Ф.П. Урывский, Е.М. Маркушин

РАСЧЕТ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ ПРИ ШЛИФОВАНИИ С ОХЛАЖДЕНИЕМ

Температурное поле, образующееся при шлифовании конструкционных материалов, оказывает решающее воздействие на качественные характеристики формируемого поверхностного слоя (прижоги, остаточные напряжения и т.д.).

Известные методы расчета указанных температурных полей базируются на фундаментальном решении уравнения теплопроводности и не учитывают влияния охлаждения вне зоны контакта инструмента и изделия.

В данной работе предложен метод расчета температурного поля с учетом охлаждения вне зоны контакта по закону Ньютона, предполагающий аналитичность искомого решения по коэффициенту теплоотдачи.

Пусть справедливы допущения:

1) теплофизические параметры обрабатываемой детали и инструмента постоянные;

2) глубина прогрева мала по сравнению с радиусом обрабатываемой детали.

В соответствии со вторым допущением вводим декартовую систему координат (x_1 , y_1), жестко связанную с обрабатываемой деталью.

Тогда искомое распределение температуры в подвижной системе координат (x_1 , y_1) удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y_1^2}\right), \tag{I}$$

где T - температура детали; a - коэффициент температуропроводности.

Рассмотрим неподвижную в пространстве систему координат ($\bar{x}$ $\bar{y}$), начало которой совпадает с исходной точкой зоны контакта.

Температурное поле в этой системе координат будет стационарным. Связь между подвижной и неподвижной системами координат определена равенствами

$$\bar{x} = x_1 + vt, \quad \bar{y} = y_1, \tag{2}$$

где v - скорость точки, лежащей на поверхности детали.

Уравнение (I) в неподвижной системе координат ($\bar{x}$, $\bar{y}$) запишется следующим образом:

$$v\frac{\partial T}{\partial \bar{x}} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \bar{y}^2}\right) \tag{3}$$

Но тогда решение рассматриваемой задачи приводит к вычислению функции $T(\bar{x}, \bar{y})\left[0 \leq \bar{x} \leq 2\pi R,\ \bar{y} \geq 0\right]$, удовлетворяющей уравнению (3) и граничному условию

$$-\lambda\frac{\partial T(\bar{x},0)}{\partial\bar{y}}=\begin{cases} q_1(\bar{x}), \text{ при } 0\leq\bar{x}\leq\ell;\\ -\alpha\left[T(\bar{x},0)-T_0\right]-T_0, \text{ при } \ell<\bar{x}\leq 2\pi R,\end{cases} \qquad (4)$$

где $q_1(\bar{x})$ - удельный тепловой поток в контактной зоне; λ - коэффициент теплопроводности обрабатываемой детали; α - коэффициент теплоотдачи; T_0 - температура среды; ℓ - длина дуги контакта; R - радиус обрабатываемой детали.

В безразмерных переменных

$$\theta=\frac{T-T_0}{T_0},\quad x=\frac{\bar{x}}{R},\quad y=\frac{\bar{y}}{R},\quad \delta=\frac{\ell}{R},$$

$$q(x)=\frac{Rq_1(\bar{x})}{\lambda T_0},\quad \mu=\frac{\alpha R}{\lambda}$$

рассматриваемая задача запишется в виде

$$\left.\begin{aligned} &Pe\frac{\partial\theta}{\partial x}=\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2};\\ &\frac{\partial\theta(x,0)}{\partial y}=\begin{cases}-q(x) \text{ при } 0\leq x\leq\delta;\\ \mu\,\theta(x,0) \text{ при } \delta<x\leq 2\pi,\end{cases}\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

где $Pe=\frac{vR}{a}$ - число Пекле.

Пусть справедливо разложение

$$\theta(x,y,\mu)=\theta_0(x,y)+\mu\theta_1(x,y)+\mu^2\theta(x,y)+\dots \qquad (6)$$

Тогда решение задачи (5) приводит к последовательному решению следующих задач

$$\left.\begin{aligned} &Pe\frac{\partial\theta_k}{\partial x}=\frac{\partial^2\theta_k}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta_k}{\partial y^2};\\ &\frac{\partial\theta_k(x,0)}{\partial y}=\begin{cases}0 \text{ при } 0\leq x\leq\delta;\\ \theta_{k-1}(x,0) \text{ при } \delta<x\leq 2\pi,\end{cases}\end{aligned}\right\}, \qquad (7)$$

$(k=1,2,\dots)$

где порождающая функция $\theta_0(x,y)$ является решением рассматриваемой задачи без учета охлаждения на внеконтактном участке

$$\left.\begin{aligned} &Pe\frac{\partial\theta_0}{\partial x}=\frac{\partial^2\theta_0}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta_0}{\partial y^2},\\ &\frac{\partial\theta_0(x,0)}{\partial y}=\begin{cases}-q(x) \text{ при } 0\leq x\leq\delta;\\ 0 \qquad \text{ при } \delta<x\leq 2\pi\end{cases}\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Рассмотрим конечную сумму частных решений уравнения теплопроводности

$$\theta_\kappa^N(x,y)=\sum_{n=1}^{N} e^{\beta_n y}\left[C_{1n}^\kappa \cos(\gamma_n y+nx)+C_{2n}^\kappa \sin(\gamma_n y+nx)\right], \quad (\kappa=1,2,\dots), \tag{9}$$

