gutierrez-Vega, S. Chavez-Cedra // *Opt. Lett.* – 2008. – Vol. 33. – P. 177-179.
- [80] Kotlyar, V.V. Lensless focusing of hypergeometric laser beams / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, V.A. Soifer // *Journal of Optics*. – 2011. – Vol. 13. – P. 075703.
- [81] Kotlyar, V.V. Diffraction of a Gaussian beam by a logarithmic axicon / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, S.S. Stafeev, V.A. Soifer // *Journal of Opt. Soc. Am. A*. – 2011. – Vol. 28. – P. 844-849.
- [82] Kotlyar, V.V. Hankel-Bessel laser beams / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, V.A. Soifer // *Journal of Optical Society of America A*. – 2012. – Vol. 29. – P. 741-747.
- [83] Kotlyar, V.V. Asymmetric Bessel modes / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, V.A. Soifer // *Opt. Lett.* – 2014. – Vol. 39. – P. 2395-2398.
- [84] Kotlyar, V.V. Assymetric Bessel-Gauss beams / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, R.V. Skidanov, V.A. Soifer // *J. Opt. Soc. Am. A*. – 2014. – Vol. 31. – P. 1977-1983.
- [85] Kotlyar, V.V. Superpositions of asymmetrical Bessel beams / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, V.A. Soifer // *Journal of the Optical Society of America A*. – 2015. – Vol. 32. – P. 1046-1052.
- [86] Kovalev, A.A. Lommel modes / A.A. Kovalev, V.V. Kotlyar // *Opt. Commun.* – 2015. – Vol. 338. – P. 117-122.
- [87] Kovalev, A.A. Shifted nondiffractive Bessel beams / A.A. Kovalev, V.V. Kotlyar, A.A. Porfirev // *Phys. Rev. A*. – 2015. – Vol. 91. – P. 053840.

- [88] Kotlyar, V.V. Vortex Hermite-Gaussian laser beams / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Porfirev // *Opt. Lett.* – 2015. – Vol. 40. – P. 701-704.
- [89] Kovalev, A.A. Asymmetric Laguerre-Gaussian beams / A.A. Kovalev, V.V. Kotlyar, A.P. Porfirev // *Phys. Rev. A.* – 2016. – Vol. 93. – P. 063858.
- [90] Kotlyar, V.V. Asymmetric Gaussian optical vortex / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Porfirev // *Opt. Lett.* – 2017. – Vol. 42. – P. 139-142.
- [91] Kotlyar, V.V. Elliptic Gaussian optical vortices / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Porfirev // *Phys. Rev. A.* – 2017. – Vol. 95. – P. 053805.
- [92] Kotlyar, V.V. An optimal phase element for generating a perfect optical vortex / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Porfirev // *J. Opt. Soc. Am. A.* – 2016. – Vol. 33. – P. 2376-2384.
- [93] Kovalev, A.A. A highly efficient element for generating elliptic perfect optical vortices / A.A. Kovalev, V.V. Kotlyar, A.P. Porfirev // *App. Phys. Lett.* – 2017. – Vol. 110. – P. 261102.
- [94] Kotlyar, V.V. Vectorial rotating vortex Hankel laser beams / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, V.A. Soifer // *Journal of Optics.* – 2016. – Vol. 18. – P. 095602.
- [95] Kotlyar, V.V. Circularly polarized Hankel vortices / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev // *Opt. Express.* – 2017. – Vol. 25. – P. 7778-7790.
- [96] Volodkin, B. Fabrication and characterization of diffractive phase plates for forming high-power terahertz vortex beams using free electron laser radiation / B. Volodkin, Y. Choporova, B. Knyazev, G. Kulipanov, V. Pavelyev, V. Soifer, N. Vinokurov // *Opt. Quant. Electron.* – 2016. – Vol. 48. – P. 223.
- [97] Pavelyev, V.S. Fabrication of high-effective silicon diffractive optics for the terahertz range by femtosecond laser ablation / V.S. Pavelyev, M.S. Komlenok, B.O. Volodkin, B.A. Knyazev, T.V. Kononenko, V.I. Konov, V.A. Soifer, Yu.Yu. Choporova // *Physics Procedia.* – 2016. – Vol. 84. – P. 170-174.
- [98] Porfirev, A.P. Study of propagation of vortex beams in aerosol optical medium / A.P. Porfirev, M.S. Kirilenko, S.N. Khonina, R.V. Skidanov, V.A. Soifer // *Applied Optics.* – 2017. – Vol. 56. – P. E8-E15.
- [99] Soifer, V.A. Vortex beams in turbulent media: review / V.A. Soifer, O.Korotkova, S.N. Khonina, E.A. Shchepakina // *Computer Optics.* – 2016. – Vol. 40. – P. 605-624. DOI: 10.18287/2412-6179-2016-40-5-605-624.
- [100] Vasilyev, V.S. Experimental investigation of the stability of Bessel beams in the atmosphere / V.S. Vasilyev, A.I. Kapustin, R.V. Skidanov, V.V. Podlipnov, N.A. Ivliev, S.V.Ganchevskaya // *Computer Optics.* – 2019. – Vol. 43(3). – P. 376-384. DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-3-376-384
- [101] Soifer, V.A. Caustics of Vortex Optical Beams / V.A. Soifer, S.I. Kharitonov, S.N. Khonina, S.G. Volotovskiy // *Doklady Physics.* – 2019. – Vol. 64(7). – P. 276-279.
- [102] Kharitonov, S. Caustics of the vortex beams generated by vortex lenses and vortex axicons / S. Kharitonov, S. Khonina, S. Volotovskiy, N. Kazanskiy // *Journal of the Optical Society of America A.* – 2020. – Vol. 37(3). – P. 476-482. DOI: 10.1364/JOSAA.382361.
- [103] Soifer, V.A. Diffractive optical elements in nanophotonics devices / V.A. Soifer, V.V. Kotlyar, L.L. Doskolovich // *Computer Optics.* – 2009. – Vol. 33(4). – P. 352-368.
- [104] Soifer, V.A. Diffractive nanophotonics and advanced information technologies // *Herald of the Russian Academy of Sciences.* – 2014. – Vol. 84(1). – P. 9-20.
- [105] Liu, H.-L. Generation and applications of non-diffraction beam / H.-L. Liu, Z.-H. Hu, J. Xia, Y.-F. Lü // *Wuli Xuebao/Acta Physica Sinica.* – 2018. – Vol. 67(21). – P. 214204.
- [106] Yao, Z. Non-diffraction-length, tunable, Bessel-like beams generation by spatially shaping a femtosecond laser beam for high-aspect-ratio micro-hole drilling / Z. Yao, L. Jiang, X. Li, A. Wang, Z. Wang, M. Li, Y. Lu // *Optics Express.* – 2018. – Vol. 26(17). – P. 21960-21968.
- [107] Stoian, R. High-resolution material structuring using ultrafast laser non-diffractive beams / R. Stoian, M.K. Bhuyan, A. Rudenko, J.-P. Colombier, G. Cheng // *Advances in Physics: X.* – 2019. – Vol. 4(1). – P. 1659180.

