Задача расчета двух рефлекторов, формирующих световой пучок с плоским волновым фронтом из точечного источника

А.А. Мингазов[1], Л.Л. Досколович[1,2], Д.А. Быков[1,2]

[1]Самарский национальный исследовательский университет им. академика С.П. Королева, Московское шоссе 34А, Самара, Россия, 443086
[2]Институт систем обработки изображений РАН - филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН, Молодогвардейская 151, Самара, Россия, 443001

Аннотация. В статье рассматривается задача расчета оптического элемента из двух отражающих поверхностей, формирующего заданное распределение освещенности с плоским фронтом, при условии точечного источника света. Формулируется понятие слабого решения для данной задачи, а также устанавливается эквивалентность данной задачи и задачи перемещения масс Монжа-Канторовича с некоторой функцией стоимости.

1. Введение

Задача расчета оптического элемента из условия формирования заданного распределения освещенности в некоторой области относится классу обратных задач неизображающей оптики и является крайне вычислительно сложной.

Наиболее эффективные методы расчета, появившиеся в последние годы [1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 6, 11], используют переформулировку задач оптики в виде задачи перемещения масс Монжа-Канторовича с некоторой функцией стоимости. К сожалению, данный подход не является универсальным, и далеко не все задачи неизображающей оптики допускают переформулировку в виде задачи перемещения масс. В частности, такой переформулировки не имеет задача формирования заданного распределения освещенности в ближней зоне с помощью отражающего или преломляющего элемента. Тем не менее, некоторые подходы основанные на задаче перемещения масс возможны и в этих случаях [9, 10]. В диссертации [12] описаны известные на данный момент оптические элементы, задачу расчета которых можно свести к задаче перемещения масс с некоторой функцией стоимости.

Мы формулируем в качестве задачи перемещения масс не рассмотренную ранее задачу расчета оптического элемента из двух отражающих поверхностей, формирующего заданное распределение освещенности с плоским фронтом, при условии точечного источника света. Близкая постановка задачи, когда входящий световой пучок также имеет плоский фронт, рассматривалась в [3, 12], но результат, приведенный в данной статье, не является их следствием.

2. Формулировка задачи расчета преломляющего элемента

Рассмотрим трехмерное пространство $\mathbb{E}^3$ с координатами (x_1, x_2, z). Пусть $\mathcal{O}$ — начало координат, в котором расположен точечный источник света. Обозначим через $\mathbb{S}$ сферу единичного радиуса с центром в $\mathcal{O}$. Интенсивность источника света описывается функцией $I(s)$, $s \in \mathbb{S}$, заданной в области $G \subset \mathbb{S}$. Зададим две отражающих поверхности. Пусть первый рефлектор R_1 задается функцией $u_1(s)$, $s \in \mathbb{S}$, параметризованная координатами (s_1, s_2). Тогда

$$R_1 = \{u_1(s)s \mid s \in \mathbb{S}\}.$$

Зафиксируем некоторую плоскость $z = l$, (x_1, x_2) будем рассматривать как декартовы координаты на этой плоскости. Второй рефлектор R_2 будет задаваться функцией $u_2(x)$ следующим образом

$$R_2 = \{(x, z) \in \mathbb{E}^3 \mid z = l - u_2(x)\}.$$

Пара рефлекторов индуцирует отображение лучевого соответствия γ следующим образом. Луч, исходящий из источника в направлении s попадает в точку $u_1(s)s$ рефлектора R_1 и отражается первым рефлектором в направлении

$$t(s) = m - 2\big\langle s, n_1(s)\big\rangle n_1(s),$$

где $n_1(s)$ — нормаль к R_1 в точке $u_1(s)$. Далее луч исходящий из точки $u_1(s)s$ в направлении t порадает в некоторую точку $\big(x, l - u_2(x)\big)$ рефлектора R_2 и отражается в направлении

$$e(x) = t - 2\big\langle t, n_2(x)\big\rangle n_2(x),$$

где $n_2(x)$ — нормаль к R_2 в точке $\big(x, l - u_2(x)\big)$. Далее луч исходящий из точки $\big(x, l - u_2(x)\big)$ в направлении $e(x)$ попадает в некоторую точку плоскости $z = l$. Это отображение будем обозначать $\gamma\colon G \to D \subset \{z = l\}$.

Задача, которую мы рассматриваем, в классической постановке формулируется следующим образом. Пусть задано распределение интенсивности источника $I(s)$, $s \in G \subset \mathbb{S}$ и требуемое распределение освещенности $L(x)$ в области D плоскости $z = l$. Требуется найти такие дифференцируемые функции $\big(u_1(s), u_2(x)\big)$, чтобы выполнялись два условия:

1) Сформированное распределение освещенности имеет плоский фронт, параллельный плоскости $z = l$. В обозначениях выше это означает, что вектор $e(x)$ не зависит от точки и совпадает с $e = (0, 0, 1)$.

2) Отображение $\gamma\colon G \to D$ взаимно однозначно и удовлетворяет условию сохранения светового потока:

$$\int\limits_{\gamma^{-1}(B)} I(s)d\sigma = \int\limits_{B} L(x)dx, \tag{1}$$

где $B \subset D$ — произвольное борелевское подмножество, $d\sigma$ — элемент площади на сфере $\mathbb{S}$.

