КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
Труды, вып. 44, 1970 г.
Исследования по акустике и радиоэлектронике

А. Д. БОЙКОВ, А. Н. ДМИТРИЕВ, Н. Д. ЕГУПОВ

МЕТОД РАСЧЕТА ВЫХОДНЫХ РЕАКЦИЙ И ИМПУЛЬСНЫХ ПЕРЕХОДНЫХ ФУНКЦИЙ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ, ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ КОТОРЫХ ИМЕЮТ ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ

Рассмотрим метод нахождения решения линейного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами. Пусть нестационарная система описывается дифференциальным уравнением вида:

$$a_n(t)\frac{d^n x_{\text{вых}}}{dt^n}+\cdots+a_0(t)\,x_{\text{вых}}(t)=b_m(t)\frac{d^m x_{\text{вх}}}{dt^m}+\cdots+b_0(t)\,x_{\text{вх}}(t). \quad (1)$$

Кроме того, предполагается, что процесс изменения коэффициентов дифференциального уравнения допускает аппроксимацию степенным рядом (например, ортогональными рядами Лежандра, Чебышева I и II рода, а если используется очень короткий интервал времени, то можно применить ряд Тейлора) на исследуемом интервале времени:

$$a_i(t)=a_{iN}\,t^N+a_{i,\,N-1}\,t^{N-1}+\cdots+a_{i1}\,t+a_{i0}, \quad (2)$$
$$i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n;$$

$$b_j(t)=b_{jk}\,t^k+b_{j,\,k-1}\,t^{k-1}+\cdots+b_{j1}\,t+b_{j0}, \quad (3)$$
$$j=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m.$$

Учитывая формулы (2) и (3) и предполагая для простоты, что процесс изменения коэффициентов $a_i(t)$ ($i=0, 1, 2, \ldots, n$) аппроксимируется одинаковым числом членов N, а коэффициентов $b_j(t)$ ($j=0, 1, 2, \ldots, m$) — k, получим

$$(a_{n0}+a_{n1}\,t+a_{n2}\,t^2+\cdots+a_{nN}\,t^N)\frac{d^n x_{\text{вых}}}{dt^n}+(a_{n-1,\,0}+a_{n-1,\,1}+\cdots$$

$$+ \cdots a_{n-1,N} t^N) \frac{d^{n-1} x_{\text{вых}}}{dt^{n-1}} + \cdots + (a_{00} + a_{01} t + \cdots + a_{0N} t^N) x_{\text{вых}} =$$

$$= (b_{m0} + b_{m1} t + \cdots + b_{mk} t^k) \frac{d^m x_{\text{вх}}}{dt^m} + (b_{m-1,0} + b_{m-1,1} t + \cdots$$

$$\cdots + b_{m-1,k} t^k) \frac{d^{m-1} x_{\text{вх}}}{dt^{m-1}} + \cdots + (b_{00} + b_{01} t + \cdots + b_{0k} t^k) x_{\text{вх}}. \qquad (4)$$

Применив к обеим частям уравнения (4) преобразование Лапласа и сгруппировав члены, имеем:

$$a_{n0} s^n + a_{n-1,0} s^{n-1} + \cdots + a_{00}) X_{\text{вых}}(s) - \frac{d}{ds} [(a_{n1} s^n + a_{n-1,1} s^{n-1} + \cdots$$

$$\cdots + a_{01}) X_{\text{вых}}(s)] + \frac{d^2}{ds^2} [(a_{n2} s^n + a_{n-1,2} s^{n-1} + \cdots + a_{02}) X_{\text{вых}}(s)] -$$

$$- \frac{d^3}{ds^3} [(a_{n3} s^n + a_{n-1,3} s^{n-1} + \cdots + a_{03}) X_{\text{вых}}(s)] + \cdots$$

$$\cdots + (-1)^N \frac{d^N}{ds^N} [(a_{nN} s^n + a_{n-1,N} s^{n-1} + \cdots + a_{0N}) X_{\text{вых}}(s)] =$$

