КУЙБЫШЕВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
Труды, вып. 44, 1970 г.
Исследования по акустике и радиоэлектронике

Г. В. АБРАМОВ, В. В. ПРОКУДИН

ОЦЕНКА АМПЛИТУДНЫХ И ФАЗОВЫХ НЕОДНОРОДНОСТЕЙ ПОЛЯ В БЛИЖНЕЙ ЗОНЕ СИНФАЗНО ВОЗБУЖДАЕМОЙ АПЕРТУРЫ

Для решения задачи о поле синфазно возбуждаемой апертуры необходимо применение методов математической теории дифракции плоской волны на отверстии.

В настоящее время имеются точные решения небольшого числа дифракционных задач, например, задач о дифракции на плоской щели, круглом диске, круглом отверстии в бесконечном экране и др.

Теория дифракции на больших отверстиях и на больших телах, размеры которых велики по сравнению с длиной волны, неизбежно должна основываться на тех или иных аппроксимациях, поскольку даже строгое решение не может быть непосредственно использовано для расчетов. Кроме того, при малой длине волны решение оказывается сильно осциллирующим, что затрудняет применение численных методов.

Задача о дифракции на отверстии произвольной формы (в частности, прямоугольной) вообще не поддается строгому решению с помощью известных в настоящее время методов математической теории дифракции [1].

Вычисление дифракционного поля вблизи отверстия оказывается еще более сложной задачей, которая приближенно решается для случая больших отверстий, когда применим метод физической оптики.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим скалярный вариант задачи об определении поля в ближней зоне синфазно возбуждаемой плоской апертуры.

Как известно, если в некоторой области V, ограниченной поверхностью S (рис. 1), задана скалярная функция Φ, удовлетворяюща волновому уравнению

$$\nabla^2 \Phi + k^2 \Phi = 0,$$

то значения Φ внутри области V связаны со значениями Φ и $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ на ограничивающей эту область поверхности S теоремой Грина [2

$$\Phi_p = \frac{1}{4\pi} \int\limits_s \left\{ \Phi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-jkR}}{R} \right) - \frac{\partial \Phi}{\partial n} \frac{e^{-jkR}}{R} \right\} dS,$$

где Φ_p — значение функции Φ в точке наблюдения P;

$\vec{n}$ — внешняя нормаль к поверхности S;

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число;

R — расстояние от элемента dS до точки P.

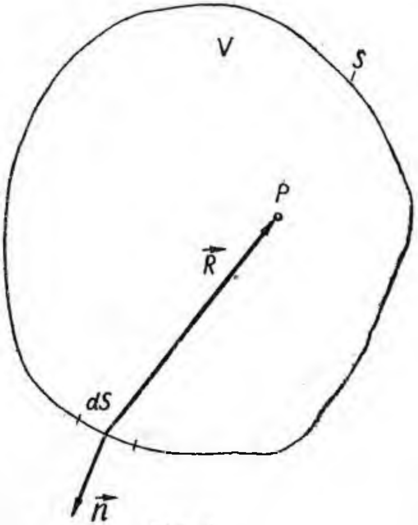

Рис. 1.

Для плоской апертуры качестве поверхности S возьм плоскость S_0, вплотную примык ющую к апертуре, и бесконечну полусферу, замыкающую ее. соответствии с принципом изл чения в (2) остается лишь инт грал по плоскости S_0. Сделае предположение, что в предела апертуры сформировано одноро ное поле, а всюду на плоскос S_0 вне апертуры поле отсутству то есть

$$\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0.$$

Однако математически непр вомерно полагать $\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$ каком-либо участке S, так ка если решение волнового ура нения вместе с производной на каком-либо участке равно нулю, т оно равно нулю всюду в области V.

Устраним указанную нестрогость, заменив вспомогательную функцию $\frac{e^{-jkR}}{R}$ в (2) функцией Грина G, для которой на поверхности S выполнялось бы условие $G = 0$. При этом отпадает необходимость определять $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ и указанное противоречие устраняется.

Для плоской поверхности можно взять

$$G = \frac{e^{jkR}}{R} - \frac{e^{-jkR_1}}{R_1},$$

где R_1 — расстояние от элемента dS до зеркального изображения точки наблюдения P относительно S_0. Тогда выражение (2) примет вид:

$$\Phi_p = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{S_0} \Phi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-jkR}}{R}\right) dS. \tag{3}$$

Поле апертуры произвольной формы в ближней зоне

Совместим с плоскостью апертуры плоскость XOY прямоугольной системы координат, направив ось Z внутрь области V. Начало координат совмещаем с проекцией точки наблюдения P на плоскость апертуры (рис. 2).

Учитывая, что $\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-jkR}}{R}\right) = -\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{e^{-jkR}}{R}\right)\frac{Z_0}{R}$, перепишем (2) в виде:

$$\Phi(\vec{R}_0) = -\frac{Z_0}{2\pi}\int\limits_{S_0} \frac{\Phi(\vec{r})}{R} \frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{e^{-jkR}}{R}\right) dS. \tag{4}$$

Здесь R_0 — радиус-вектор точки наблюдения относительно произвольной фиксированной точки на апертуре; r — радиус-вектор произвольной точки в плоскости S_0 относительно начала координат.

