КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
Труды, вып. 44, 1970 г.
Исследования по акустике и радиоэлектронике

Б. Я. ЛИХТЦИНДЕР, С. М. ШИРОКОВ

О СХОДИМОСТИ ПРОЦЕССОВ УРАВНОВЕШИВАНИЯ МНОГОМЕРНЫХ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ЦЕПЕЙ СРАВНЕНИЯ

В последнее время методы сравнения начинают широко применяться для измерения параметров многополюсников. Измерительные цепи, основанные на сравнении измеряемого многополюсника с эталонным, получили наименование многомерных измерительных цепей сравнения [1]. Структурная схема такой цепи представлена на рис. 1, где обозначено: X — измеряемый многополюсник; K — эталонный многополюсник; $И$ — многополюсник нуль-органов; $ИС$ — измерительная схема, рассматриваемая как многополюсник; $\dot{J}_{x1}$, $\dot{J}_{x2}$, ..., $\dot{J}_{a1}$, $\dot{J}_{a2}$ и т. п.— внутренние автономные источники тока соответствующих многополюсников, вынесенные за зажимы.

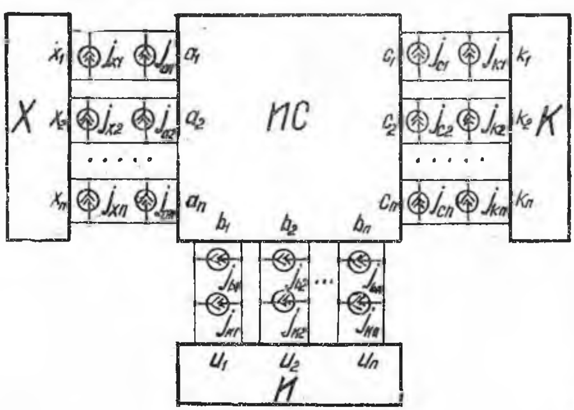

Рис. 1.

Показано [1], что при некоторых несущественных ограничениях матричное уравнение многомерной измерительной цепи сравнения, предназначенной для измерения пассивных параметров многополюсников — иммитансов, может быть записано в виде

$$\overline{U} = F(Y_x, Y_k)\overline{J}, \qquad (1)$$

где $\overline{U}$ — вектор напряжений на зажимах многополюсника нуль-органов (вектор невязок);

$$\overline{J}=\overline{J}_c+\overline{J}_k=-(\overline{J}_a+\overline{J}_x)=\begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_n \end{bmatrix}$$

— вектор токов, питающих схему;

$F(Y_x, Y_k)$ — функция от матриц адмитансов измеряемого и эталонного многополюсников, которая имеет вид [1]:

$$F(Y_x, Y_k)=\{Y_u+(Y_x^{-1}-Y_{ab}^{-1})^{-1}+(Y_k^{-1}-Y_{bc}^{-1})^{-1}+$$
$$+\left[Y_{bc}(Y_k-Y_{bc})^{-1}-Y_{ab}(Y_x-Y_{ab})^{-1}\right]\left[1-Y_{ac}(Y_x-Y_{ab})^{-1}-\right.$$
$$\left.Y_{ac}(Y_k-Y_{bc})^{-1}\right]^{-1}Y_{ac}\cdot\left[(Y_x-Y_{ab})^{-1}Y_{ab}-(Y_k-Y_{bc})^{-1}Y_{bc}\right]\}^{-1}\times$$
$$\times\left[Y_{bc}(Y_k-Y_{bc})^{-1}-Y_{ab}(Y_x-Y_{ab})^{-1}\right]\times$$
$$\times\left[1-Y_{ac}(Y_x-Y_{ab})^{-1}-Y_{ac}(Y_k-Y_{bc})^{-1}\right]^{-1}, \qquad (2)$$

где 1 — единичная матрица;

Y_x — матрица адмитансов (комплексных проводимостей) многополюсника X;

Y_k — матрица адмитансов многополюсника K;

$Y_и$ — матрица адмитансов многополюсника $И$;

Y_{ab}, Y_{bc}, Y_{ac} — диагональные матрицы адмитансов измерительной схемы.

Все указанные матрицы — квадратные, порядка n.

Под равновесием многомерной цепи сравнения понимают такое ее состояние, когда все напряжения на нуль-органах $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$ равны нулю при любых значениях питающих токов $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$, то есть $\overline{U}=0$ при всех J.

Используя выражения (1) и (2), легко показать, что при равновесии цепи искомая матрица Y_x связана с известной матрицей эталона Y_k простым матричным соотношением:

$$Y_x=Y_kY_{bc}^{-1}Y_{ab}, \qquad (3)$$

которое по форме записи аналогично условию равновесия обычного моста.

Возможны различные методы уравновешивания многомерной измерительной цепи. Одним из наиболее удобных является процесс уравновешивания, основанный на поочередном включении источников тока $j_1, j_2, \ldots, j_n$.

