ИССЛЕДОВАНИЯ ПО АКУСТИКЕ, ЭЛЕКТРОФИЗИКЕ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКЕ
Межвузовский сборник, вып. I, 1974 год
КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ

С. М. ШИРОКОВ

МАТРИЧНЫЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ МНОГОМЕРНЫХ АВТОКОМПЕНСАЦИОННЫХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

При разработке автоматических информационно-измерительных систем, предназначенных для определения матричных и векторных параметров многосвязных объектов, первостепенное значение приобретает вопрос об обеспечении их устойчивости. Как известно, даже процесс уравновешивания обычного компенсатора переменного тока или моста для измерения комплексных сопротивлений не всегда устойчив.

Одним из видов многомерных измерительных систем являются системы, построенные на основе многомерной компенсационной цепи и предназначенные для определения автономных параметров электрических многополюсников методом сравнения [1, 2]. На рис. 1 показана обобщенная схема такой цепи. Ее основными элементами являются объект измерения X с автономными э. д. с. E_{x1}, E_{x2}, ..., E_{xn} эталонный многополюсник K с автономными э. д. с. E_{k1}, E_{k2}, ..., E_{kn}, измерительная схема $ИС$ и устройства уравновешивания $УУ$. Может быть построена также

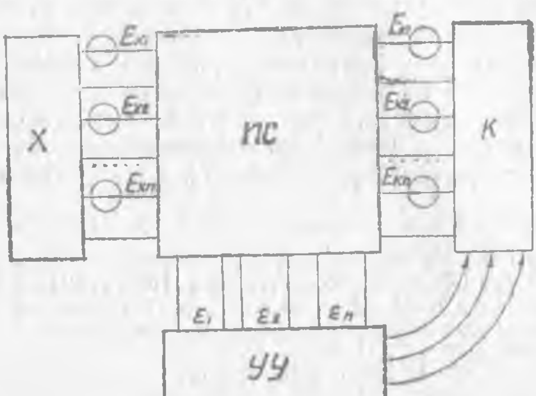

Рис. 1.

дуальная схема, содержащая автономные источники тока [1]. Как показано в [1], для многомерной компенсационной цепи справедливо матричное уравнение вида (обозначения здесь изменены)

$$\bar{\varepsilon} = S\bar{E}_k + CE_x, \tag{1}$$

где $\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)^{\text{т}}$ — вектор-столбец входных напряжений устройств уравновешивания;

$\bar{E}_x = (E_{x1}, E_{x2}, \ldots, E_{xn})^{\text{т}}$, $\bar{E}_k = (E_{k1}, E_{k2}, \ldots, E_{kn})^{\text{т}}$ — векторы упомянутых выше автономных э. д. с; S и C — квадратные матрицы порядка n, зависящие от параметров измерительной цепи; T — здесь и далее — знак транспонирования.

Элементы матрицы S

$$S_{\alpha\beta} = \frac{\partial\varepsilon_\alpha}{\partial E_{k\beta}} \quad (\alpha,\ \beta = 1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{2}$$

имеют смысл чувствительностей устройств уравновешивания к изменениям компенсирующих э. д. с.

Вид матрицы чувствительностей многомерной цепи сравнения определяет сходимость ее ручного уравновешивания. При чисто диагональной матрице чувствительностей процесс уравновешивания сходится за один цикл, без итераций [3]. Степень диагональности матрицы S существенно влияет также и на устойчивость автоматического уравновешивания цепи.

При автоматическом уравновешивании измерительная цепь вместе с устройствами уравновешивания представляет собой многосвязную следящую систему, описываемую матричным уравнением

$$\bar{E}_k(p) = [W_y^{-1}(p) - S(p)]^{-1} C(p)\, \bar{E}_x(p), \tag{3}$$

где $W_y(p)$ — передаточная матрица устройств уравновешивания.

Уравнение (3) получается из (1) с учетом соотношения

$$\bar{E}_k(p) = W_y(p)\,\bar{\varepsilon}(p). \tag{4}$$

Таким образом, передаточная матрица системы имеет вид

$$W(p) = [W_y^{-1}(p) - S(p)]^{-1} C(p), \tag{5}$$

а устойчивость системы определяется корнями характеристического уравнения [4]

$$\det [W_y^{-1}(p) - S(p)] = 0. \tag{6}$$

Если порядок передаточной матрицы, равный числу измеряемых параметров, не превосходит 2—3, легко раскрыть определитель (6), и записав характеристический полином в явном виде, исследовать устойчивость на основе известных критериев теории автоматического регулирования. Однако при больших порядках матриц этот метод становится крайне трудоемким и не позволяет получить результаты в обозримой и удобной для практического применения форме. Между тем знание точных границ области устойчивости часто не обязательно и вполне удовлетворительные результаты могут быть получены на основе достаточных признаков устойчивости.