$$= (b_{m0} s^m + b_{m-1,0} s^{m-1} + \cdots + b_{00}) X_{\text{вх}}(s) - \frac{d}{ds} [(b_{m1} s^m +$$

$$+ b_{m-1,1} s^{m-1} + \cdots + b_{01}) X_{\text{вх}}(s)] + \frac{d^2}{ds^2} [(b_{m2} s^m + b_{m-1,2} s^{m-1} + \cdots$$

$$\cdots + b_{02}) X_{\text{вх}}(s)] - \frac{d^3}{ds^3} [(b_{m3} s^m + b_{m-1,3} s^{m-1} + \cdots + b_{03}) X_{\text{вх}}(s)] + \cdots$$

$$\cdots + (-1)^k \frac{d^k}{ds^k} [(b_{mk} s^m + b_{m-1,k} s^{m-1} + \cdots + b_{0k}) X_{\text{вх}}(s)]. \qquad (5)$$

На основе формулы Ньютона—Лейбница о k-ой производной произведения двух функций, запишем:

$$\frac{d^k}{ds^k} [(b_{mk} s^m + b_{m-1,k} s^{m-1} + \cdots + b_{0k}) X_{\text{вх}}(s)] = B_k(s) X_{\text{вх}}^{(k)}(s) +$$

$$+ k B_k^{(1)}(s) X_{\text{вх}}^{(k-1)}(s) + \cdots + C_k^m B_k^{(m)}(s) X_{\text{вх}}^{(k-m)}(s) + \cdots + B_k^{(k)}(s) X_{\text{вх}}(s), \quad (6)$$

где $C_k^m = \frac{k!}{(k-m)!\, m!}$ — биномиальный коэффициент.

Учитывая формулу (6), уравнение (5) можно переписать в виде:

$$A_{10}(s) X_{\text{вых}}(s) + A_{11}(s) X_{\text{вых}}^{(1)}(s) + A_{12}(s) X_{\text{вых}}^{(2)}(s) + A_{13}(s) X_{\text{вых}}^{(3)}(s) + \cdots$$

$$\cdots + A_{1N}(s) X_{\text{вых}}^{(N)}(s) = B_{10}(s) X_{\text{вх}}(s) + B_{11}(s) X_{\text{вх}}^{(1)}(s) + B_{12}(s) X_{\text{вх}}^{(2)}(s) +$$

$$+ B_{13}(s) X_{\text{вх}}^{(3)}(s) + \cdots + B_{1k}(s) X_{\text{вх}}^{(k)}(s), \qquad (7)$$

где:

$$A_{10} = A_0(s) - A_1^{(1)}(s) - A_2^{(2)}(s) - A_3^{(3)}(s) + \cdots + (-1)^N A_N^{(N)}(s),$$

$$A_{11} = - A_1(s) + 2A_2^{(1)}(s) - 3A_3^{(2)}(s) + 4A_4^{(3)}(s) + \cdots$$
$$\cdots + (-1)^N C_N^{N-1} A_N^{(N-1)}(s),$$
$$A_{12} = A_2(s) - 3A_3^{(1)}(s) + 6A_4^{(2)}(s) - 10A_5^{(3)}(s) + \cdots + (-1)^N C_N^{N-2} A_N^{N-2}(s),$$

. . . .

$$A_{1N}(s) = (-1)^N A_N(s) \tag{8}$$

Аналогичные равенства можно записать для B_{1l}

$$(l = 0, 1, 2, \ \ldots \ , \ k)$$

В вышеприведенных формулах приняты следующие обозначения:

$$A_l^{(k)} = \frac{d^k}{ds^k} \left[a_{nl}\, s^n + a_{n-1,\,l}\, s^{n-1} + \cdots + a_{0l}\right], \tag{9}$$

$$B_l^k = \frac{d^k}{ds^k} \left[b_{ml}\, s^m + b_{m-1,\,l}\, s^{m-1} + \cdots + b_{0l}\right]. \tag{10}$$