На первом шаге процесса уравновешивания включается только источник тока j_1, остальные $j_2=j_3=\ldots=j_n=0$. Напряжения небаланса (невязки) принимают значения $U_1^{(1)}, U_2^{(1)}, \ldots, U_n^{(1)}$. Нижние индексы соответствуют номеру нуль-органа, а верхние — порядковому номеру источника тока, питающего цепь. Поочередным изменением адмитансов эталона $y_{k11}, y_{k21}, \ldots, y_{kn1}$, то есть элементов первого столбца матрицы Y_k, добиваются обращения в нуль невязок $U_1^{(1)}$, $U_2^{(1)}, \ldots, U_n^{(1)}$ соответственно.

На втором шаге процесса включается ток j_2, $j_1=j_3=\ldots=j_n=0$. Возникают невязки $U_1^{(2)}, U_2^{(2)}, \ldots, U_n^{(2)}$. Изменяя элементы второго столбца матрицы Y_k, то есть адмитансы $y_{k12}, y_{k22}, \ldots, y_{kn2}$, обращают в нуль невязки $U_1^{(2)}, U_2^{(2)}, \ldots, U_n^{(2)}$, и т. д.

Наконец, на n-ом, последнем, шаге включается ток j_n и изменением адмитансов $y_{k1n}, y_{k2n}, \ldots, y_{knn}$ обращают в нуль невязки $U_1^{(n)}$, $U_2^{(n)}, \ldots, U_n^{(n)}$.

Выражение (1) является матричной записью системы из n уравнений с n^2 неизвестными адмитансами. Нетрудно видеть, что поочередному включению токов $j_1, j_2, \ldots, j_n$ соответствует расщепление каждого из указанных уравнений на n отдельных уравнений и процесс уравновешивания цепи описывается, таким образом, системой из n^2 уравнений с n^2 неизвестными:

$$\left.\begin{aligned}
&f_{11}(y_{k11}, y_{k21}, \ldots, y_{k\alpha\beta}, \ldots, y_{knn})\, j_1 = U_1^{(1)}\\
&f_{21}(y_{k11}, y_{k21}, \ldots, y_{k\alpha\beta}, \ldots, y_{knn})\, j_1 = U_2^{(1)}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&f_{\alpha\beta}(y_{k11}, y_{k21}, \ldots, y_{k\alpha\beta}, \ldots, y_{knn})\, j_\beta = U_\alpha^{(\beta)}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&f_{nn}(y_{k11}, y_{k21}, \ldots, y_{k\alpha\beta}, \ldots, y_{knn})\, j_n = U_n^{(n)}
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где

$f_{L\beta}(y_{k11}, y_{k21}, \ldots, y_{knn}$ $(\alpha\beta=1,2,\ldots,n)$ — элементы матрицы $F(Y_x, Y_k)$.

В общем случае каждое из напряжений небаланса $U_1, U_2, \ldots, U_n$ зависит от всех элементов матрицы Y_k. Поэтому в процессе поочередного уравновешивания цепи по каждому из параметров $y_{k11}, y_{k21}, \ldots, y_{knn}$ ранее скомпенсированные невязки отклоняются от нулевых равновесных значений и для достижения равновесия по всем невязкам необходимо многократное повторение описанного выше цикла процесса уравновешивания. При этом невязки могут как убывать (по модулю) от цикла к циклу, стремясь к нулю, так и возрастать, то есть процесс может быть как сходящимся, последовательно приближающим цепь к равновесию, так и расходящимся. Как известно, даже процесс уравновешивания обычного моста переменного тока не всегда сходится.

Г. Е. Пуховым разработан общий принципиальный подход к анализу сходимости при уравновешивании квазианалоговых моделей [2, 3]. С некоторыми изменениями методы Пухова могут быть с успехом распространены и на уравновешиваемые измерительные цепи.

В качестве математической модели с процессом уравновешивания цепи сопоставляется процесс решения уравнений цепи одним из итерационных методов, известных в вычислительной математике [4, 5]. Критерии сходимости итерационного метода определяют поведение процесса уравновешивания цепи.

Как описано выше, выбранный процесс уравновешивания основан на поочередном обращении в нуль невязок u_α^β подбором параметра $y_{k\,\alpha\beta}$ (α, $\beta=1, 2, ..., n$). Такой алгоритм уравновешивания соответствует решению уравнений цепи (4) (с нулевой правой частью) методом итераций по Некрасову [3, 5]. Сходимость метода Некрасова определяется свойствами эквивалентной матрицы якобиана нелинейной системы уравнений (4):