Применение некоторых теорем теории матриц дает возможность указать области комплексной плоскости, в которых заведомо локализованы корни уравнения (6). Требование расположения этих областей в левой полуплоскости приводит к формулировке достаточных условий устойчивости. В частности, сравнительно простые оценки удается получить на основе критерия регулярности Адамара [5, 6].

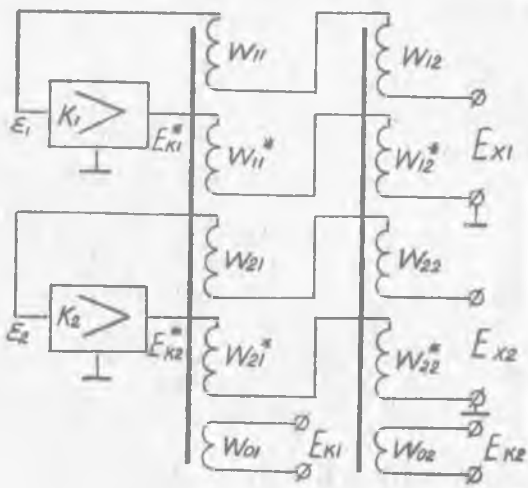

Рис. 2.

Более детально этот метод анализа целесообразно рассмотреть на примере конкретной системы. На рис. 2 приведена практическая схема многомерного автокомпенсационного устройства, предназначенного для совокупных измерений и построенного по принципам, изложенным в [2] (для простоты рисунка изображена схема двумерного устройства).

Автоматизация процесса уравновешивания осуществляется с помощью электронных усилителей $У_1$, $У_2$, ..., $У_n$. Матрица чувствительностей для этой компенсационной цепи, как следует из выведенных в [2] соотношений, определяется равенством

$$S = W W_0^{-1}, \tag{7}$$

где $W = [W\alpha\beta]_1{}^n$ — матрица чисел витков основных обмоток;
$W_0 = [W_0\alpha\alpha]_1{}^n$ — диагональная матрица чисел витков выходных обмоток.

В настоящее время доказано, что устойчивость многосвязной системы может быть обеспечена и при наличии перекрестных связей [4]. Однако в рассматриваемой системе требуется сохранение устойчивости при любых матрицах W и поэтому необходимо стремиться к устранению взаимосвязи контуров уравновешивания.

С этой целью выходные зажимы уравновешивающих усилителей подключены к системе компенсационных обмоток, аналогичной системе основных обмоток. Таким образом, в процессе уравновешивания изменяются не непосредственно э. д. с. $\overline{E}_к$, а некоторые другие э, д. с. $\overline{E}_к^*$ — такие, чтобы матрица, связывающая $E_к^*$ и ε, была близка к диагональной.

Передаточная функция устройств уравновешивания имеет вид:

$$W_y(p) = W_0 W^{*-1}[1 + R^*(pW^*Y_m W^{*\mathrm{т}})^{-1}]^{-1} K(p), \tag{8}$$

где $K(p)$, Y_m, R^* — соответственно диагональные матрицы передаточных функций усилителей, магнитных проводимостей сердечников и суммарных активных сопротивлений последовательно соединенных компенсационных обмоток; $W^* = [\dot{w}_{\alpha\beta}]_1{}^n$ — матрица чисел витков компенсационных обмоток.

Матрица чувствительностей цепи к уравновешивающим э. д. с. S^*, связывающая векторы $\overline{\varepsilon}$ и $\overline{E}_k^*$

$$\overline{\varepsilon} = S^* \overline{E_k}, \tag{9}$$

как ясно из сопоставления (1) и (4), определяется равенством

$$S^* = S_k W_y \tag{10}$$

или, с учетом (7) и (8),

$$S^*(p) = WW^{*-1}[1 + R^*(pW^*Y_m W^{*\mathrm{т}})^{-1}]^{-1} K(p). \tag{11}$$

Нетрудно заметить, что матрица $S^*(p)$ близка к диагональной, $S^*(p) \approx K(p)$, и, следовательно, взаимосвязь контуров уравновешивания сведена к минимуму при выборе чисел витков основных и соответствующих компенсационных обмоток пропорциональными или просто равными, $W^* = W$. При этом условии характеристическое уравнение системы (6) преобразуется к виду