где

$$\beta_n=-n\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\left(1+\frac{Pe}{n}\right)^2}+1\right)};\quad \gamma_n=-\frac{Pe}{\sqrt{2\left(\sqrt{\left(1+\frac{Pe}{n}\right)^2}+1\right)}}. \tag{10}$$

Но тогда правую часть равенства

$$\frac{\partial\theta_\kappa^N(x,y)}{\partial y}=\sum_{n=1}^{N}\beta_n e^{\beta_n y}\left[C_{1n}^\kappa\cos(\gamma_n y+nx)+C_{2n}^\kappa \sin(\gamma_n y+nx)\right]+ \tag{11}$$

$$+\sum_{n=1}^{N} e^{\beta_n y}\left[-\gamma_n C_{1n}^\kappa \sin(\gamma_n y+nx)+\gamma_n C_{2n}^\kappa\cos(\gamma_n y+nx)\right]$$

при $y=0$ можно рассматривать как сумму первых N слагаемых ряда Фурье функции

$$\bar\theta_{\kappa-1}^N(x,0)=\begin{cases}0 & при\ 0\le x\le\delta;\\ \theta_{\kappa-1}^N(x,0) & при\ \delta<x\le 2\pi,\end{cases} \tag{12}$$

т.е.

$$\beta_n C_{1n}^\kappa+\gamma_n C_{2n}^\kappa=\frac{1}{\pi}\int_\delta^{2\pi}\theta_{\kappa-1}^N(x,0)\cos nx\,dx=\bar C_{1n}^{\kappa-1}; \tag{13}$$

$$-\gamma_n C_{1n}^\kappa+\beta_n C_{2n}^\kappa=\frac{1}{\pi}\int_\delta^{2\pi}\theta_{\kappa-1}^N(x,0)\sin nx\,dx=\bar C_{2n}^{\kappa-1}$$

Из равенств (13) находим

$$C_{1n}^\kappa=\frac{\beta_n\bar C_{1n}^{\kappa-1}-\gamma_n\bar C_{2n}^{\kappa-1}}{\beta_n^2+\gamma_n^2};\quad C_{2n}^\kappa=\frac{\beta_n\bar C_{2n}^{\kappa-1}+\gamma_n\bar C_{1n}^{\kappa-1}}{\beta_n^2+\gamma_n^2} \tag{14}$$

В соответствии с неравенством Бесселя

$$\sum_{n=1}^{N}\left\{\left[\beta_n C_{1n}^\kappa+\gamma_n C_{2n}^\kappa\right]^2+\left[-\gamma_n C_{1n}^\kappa+\beta_n C_{2n}^\kappa\right]^2\right\}= \tag{15}$$

$$=\sum_{n=1}^{N}\left\{\left[\bar C_{1n}^{\kappa-1}\right]^2+\left[\bar C_{2n}^{\kappa-1}\right]^2\right\}\le\frac{1}{\pi}\int_\delta^{2\pi}\theta_{\kappa-1}^{N^2}(x,0)\,dx.$$

Или

$$\sum_{n=1}^{N}\left[\left(C_{1n}^\kappa\right)^2+\left(C_{2n}^\kappa\right)^2\right]\left(\beta_n^2+\gamma_n^2\right)\le\frac{1}{\pi}\int_\delta^{2\pi}\theta_{\kappa-1}^{N^2}(x,0)\,dx\le\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\theta_{\kappa-1}^{N^2}(x,0)\,dx. \tag{16}$$

Полагая в равенстве (9) y =0 получим

$$\sum_{n=1}^{N}\left[\left(C_{1n}^{\kappa}\right)^2+\left(C_{2n}^{\kappa}\right)^2\right]=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\theta_\kappa^{N^2}(x,0)\,dx. \tag{17}$$

Из равенств (I0) следует неравенство

$$\beta_n^2+\gamma_n^2\geq n^2+\left(\frac{\rho_\ell}{2}\right)^2>\left(\frac{\rho_\ell}{2}\right)^2,\ (n=1,2,\ldots). \tag{18}$$

Но тогда из неравенства (I6) имеем

$$\sum_{n=1}^{N}\left[\left(C_{1n}^{\kappa}\right)^2+\left(C_{2n}^{\kappa}\right)^2\right]\leq\frac{4}{\rho_\ell^2\,\pi}\int_0^{2\pi}\theta_{\kappa-1}^{N^2}(x,0)\,dx,$$