- [108] Liu, X. Gaussian-Bessel beams for short-pulse processing of small-aspect-ratio microchannels in dielectrics / X. Liu, Q. Li, A. Sikora, M. Sentis, O. Utéza, R. Stoian, W. Zhao, G. Cheng, N. Sanner // *Optics Express*. – 2019. – Vol. 27(5). – P. 6996-7008.
- [109] Soifer, V.A. Optical microparticle manipulation: Advances and new possibilities created by diffractive optics / V.A. Soifer, V.V. Kotlyar, S.N. Khonina // *Physics of Particles and Nuclei*. – 2004. – Vol. 35(6). – P. 733-766.
- [110] Porfirev, A.P. Optical trapping and moving of microparticles using asymmetrical Bessel-Gaussian beams / A.P. Porfirev, A.A. Kovalev, V.V. Kotlyar // *Computer Optics*. – 2016. – Vol. 40(2). – P. 152-157. DOI: 10.18287/2412-6179-2016-40-2-152-157.
- [111] Karpeev, S.V. Fibre sensors based on transverse mode selection / S.V. Karpeev, V.S. Pavelyev, S.N. Khonina, N.L. Kazanskiy, A.V. Gavrilov, V.A. Erolov // *Journal of Modern Optics*. – 2007. – Vol. 54(6). – P. 833-844.
- [112] Butt, M.A. Optical elements based on silicon photonics / M.A. Butt, S.N. Khonina, N.L. Kazanskiy // *Computer Optics*. – 2019. – Vol. 43(6). – P. 1079-1083. – DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-6-1079-1083.
- [113] Khonina, S.N. Vortex phase elements as detectors of polarization state / S.N. Khonina, D.A. Savelyev, N.L. Kazanskiy // *Optics Express*. – 2015. – Vol. 23(14). – P. 17845-17859. DOI: 10.1364/OE.23.017845.
- [114] Kazanskiy, N.L. Modeling diffractive optics elements and devices // *Proc. SPIE*. – 2018. – Vol. 10774. – P. 107740O. DOI: 10.1117/12.2319264.
- [115] Kazanskiy, N.L. Simulation of spectral filters used in hyperspectrometer by decomposition on vector Bessel modes / N.L. Kazanskiy, S.I. Kharitonov, S.N. Khonina, S.G. Volotovskiy // *Proceedings of SPIE*. – 2015. – Vol. 9533. – P. 95330L. DOI: 10.1117/12.2183429.
- [116] Khonina, S.N. Vortex phase transmission function as a factor to reduce the focal spot of high-aperture focusing system / S.N. Khonina, N.L. Kazanskiy, S.G. Volotovskiy // *Journal of Modern Optics*. – 2011. – Vol. 58(9). – P. 748-760. DOI:10.1080/09500340.2011.568710.
- [117] Khonina, S.N. Influence of vortex transmission phase function on intensity distribution in the focal area of high-aperture focusing system / S.N. Khonina, N.L. Kazanskiy, S.G. Volotovskiy // *Optical Memory and Neural Networks (Information Optics)*. – 2011. – Vol. 20(1). – P. 23-42. DOI: 10.3103/S1060992X11010024.
- [118] Khonina, S.N. Optical Vortices in a Fiber: Mode Division Multiplexing and Multimode Self-Imaging / S.N. Khonina, N.L. Kazanskiy, V.A. Soifer // In book “Recent Progress in Optical Fiber Research”. Edited by: M. Yasin, S.W. Harun, H. Arof – Publisher: InTech, Croatia, 2012. – P. 327-352.
- [119] Bezus, E.A. Design of diffractive lenses for focusing surface plasmons / E.A. Bezus, L.L. Doskolovich, N.L. Kazanskiy, V.A. Soifer, S.I. Kharitonov // *Journal of Optics*. – 2010. – Vol. 12(1). – P. 015001. DOI: 10.1088/2040-8978/12/1/015001.
- [120] Bezus, E.A. Scattering in elements of plasmon optics suppressed by two-layer dielectric structures / E.A. Bezus, L.L. Doskolovich, N.L. Kazanskiy, V.A. Soifer // *Technical Physics Letters*. – 2011. – Vol. 37(12). – P. 1091-1095. DOI: 10.1134/S1063785011120030.
- [121] Wang, R. Diffraction-Free Bloch Surface Waves / R. Wang, Y. Wang, D. Zhang, G. Si, L. Zhu, L. Du, S. Kou, R. Badugu, M. Rosenfeld, J. Lin, P. Wang, H. Ming, X. Yuan, J.R. Lakowicz // *ACS Nano*. – 2017. – Vol. 11(6). – P. 5383-5390.
- [122] Lyubopytov, V.S. Mathematical model of completely optical system for detection of mode propagation parameters in an optical fiber with few-mode operation for adaptive compensation of mode coupling / V.S. Lyubopytov, A.Z. Tlyavlin, A.Kh. Sultanov, V.Kh. Bagmanov, S.N. Khonina, S.V. Karpeev, N.L. Kazanskiy // *Computer Optics*. – 2013. – Vol. 37(3). – P. 352-359.
- [123] Lyubopytov, V.S. Modeling and Optimization of Vortex Modes Propagation in Rectangular Dielectric Waveguides / V.S. Lyubopytov, R.V. Kutluyarov, V.K. Bagmanov, N. Neumann, A.K. Sultanov // *IEEE Photonics Journal*. – 2020. – Vol. 12(1). – P. 8928615. DOI: 10.1109/JPHOT.2019.2958273.
- [124] Bagmanov, V.Kh. Optics-to-THz-conversion of vortex beams using nonlinear difference frequency generation / V.Kh. Bagmanov, A.K. Sultanov, A.R. Gizatulin, I.K. Meshkov, I.A.