В качестве элемента dS возьмем площадку $rdrd\alpha$. Так как $R^2 = r^2 + z^2_0$, то $rdr = RdR$ и $dS = RdRd\alpha$. Тогда

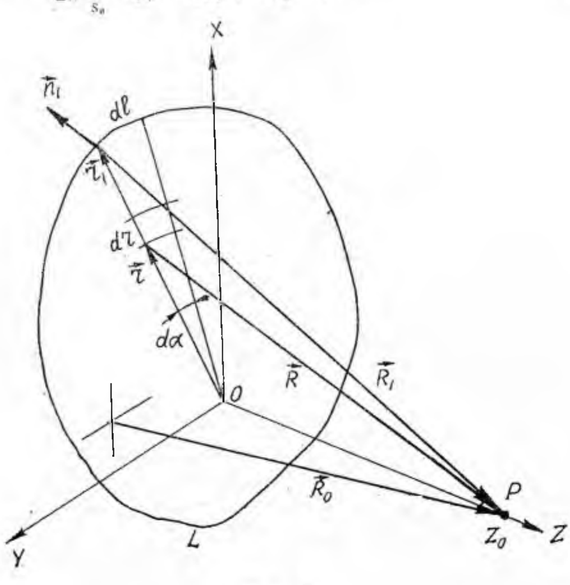

Рис. 2.

$$\Phi(\vec{R}_0) = -\frac{Z_0}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{Z_0}^{R_1} \Phi(\vec{r}) \times \frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{e^{-jkR}}{R}\right) dR\, d\alpha. \tag{5}$$

Считая, по условию, $\Phi(\vec{r}) = \text{const}$, окончательно получаем:

$$\Phi(\vec{R}_0) = \Phi(\vec{r})\, e^{-jkZ_0} - \frac{Z_0}{2\pi}\Phi(\vec{r})\int\limits_0^{2\pi}\frac{e^{-jkR_1}}{R_1}\,d\alpha.$$

Можно записать (6) и в другом виде, если подставить

$$d\alpha = \frac{dl\cos(\vec{n}_1\,\vec{r}_1)}{r_1}.$$

$$\Phi(\vec{R}_0) = \Phi(\vec{r})\, e^{-jkZ_0} - \frac{Z_0}{2\pi}\Phi(\vec{r})\int\limits_L \frac{e^{-jkR_1}}{R_1}\;\frac{\cos(\vec{n}_1\,\vec{r}_1)}{r_1}\,dl.$$

В этом выражении L — граница апертуры; $\vec{r}_1$ — текущий радиус-вектор границы апертуры относительно начала координат; $\vec{R}_1$ — радиус-вектор точки наблюдения относительно текущей точки на границе апертуры; $\vec{n}_1$ — нормаль к границе в плоскости апертуры.

Можно показать, что когда проекция точки наблюдения лежит вне апертуры, поле $\Phi(\vec{R}_0)$ определяется только вторым членом (7):

$$\Phi(\vec{R}_0) = -\frac{Z_0}{2\pi}\Phi(\vec{r})\int\limits_L \frac{e^{-jkR_1}}{R_1}\;\frac{\cos(\vec{n}_1\,\vec{r}_1)}{r_1}\,dl.$$

Возбуждение плоской апертуры сигналом произвольной формы

Формулы (2) $\div$ (8) справедливы в случае гармонического возбуждения плоской апертуры.

Если апертура возбуждается сигналом произвольной формы $\varphi(\vec{r},t)$, то в области V функция $\varphi(\vec{R}_0,t)$ удовлетворяет волновому уравнению

$$\nabla^2\varphi(\vec{R}_0, t) = \frac{1}{v^2}\;\frac{\partial^2\varphi(\vec{R}_0, t)}{\partial t^2},$$

где t — время;

v — скорость распространения волны.

Раскладывая $\varphi(\vec{R}_0,t)$ на гармонические составляющие

$$\Phi(\vec{R}_0, \omega) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi(\vec{R}_0, t)\, e^{-j\omega t}\,dt$$

и подставляя

$$\varphi(\vec{R}_0, t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Phi(\vec{R}_0, \omega)\, e^{j\omega t}\,d\omega$$

в уравнение (9), получаем снова уравнение (1):

$$\nabla^2\Phi(\vec{R}_0, \omega) + k^2\Phi(\vec{R}_0, \omega) = 0.$$

Следовательно, для каждой гармоники $\Phi(\vec{R}_0, \omega)$ можно применить теорему Грина

$$\Phi(\vec{R}_0, \omega) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{S_0} \Phi(\vec{r}, \omega)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{-jkR}}{R}\right) dS,$$

а затем определить $\varphi(\vec{R}_0, t)$ в соответствии с (11).