$$S = \frac{d(f_{11}, f_{21}, \ldots, f_{\alpha\beta}, \ldots, f_{nn})}{d(y_{k11}, y_{k21}, \ldots, y_{k\alpha\beta}, \ldots, y_{knn})} = \frac{d\left(U_1^{(1)}, U_2^{(1)}, \ldots, U_\alpha^{(\beta)}, \ldots, U_n^{(n)}\right)}{d(y_{k11}, y_{k21}, \ldots, y_{k\alpha\beta}, \ldots, y_{knn})} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial U_1^{(1)}}{\partial y_{k11}} & \frac{\partial U_1^{(1)}}{\partial y_{k21}} & \cdots & \frac{\partial U_1^{(1)}}{\partial y_{k\alpha\beta}} & \cdots & \frac{\partial U_1^{(1)}}{\partial y_{knn}} \\ \cdots & & & & & \\ \frac{\partial U_\alpha^{(\beta)}}{\partial y_{k11}} & \frac{\partial U_\alpha^{(\beta)}}{\partial y_{k21}} & \cdots & \frac{\partial U_\alpha^{(\beta)}}{\partial y_{k\alpha\beta}} & \cdots & \frac{\partial U_\alpha^{(\beta)}}{\partial y_{knn}} \\ \cdots & & & & & \\ \frac{\partial U_n^{(n)}}{\partial y_{k11}} & \frac{\partial U_n^{(n)}}{\partial y_{k21}} & \cdots & \frac{\partial U_n^{(n)}}{\partial y_{k\alpha\beta}} & \cdots & \frac{\partial U_n^{(n)}}{\partial y_{knn}} \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Сходимость обеспечена, если какая-либо из канонических норм [5] матрицы сходимости

$$P = I - D^{-1} S \tag{6}$$

меньше единицы:

$$\| P \| = \| I - D^{-1} S \| < 1, \tag{7}$$

где D — матрица диагональных элементов матрицы;

I — единичная матрица.

Нетрудно видеть, что элементы якобиана (5) имеют физический смысл чувствительностей нуль-органов к изменению параметров эталонного многополюсника (Y_k).

Всю матрицу S, естественно, рассматривать как матричную чувствительность многомерной цепи сравнения, обобщая тем самым понятие чувствительности обычной цепи сравнения (мостовой цепи).

Смысл условия сходимости (7) прост: достаточно, чтобы в матрице S диагональные элементы доминировали (по модулю), то есть превосходили сумму модулей остальных элементов соответствующей строки. Это означает, что каждый из нуль-органов α при включении тока j_β (α, $\beta=1, 2, ..., n$) должен, в основном, реагировать только на изменение одного, «своего» параметра $y_{k\alpha\beta}$ и очень мало — на изменение других параметров. В идеальном случае матрица S диагональная, $P=[0]$ и имеет место независимое уравновешивание цепи по каждому из параметров; процесс уравновешивания завершается за один цикл без итераций. В результате дифференцирования функции от матриц (1) и некоторых преобразований может быть получено аналитическое выражение для матричной чувствительности S и найдена матрица сходимости P. Оценка по норме матрицы P дает условия сходимости в виде системы неравенств:

$$\left.\begin{array}{l}\left|\dfrac{y_{ab\alpha}\, y_{n\alpha}}{y_{ab\alpha} - y_{n\alpha} + y_{bc\alpha}}\right| > 2\,\|Y_x\| \\ \left|y_{ac\alpha}\left(1 + \dfrac{y_{ab\alpha}}{y_{bc\alpha}}\right) + y_{ab\alpha}\right| > 2\,\|Y_x\|\end{array}\right\}, \tag{8}$$

где $y_{ab\alpha}$, $y_{bc\alpha}$, $y_{ac\alpha}\, y_{n\alpha}$ ($\alpha = 1, 2, \ldots, n$) — соответственно элементы матриц Y_{ab}, Y_{bc}, Y_{ac}, Y_n;, характеризующих измерительную цепь.

В частности, если все проводимости измерительности цепи чисто активны, удобно графически выделить область сходимости в плоскости относительных параметров измерительной цепи (рис. 2):

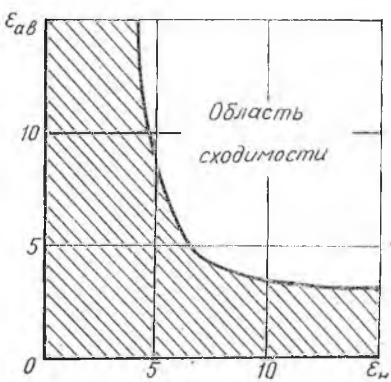

Рис. 2.

$$\varepsilon_n = \min_{\alpha} \frac{y_{n\alpha}}{\|Y_x\|};$$

$$\varepsilon_{ab} = \min_{\alpha} \frac{y_{ab\alpha}}{\|Y_x\|}.$$

Аналогичными методами может быть исследована сходимость процесса уравновешивания и при измерении комплексных сопротивлений многополюсника.

Процесс уравновешивания может быть организован и иначе, чем это рассмотрено выше. В частности, при автоматическом уравновешивании целесообразнее не поочередное, а одновременное изменение параметров на каждом шаге процесса. Такого рода процесс должен удовлетворять требованиям устойчивости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Ф. Куликовский, Б. Я. Лихтциндер. Многомерные электроизмерительные цепи сравнения. Симпозиум «Автоматизация научных исследований морей и океанов», ч. II, Севастополь, 1968.
2. Г. Е. Пухов. Избранные вопросы теории математических машин. АН УССР, Киев, 1964.
3. Г. Е. Пухов. Методы анализа и синтеза квазианалоговых электронных цепей. «Наукова думка», Киев, 1967.
4. Б. П. Демидович и И. А. Марон. Основы вычислительной математики. ФМ, 1963.
5. Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева. Вычислительные методы линейной алгебры, ФМ, 1963.