или, в соответствии с равенством (I7),

$$\int_0^{2\pi}\theta_\kappa^{N^2}(x,0)\,dx\leq\frac{4}{\rho_\ell^2}\int_0^{2\pi}\theta_{\kappa-1}^{N^2}(x,0)\,dx. \tag{19}$$

Используя неравенство (I9) находим

$$\int_0^{2\pi}\theta_\kappa^{N^2}(x,0)\,dx\leq\left(\frac{4}{\rho_\ell^2}\right)^{\kappa H}\int_0^{\delta}q^2(x)\,dx. \tag{20}$$

Полученное неравенство не зависит от номера N

Далее, из равенств (I4) следует

$$\left|\sum_{n=1}^{N}\left[C_{1n}^{\kappa}\cos nx+C_{2n}^{\kappa}\sin nx\right]\right|\leq\left|\sum_{n=1}^{N}\bar{C}_{1n}^{\kappa-1}\frac{\beta_n\cos nx}{\beta_n^2+\gamma_n^2}\right|+$$

$$+\left|\sum_{n=1}^{N}\bar{C}_{2n}^{\kappa-1}\frac{\gamma_n\cos nx}{\beta_n^2+\gamma_n^2}\right|+\left|\sum_{n=1}^{N}\bar{C}_{1n}^{\kappa-1}\frac{\gamma_n\sin nx}{\beta_n^2+\gamma_n^2}\right|+ \tag{21}$$

$$+\left|\sum_{n=1}^{N}\bar{C}_{2n}^{\kappa-1}\frac{\beta_n\sin nx}{\beta_n^2+\gamma_n^2}\right|$$

В соответствии с неравенствами Гельдера для сумм [I] (p = p' = 2)получим

$$\left\|\theta_\kappa^N(x,0)\right\|_C<\frac{2\pi}{\sqrt{3\pi}}\left\|\theta_{\kappa-1}^N(x,0)\right\|_{L_2}, \tag{22}$$

где

$$\left\|\theta_\kappa^N(x,0)\right\|_C=\max_{0\leq x\leq 2\pi}\left|\theta_\kappa^N(x,0)\right|;\ \left\|\theta_{\kappa-1}^N(x,0)\right\|_{L_2}\left[\int_0^{2\pi}\theta_{\kappa-1}^{N^2}(x,0)\,dx\right]^{1/2}.$$

При выводе неравенства (22) использовались равенства (I0) и неравенство (I5). Так полагалось [2]

$$\sum_{n=1}^{N}\left|\frac{\gamma_n}{\beta_n^2+\gamma_n^2}\right|^2<\sum_{n=1}^{N}\left|\frac{\beta_n}{\beta_n^2+\gamma_n^2}\right|^2<\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Неравенство (22) тоже не зависит от выбора номера N.

Для реальных процессов шлифования

$$0<\mu<50,\qquad 200<\rho<6000.$$

Но тогда из неравенств (20) и (22) следует равномерная сходимость ряда (6) к решению рассматриваемой задачи.

Литература

1. Смирнов В.И. Курс высшей математики, т.У. ФМЛ, М.,1959.
2. Чезаро Э. Элементарный учебник алгебраического анализа и исчисления бесконечно малых. ОНТИ, М.-Л., 1936.

В.В. Якунин, Ф.С. Юнусов

К ВОПРОСУ ВЫБОРА ИНТЕНСИВНОЙ ЗОНЫ РЕЗАНИЯ В КОНТЕЙНЕРЕ ВИБРОАБРАЗИВНОЙ УСТАНОВКИ

Известно, что основными параметрами, влияющими на процесс виброабразивного шлифования являются: амплитуда a и частота ω, колебаний контейнера, продолжительность процесса t и высота загрузки h рабочей среды в контейнере.

С целью изучения динамики процесса виброабразивного шлифования и установления влияния указанных параметров на интенсивность обработки в различных зонах U - образного контейнера были проведены экспериментальные исследования на вибрационной 2-х компонентной установке. В процессе экспериментальных исследований a изменяли в пределах 1 - 5 мм, ω от 16 до 30 Гц, h от 1/3 до 2/3 объема контейнера и t до одного часа.

Цилиндрическая часть полуокружности контейнера условно была разделена на зоны с шагом α =30^0, в которых закреплялись образцы с размерами 30 х 25 х 3 мм из легированной стали 40 ХНМА. Обработка проводилась гранулами шлака от выплавки углеродистого феррохрома, размеры которых составляли 10 - 20 мм, при постоянной промывке абразивной массы. За качественную оценку интенсивности виброабразивного процесса была принята величина разности съема металла ΔP до и после обработки с образцов, расположенных в указанных зонах контейнера (рис.1). Взвешивание образцов проводилось на аналитических весах модели ВЛА-200 Г-М.

Из графиков (рис.1) видно, что с увеличением амплитуды и частоты колебаний контейнера величина съема металла увеличивается. Однако интенсивность съема металла выше при увеличении a, чем ω.