$$\det[R^*(W^* Y_m W^{*\mathrm{т}})^{-1} - pK(p) + p1] = 0. \tag{12}$$

Примем для простоты, что все усилители имеют одинаковые передаточные функции и, таким образом, $K(p) = \kappa(p)$ — скалярная функция. В этом случае уравнение (12) аналогично спектральному (вековому) уравнению [Л. 6] для матрицы

$$A = R^*(W^*Y_m W^{*\mathrm{т}})^{-1}, \tag{13}$$

а его корни p определяются собственными числами λ этой матрицы:

$$p[k(p) - 1] = \lambda. \tag{14}$$

Областью устойчивости в плоскости λ является отображение на нее левой полуплоскости p в соответствии с (14). Зная вид $k(p)$, нетрудно построить границу области устойчивости обычным методом Д-разбиения, полагая в (14) $p=j\omega$ и изменяя ω в пределах от $-\infty$ до ∞. На рис. 3 показана область устойчивости для

$$k\,(p)=-k_{c}\,\frac{Tp}{Tp+1}, \tag{15}$$

где T — постоянная времени усилителя,

κ_c — его коэффициент усиления (при $\omega\rightarrow\infty$).

Для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы все собственные числа матрицы A располагались в области устойчивости. У матрицы вида (13) все собственные числа, как это следует из некоторых теорем для линейных операторов [Л. 6], вещественны и положительны, а так как максимальное из них не превосходит нормы A, а минимальное не меньше нормы обратной матрицы A^{-1}, все собственные числа локализованы на отрезке вещественной оси

$$\frac{\min\limits_{i} r_i}{y_m(n\cdot\max\limits_{i,j} w_{ij})^2}\leqslant\lambda\leqslant\frac{(\mathrm{cond}\ W)^2\max\limits_{i} r_i}{y_m\,(n\cdot\max\limits_{ij} w_{ij})^2}, \tag{16}$$

где const $W=\|W\|\cdot\|W^{-1}\|$ — число обусловленности матрицы W [Л. 6].

Из сопоставления расположения отрезка локализации собственных чисел и границы устойчивости следует, что устойчивость системы ухудшается с увеличением коэффициентов усиления k_c, постоянных времени усилителей T, магнитных проводимостей сердечников y_m и чисел витков w_{ij}, но улучшается с ростом активных сопротивлений обмоток. Минимальное расстояние отрезка $(\lambda_{min}, \lambda_{max})$ от кривой Д-разбиения является косвенной мерой степени устойчивости. В разработанном образце автокомпенсационного устройства по схеме рис. 2 устойчивость обеспечена до значений $k_c=100—200$. При этом погрешности статизма составляют доли процента.

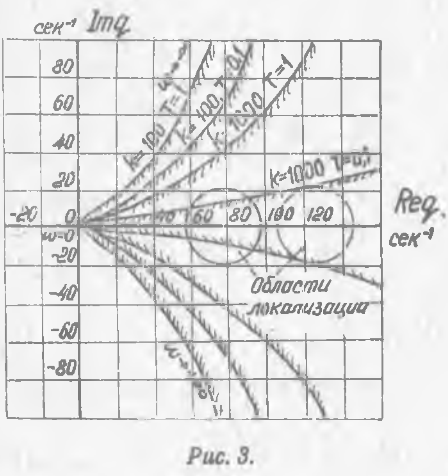

Рис. 3.

Описанный метод применим и в том случае, когда передаточные функции усилителей различны: для каждой из них необходимо построить отдельный годограф Д-разбиения.

Для более сложных устройств вид матрицы A может оказаться более общим, чем (13), а ее спектр — комплексным. В этих случаях следует пользоваться общими (но более грубыми) методами локализации спектра в кругах Гершгорина вокруг диагональных элементов (рис. 3), в овалах Кассини и т. п. [Л. 5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Лихтциндер Б. Я., Широков С. М. Многомерные дифференциальные и компенсационные электроизмерительные цепи. «Известия вузов» — «Приборостроение», № 8, 1970.
2. Широков С. М. Многомерные автокомпенсационные устройства для совокупных измерений. Настоящий сборник.
3. Лихтциндер Б. Я., Широков С. М. О сходимости процессов уравновешивания многомерных измерительных цепей сравнения. Труды КуАИ, вып. 44, «Исследования по акустике и радиоэлектронике», 1970.
4. Морозовский В. Т. Многосвязные системы автоматического регулирования «Энергия», М., 1970.
5. Пароди М. Локализация характеристических чисел матриц и ее применения. ИЛ., М., 1960.
6. Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. Физматгиз, М., 1963.