Используя формулу

$$\left[\frac{d^m}{ds^m} X(s)\right] = (-1)^m \int\limits_0^\infty x(t)\, t^m e^{-st}\, dt, \tag{11}$$

уравнение (7) перепишем в виде:

$$A_{10}(s) \int\limits_0^\infty x_{\text{вых}}(t)\, e^{-st} dt - A_{11}(s) \int\limits_0^\infty t x_{\text{вых}}(t)\, e^{-st}\, dt +$$

$$+ A_{12}(s) \int\limits_0^\infty t^2 x_{\text{вых}}(t) e^{-st}\, dt + \cdots + (-1)^N A_{N0}(s) \int\limits_0^\infty t^N x_{\text{вых}}(t) e^{-st}\, dt =$$

$$= B_{10}(s) \int\limits_0^\infty x_{\text{вх}}(t)\, e^{-st} dt - B_{11}(s) \int\limits_0^\infty t x_{\text{вх}}(t)\, e^{-st} dt +$$

$$+ B_{12}(s) \int\limits_0^\infty t^2 x_{\text{вх}}(t) e^{-st}\, dt + \cdots + (-1)^k B_{k0}(s) \int\limits_0^\infty t^k x_{\text{вх}}(t)\, e^{-st}\, dt. \tag{12}$$

Комплексному аргументу s можно придавать действительные значения $s = 1, 2, 3 \ldots$ (если абсцисса абсолютной сходимости меньше единицы). Придавая s значения 1, 2, 3, ..., из уравнения (12) получим:

$$A_{10}(1)\, \alpha_0^1 - A_{11}(1)\, \alpha_1^1 + A_{12}(1)\, \alpha_2^1 + \cdots + (-1)^N A_{1N}(1)\, \alpha_N^1 = b(1),$$

$$A_{10}(2)\, \alpha_0^2 - A_{11}(2)\, \alpha_1^2 + A_{12}(2)\, \alpha_2^2 + \cdots + (-1)^N A_{1N}(2)\, \alpha_N^2 = b(2), \tag{13}$$

. . . .

где

$$\alpha_l^k = \int\limits_0^\infty t^l x_{\text{вых}}(t) e^{-kt}\, dt, \tag{14}$$

$$k = l = 1, 2, \ \ldots \ ,$$

$$b(\bar{k}) = B_{10}(\bar{k})\int_0^\infty x_{\text{вх}}(t)\, e^{-\bar{k}t}\,dt - B_{11}(\bar{k})\int_0^\infty t x_{\text{вх}}(t)\, e^{-\bar{k}t}\,dt +$$

$$+B_{12}(\bar{k})\int_0^\infty t^2 x_{\text{вх}}(t)\, e^{-\bar{k}t}\,dt + \cdots + (-1)^k B_{k0}(\bar{k})\int_0^\infty t^{\bar{k}}\, x_{\text{вх}}(t)\, e^{-\bar{k}t}\,dt.$$

Будем искать выходную реакцию в виде разложения в ряд по ортогональным функциям, т. е.

$$x_{\text{вых}}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(t). \tag{16}$$

Используя зависимость (16), можно выразить все значения α_c^k через неизвестные элементы ортогонального спектра выходного сигнала $x_{\text{вых}}(t)$ и соответствующие моменты ортогональных функций, т. е.

$$\alpha_l^k = \sum_{i=1}^{n} c_i \int_0^\infty t^l \varphi_i(t)\, e^{-kt}\,dt = \sum_{i=1}^{n} c_i \bar{\alpha}_{il}^k. \tag{17}$$

Для примера найдем алгоритм вычисления моментов $\bar{\alpha}_c^k$, если в качестве ортогонального базиса приняты функции:

$\varphi_1(t) = \sqrt{2}\, e^{-t}$,

$\varphi_2(t) = \sqrt{4}\,[-2e^{-t} + 3e^{-2t}]$,

$\varphi_3(t) = \sqrt{6}\,[3e^{-t} - 12e^{-2t} + 10e^{-3t}]$,

$\varphi_4(t) = \sqrt{8}\,[-4e^{-t} + 30e^{-2t} - 60e^{-3t} + 35e^{-4t}]$,

$\varphi_5(t) = \sqrt{10}\,[5e^{-t} - 60e^{-2t} + 210e^{-3t} - 280e^{-4t} + 126e^{-5t}]$,

$\varphi_6(t) = \sqrt{12}\,[-6e^{-t} + 105e^{-2t} - 560e^{-3t} + 1260e^{-4t} - 1260e^{-5t} + 462e^{-6t}]$,

$\varphi_7(t) = \sqrt{14}\,[7e^{-t} - 168e^{-2t} + 1260e^{-3t} - 4200e^{-4t} + 6930e^{-5t} - 5544e^{-6t} + 1716e^{-7t}]$,

. . . .

Как известно, эти функции обладают свойством ортонормальности:

$$\int_0^\infty \varphi_n(t)\,\varphi_m(t)\,dt = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n. \end{cases}$$

Используя формулу (17), получим общие выражения для моментов функций $\{\varphi_k(t)\}$:

$$\alpha_{1l}^k = \sqrt{2}\,\frac{l!}{(1+k)^{l+1}},$$

$$\alpha_{2l}^k = \sqrt{4}\left[-2\,\frac{l!}{(1+k)^{l+1}} + 3\,\frac{l!}{(2+k)^{l+1}}\right],$$

$$\alpha_{3l}^k = \sqrt{6}\left[3\,\frac{l!}{(1+k)^{l+1}} - 12\,\frac{l!}{(2+k)^{l+1}} + 10\,\frac{l!}{(3+k)^{l+1}}\right],$$

$$\chi^k_{4l} = \sqrt{8}\left[-4\frac{l!}{(1+k)^{l+1}} + 30\frac{l!}{(2+k)^{l+1}} - 60\frac{l!}{(3+k)^{l+1}} + \right.$$

$$\left. + 35\frac{l!}{(4+k)^{l+1}}\right], \qquad (18)$$

$$\chi^k_{5l} = \sqrt{10}\left[5\frac{l!}{(1+k)^{l+1}} - 60\frac{l!}{(2+k)^{l+1}} + 210\frac{l!}{(3+k)^{l+1}} - \right.$$

$$\left. - 280\frac{l!}{(4+k)^{l+1}} + 126\frac{l!}{(5+k)^{l+1}}\right],$$

$$\chi^k_{6l} = \sqrt{12}\left[-6\frac{l!}{(1+k)^{l+1}} + 105\frac{l!}{(2+k)^{l+1}} - 560\frac{l!}{(3+k)^{l+1}} + \right.$$

$$\left. + 1260\frac{l!}{(4+k)^{l+1}} - 1260\frac{l!}{(5+k)^{l+1}} + 462\frac{l!}{(6+k)^{l+1}}\right],$$

$$\chi^k_{7l} = \sqrt{14}\left[7\frac{l!}{(1+k)^{l+1}} - 168\frac{l!}{(2+k)^{l+1}} + 1260\frac{l!}{(3+k)^{l+1}} - \right.$$

$$- 4200\frac{l!}{(4+k)^{l+1}} + 6930\frac{l!}{(5+k)^{l+1}} - 5544\frac{l!}{(6+k)^{l+1}} +$$

$$\left. + 1716\frac{l!}{(7+k)^{l+1}}\right],$$

. . . .

Аналогичные формулы могут быть получены для любой ортогональной системы.