3. Связь с задачей перемещения масс

Для $s \in G \subset \mathbb{S}^2$, $x \in D$ будем называть функцией стоимости

$$\mathcal{K}(s, x) = \log\left(\frac{1}{4(L-l)^2} - \frac{L - \langle s, \eta\rangle}{2(L-l)\big(L^2 - l^2 - |x|^2\big)\big(1 - \langle s, e\rangle\big)}\right).$$

Задача о нахождении слабого решения оказывается эквивалентна задачи перемещения масс Монжа-Канторовича. Точная формулировка приведена в следующей теореме.

Теорема 1. *Определим на пространстве отображений* $P\colon G \to D$ *(возможно, определенных почти всюду), удовлетворяющих условию сохранения светового потока* (1), функционал

$$\mathcal{F}(P) = \int\limits_{G} \mathcal{K}(s, P(s)) I(s) d\sigma.$$

Если отображение γ минимизирует $\mathcal{F}$, то оно задается парой рефлекторов $(u_1(s), u_2(x))$.

4. Благодарности

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 18-07-00982 (в части вычисления оптического пути и нахождении функции стоимости $\mathcal{K}$) и гранта РНФ 18-19-00326 (в части формулировки задачи перемещения масс) и Министерства науки и высшего образования РФ в рамках выполнения работ по Государственному заданию ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН (соглашение 007-ГЗ/Ч3363/26).

5. Литература

[1] Glimm, T. Optical design of single reflector systems and the Monge–Kantorovich mass transfer problem / T. Glimm, V. Oliker // J. Math. Sci. – 2003. – Vol. 117(3). – P. 4096-4108.
[2] Wang, X.-J. On the design of a reflector antenna II // Calc. Var. – 2004. – Vol. 20(3). – P. 329-341.
[3] Glimm, T. Optical design of two-reflector systems, the Monge-Kantorovich mass transfer problem and Fermat's principle / T. Glimm, V.I. Oliker // Indiana University Mathematics Journal. – 2004. – Vol. 53(5). – P. 1255-1277.
[4] Rubinstein, J. Intensity control with a free-form lens / J. Rubinstein, G. Wolansky // Journal of the Optical Society of America A. – 2007. – Vol. 24(2). – P. 463-469.
[5] Doskolovich, L.L. Variational approach to calculation of light field eikonal function for illuminating a prescribed region / L.L. Doskolovich, A.A. Mingazov, D.A. Bykov, E.S. Andreev, E.A. Bezus // Optics Express. – 2017. – Vol. 25(22). – P. 26378-26392.
[6] Досколович, Л.Л. Вариационный подход к расчту функции эйконала / Л.Л. Досколович, А.А. Мингазов, Д.А. Быков, Е.С. Андреев // Компьютерная оптика. – 2018. – Т. 42, № 4. – С. 557-567.
[7] Doskolovich, L.L. Designing double freeform surfaces for collimated beam shaping with optimal mass transportation and linear assignment problems / L.L. Doskolovich, D.A. Bykov, E.S. Andreev, E.A. Bezus, V. Oliker // Optics Express. – 2018. – Vol. 26(19). – P. 24602-24613.
[8] Bykov, D.A. Linear assignment problem in the design of freeform refractive optical elements generating prescribed irradiance distributions / D.A. Bykov, L.L. Doskolovich, A.A. Mingazov, E.A. Bezus, N.L. Kazanskiy // Optics Express. – 2018. – Vol. 26(21). – P. 27812-27825.
[9] Graf, T. An optimal transport approach to near-field reflector problem in optical design / T. Graf, V. Oliker // Inverse Problems. – 2012. – Vol. 28. – P. 025001.
[10] Gutierrez, C.E. The near field refractor / C.E. Gutierrez, Q. Huang // Annales de l'Institut Henri Poincare (C) Non Linear Analysis. – 2014. – Vol. 31(4). – P. 655-684.
[11] Schwartzburg, Y. High-contrast computational caustic design / Y. Schwartzburg, R. Testuz, A. Tagliasacchi, M. Pauly // ACM Transactions on Graphics (TOG). – 2014. – Vol. 33(4).
[12] Yadav, N.K. Monge-Ampere problems with non-quadratic cost function: application to freeform optics // Eindhoven: Technische Universiteit Eindhoven, 2018. – P. 152.

The two reflector design problem for forming flat wavefront from a point source

A.A. Mingazov[1], L.L. Doskolovich[1,2], D.A. Bykov[1,2]

[1]Samara National Research University, Moskovskoe Shosse 34A, Samara, Russia, 443086
[2]Image Processing Systems Institute of RAS - Branch of the FSRC "Crystallography and Photonics" RAS, Molodogvardejskaya street 151, Samara, Russia, 443001

Abstract. The article deals with the problem of calculating of two reflecting surfaces which form a given distribution of illumination with a flat wavefront, provided that a point source of light is used. The notion of a weak solution for a given problem is formulated and it is proved the equivalence of this problem and the optimal mass tranfer problem.