Подставляя в (11) $\Phi(\vec{R}_0, \omega) = \Phi(\vec{R}_0)$ из выражения (7) и учитывая, что $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v}$, получаем:

$$\varphi(\vec{R}_0, t) = \varphi\left(\vec{r}, t - \frac{Z_0}{v}\right) - \frac{Z_0}{2\pi}\int\limits_{L} \frac{\varphi\left(\vec{r}, t - \frac{R_1}{v}\right)}{R_1} \frac{\cos(\vec{n}_1 \vec{r}_1)}{r_1} dl. \quad (12)$$

АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Гармоническое возбуждение апертуры. Из рассмотрения выражений (6) и (7) следует, что поле $\Phi(\vec{R}_0)$ в любой точке над апертурой состоит из двух составляющих:
плоского поля

$$\Phi_{\text{пл}}(\vec{R}_0) = \Phi(\vec{r})\, e^{-jkZ_0} \quad (13)$$

и возмущающего поля

$$\Phi_{\text{в}}(\vec{R}_0) = -\frac{Z_0}{2\pi}\Phi(\vec{r})\int\limits_0^{2\pi} \frac{e^{-jkR_1}}{R_1} d\alpha, \quad (14)$$

идущего от краев апертуры.

Составляющая плоского поля не зависит от положения точки наблюдения, если ее проекция лежит в пределах раскрыва.

Возмущающее поле достигает максимума, когда все его составляющие, идущие от края апертуры, приходят в фазе. Это будет наблюдаться для круглой апертуры, если проекция точки наблюдения лежит в центре круга:

$$\Phi_{\text{в}\,\max}(\vec{R}_0) = -Z_0\,\Phi(\vec{r})\frac{e^{-jkR_1}}{R_1}.$$

Суммарное поле при этом определяется выражением

$$\Phi(\vec{R}_0) = \Phi(\vec{r})\, e^{-jkZ_0} - \frac{Z_0}{R_1}\Phi(\vec{r})\, e^{-jkR_1} = q\Phi(\vec{r})\, e^{-j(kZ_0 - \psi)}, \quad (15)$$

где

$$q = \sqrt{1 - 2\frac{Z_0}{R_1}\cos k(R_1 - Z_0) + \left(\frac{Z_0}{R_1}\right)^2} \quad (16)$$

множитель, определяющий амплитудную неравномерность поля, а

$$\psi = \operatorname{arctg} \frac{\frac{Z_0}{R_1} \sin k (R_1 - Z_0)}{1 - \frac{Z_0}{R_1} \cos k (R_1 - Z_0)} \tag{17}$$

определяет фазовую неравномерность поля.

Экстремальные значения амплитудного множителя определяются величинами

$$q_{\max} = 1 + \frac{Z_0}{R_1} = 1 + \frac{Z_0}{\sqrt{Z_0^2 + r_1^2}},$$

$$q_{\min} = 1 - \frac{Z_0}{R_1} = 1 - \frac{Z_0}{\sqrt{Z_0^2 + r_1^2}},$$

а фаза ψ не может превышать $\pm\frac{\pi}{2}$, причем с уменьшением расстояния Z_0 неравномерность поля должна уменьшаться.

Из приведенного анализа видно, что круглая апертура наиболее непригодна для получения равномерного поля. Все другие виды плоских апертур будут давать меньшую неравномерность поля. Для получения хороших результатов необходимо также по возможности устранить разрыв поля на краю апертуры. Это приведет к уменьшению возмущающей составляющей суммарного поля.

Импульсное возбуждение апертуры. Если плоская апертура возбуждается сигналом $\varphi(\vec{r}, t)$ произвольной формы, то поле $\varphi(\vec{R}_0, t)$ в любой точке пространства над апертурой, в соответствии с выражением (12), состоит из составляющей

$$\varphi_{\text{пл}}(\vec{R}_0, t) = \varphi\left(\vec{(r)}, t - \frac{Z_0}{v}\right),$$

обусловленной плоским полем, и бесконечного количества возмущающих составляющих того же вида:

$$\varphi_{\text{в}}(\vec{R}_0, t) = -\frac{Z_0}{2\pi} \int\limits_L \frac{\varphi\left(\vec{r}, t - \frac{R_1}{v}\right)}{R_1} \frac{\cos(\vec{n}_1 \vec{r}_1)}{r_1} dl.$$

Сдвиг по времени между составляющей плоского поля и какой-либо составляющей возмущающего поля равен

$$\Delta t = \frac{R_1 - Z_0}{v} = \frac{\sqrt{Z_0^2 + r_1^2} - Z_0}{v}.$$

Если сигнал $\varphi(\vec{r}, t)$ ограничен во времени, то возможно временное разделение плоского и возмущающего поля. Для этого длительность сигнала τ должна удовлетворять неравенству $\tau \leqslant \frac{R_1 - Z_0}{v}$.

Отсюда следует, что при достаточно коротких импульсах можно получить равномерное поле при любой форме апертуры, в том числе и круглой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Вайнштейн. Теория дифракции и метод факторизации, изд. «Советское радио», М, 1966.

2. Л. И. Потехин. Некоторые задачи дифракции электромагнитных волн, изд. «Советское радио», 1948.

3. Дж. Р. Менцер. Дифракция и рассеяние радиоволн, перевод с английского под редакцией Л. А. Вайнштейна. Изд. «Советское радио». М., 1958.