Подставляя (17) в (13), получим:

$$A_{10}(1)\sum_{i=1}^{n} c_i\,\alpha^1_{i0} - A_{11}(1)\sum_{i=1}^{n} c_i\,\alpha^1_{i1} + A_{12}(1)\sum_{i=1}^{n} c_i\,\alpha^1_{i2} + \cdots$$

$$\cdots + A_{1N}(1)(-1)^N\sum_{i=1}^{n} c_i\,\alpha^1_{iN} = b(1),$$

$$A_{10}(2)\sum_{i=1}^{n} c_i\,\alpha^2_{i0} - A_{11}(2)\sum_{i=1}^{n} c_i\,\alpha^2_{i1} + A_{12}(2)\sum_{i=1}^{n} c_i\,\alpha^2_{i2} + \cdots$$

$$\cdots + (-1)^N A_{1N}(2)\sum_{i=1}^{n} c_i\,\alpha^2_{iN} = b(2), \qquad (19)$$

. . . .

$$A_{10}(n)\sum_{i=1}^{n} c_i\,\alpha^n_{i0} - A_{11}(n)\sum_{i=1}^{n} c_i\,\alpha^n_{i1} + A_{12}(n)\sum_{i=1}^{n} c_i\,\alpha^n_{i2} + \cdots$$

$$\cdots + (-1)^N A_{1N}(n)\sum_{i=1}^{n} c_i\,\alpha^n_{iN} = b(n).$$

Группируя в системе (19) члены, имеем:

$$
\begin{gathered}
c_1 [A_{10}(1)\alpha_{10}^1 - A_{11}(1)\alpha_{11}^1 + A_{12}(1)\alpha_{12}^1 + \cdots + A_{1N}(1)(-1)^N\alpha_{1N}^1] + \\
+ c_2 [A_{10}(1)\alpha_{20}^1 - A_{11}(1)\alpha_{21}^1 + A_{22}(1)\alpha_{22}^1 + \cdots + (-1)^N A_{1N}(1)\alpha_{2N}^1] + \cdots \\
\cdots + c_n [A_{10}(1)\alpha_{n0}^1 - A_{11}(1)\alpha_{n1}^1 + A_{12}(1)\alpha_{n2}^1 + \cdots \\
\cdots + (-1)^N A_{1N}(1)\alpha_{nN}^1] = b(1); \\
c_1 [A_{10}(2)\alpha_{10}^2 - A_{11}(2)\alpha_{11}^2 + A_{12}(2)\alpha_{12}^2 + \cdots + (-1)^N A_{1N}(2)\alpha_{1N}^2] + \\
+ c_2 [A_{10}(2)\alpha_{20}^2 - A_{11}(2)\alpha_{21}^2 + A_{12}(2)\alpha_{22}^2 + \cdots + (-1)^N A_{1N}(2)\alpha_{2N}^2] + \cdots \\
\cdots + c_n [A_{10}(2)\alpha_{n0}^2 - A_{11}(2)\alpha_{n1}^2 + A_{12}(2)\alpha_{n2}^2 + \cdots \\
\cdots + (-1)^N A_{1N}(2)\alpha_{nN}^2] = b(2); \qquad (20) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
c_1 [A_{10}(n)\alpha_{10}^n - A_{11}(n)\alpha_{11}^n + A_{12}(n)\alpha_{12}^n + \cdots + (-1)^N A_{1N}(n)\alpha_{1N}^n] + \\
+ c_2 [A_{10}(n)\alpha_{20}^n - A_{11}(n)\alpha_{21}^n + A_{12}(n)\alpha_{22}^n + \cdots + (-1)^N A_{1N}(n)\alpha_{2N}^n] + \cdots \\
\cdots + c_n [A_{10}(n)\alpha_{n0}^n - A_{11}(n)\alpha_{n1}^n + A_{12}(n)\alpha_{n2}^n + \cdots \\
\cdots + (-1)^N A_{1N}(n)\alpha_{nN}^n] = b(n).
\end{gathered}
$$