- Kuk, E.P. Grakhova, G.I. Abdrakhmanova, I.L. Vinogradova // Computer Optics. – 2019. – Vol. 43(6). – P. 983-991. DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-6-983-991.
- [125] Lyubopytov, V.S. Method for determination of the principal modes in a few-mode optical fiber using a multibranch DOE / V.S. Lyubopytov, R.V. Kutluyarov, V.K. Bagmanov, A. Sultanov // Computer Optics. – 2014. – Vol. 38(4). – P. 727-736.

## Vortex optics

A.K. Sultanov<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Ufa State Aviation Technical University, K. Marx Street 12, Ufa, Russia, 450077

**Abstract.** In this review the author presents the major works, that according to his opinion have played a historically important part in the formation and development of one of the most mysterious sections of modern optics - vortex (or singular) optics. Singular optics studies the behavior of light in the areas where there is no light - at zeros of intensity. An optical vortex that has a topological charge and an orbital angular momentum propagates in space in such a way that the energy flow corkscrews in it. Such beams have the points of phase ambiguity (singularity) where the intensity is zero (intensity zeros). The distance between two intensity zeros can be arbitrarily small and it is not limited by the diffraction limit. The topological charge of optical vortices is the most stable characteristic, which is preserved during amplitude and simple phase distortions of the beam. The research of the scientific school of academician of RAS V.A. Soifer made a significant contribution to the formation and development of singular optics.