Последнюю систему неоднородных линейных алгебраических уравнений можно записать в более компактной форме:

$$
\begin{gathered}
\tilde{a}_{11}c_1 + \tilde{a}_{12}c_2 + \tilde{a}_{13}c_3 + \cdots + \tilde{a}_{1n}c_n = b(1); \\
\tilde{a}_{21}c_1 + \tilde{a}_{22}c_2 + \tilde{a}_{23}c_3 + \cdots + \tilde{a}_{2n}c_n = b(2); \\
\tilde{a}_{31}c_1 + \tilde{a}_{32}c_2 + \tilde{a}_{33}c_3 + \cdots + \tilde{a}_{3n}c_n = b(3); \qquad (21) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\tilde{a}_{n1}c_1 + \tilde{a}_{n2}c_2 + \tilde{a}_{n3}c_3 + \cdots + \tilde{a}_{nn}c_n = b(n),
\end{gathered}
$$

где

$$\tilde{a}_{lk} = A_{10}(l)\alpha_{k0}^l - A_{11}(l)\alpha_{k1}^l + A_{12}(l)\alpha_{k2}^l + \cdots + (-1)^N A_{1N}(l)\alpha_{kN}^l, \qquad (22)$$

$b(k)$ — определяется формулой (15).

Для того, чтобы определить выходную реакцию нестационарной автоматической системы, описываемой дифференциальным уравнением (1) в виде ортогонального ряда

$$x_{\text{вых}}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(t) \qquad (23)$$

необходимо выполнить следующие операции:

1. По формуле (15) вычислить необходимое число $b(k)$.
2. Вычислить, используя формулу (22), значения коэффициентов.
3. Решить систему неоднородных алгебраических уравнений (21).
4. Построить выходную реакцию по формуле (23).

В [2] описаны некоторые методы решения дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, использующие последовательные приближения. В этом случае решение получается в виде ряда.

Однако обычно принято считать задачу решеной, если найдены операционные выражения для каждого члена ряда. Последний и обычно самый трудный шаг — переход от изображения к оригиналу не принимается во внимание. В связи с этим необходимо заметить, что процедура вычисления корней характеристического уравнения **для каждого члена ряда** (таких членов может оказаться достаточно много — до 4—5 и более, если требуется построить выходную реакцию с хорошей точностью в интервале $0<t<\infty$) является весьма трудоемкой.

Легко заметить, что при использовании метода последовательных приближений объем вычислительных работ увеличивается во много раз (грубо говоря, во столько раз, сколько членов ряда берется).

Однако надо заметить, что при вычислений каждого последующего ряда объем вычислительных работ растет по сравнению с объемом работ, необходимым для анализа стационарной системы.

Так же, как и классический метод перехода от изображения к оригиналу, метод последовательных приближений не поддается алгоритмизации и поэтому плохо приспособлен для реализации на ЦВМ.

Описанный же выше метод определения выходных реакций линейных нестационарных динамических систем удобен для программирования на ЦВМ, прост и надежен. Выходную реакцию можно получить с любой степенью точности. При этом обычно требуется $7\div8$ членов разложения, ошибка же при этом не превышает $5\div7\%$ от максимального значения.

Выводы

В работе разработан алгоритм расчета выходных реакций и импульсных переходных функций нестационарных систем автоматического управления, описываемых дифференциальными уравнениями с полиномиальными коэффициентами.

Предложенные алгоритмы хорошо приспособлены для реализации на цифровых вычислительных машинах.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. В. Солодовников, А. Н. Дмитриев, Н. Д. Егупов. Ортогональный метод анализа и синтеза линейных систем автоматического управления на основе понятия моментов. Сб. «Автоматическое управление и вычислительная техника», вып. 8, Машиностроение, 1968.

2. А. В. Солодов. Линейные системы автоматического управления с переменными параметрами, Физматгиз, 1962.

3. С. Качмаж, Г. Штейнгауз. Теория ортогональных рядов, Физматгиз, 1958.