

В. Е. ШАТЕРНИКОВ

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕКТОРНОГО ПОТЕНЦИАЛА ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ КРУГОВОГО КОНТУРА С ТОКОМ ВБЛИЗИ ПРОВОДЯЩЕГО СФЕРОИДА

При разработке электромагнитных методов контроля, создании различных систем излучателей и приемников электромагнитных колебаний и индукционном нагреве часто возникает необходимость в расчете, исследовании поля кругового контура с током, расположенного вблизи электропроводящего тела, размеры которого соизмеримы с этим контуром. Как показал анализ наиболее часто встречающихся на практике случаев, достаточно общей является задача определения векторного потенциала электромагнитного поля системы: «Круговой контур с током  $I^{i\omega t}$  — электропроводящий сфероид». Как частные случаи поставленной задачи могут быть получены векторные потенциалы поля систем с телами, имеющими форму шара, цилиндра, круглой пластины конечной толщины, плоскости, диска с отверстием.

Рассмотрим решение задачи по определению векторного потенциала электромагнитного поля кругового контура с током, расположенного вблизи сплющенного проводящего сфероида

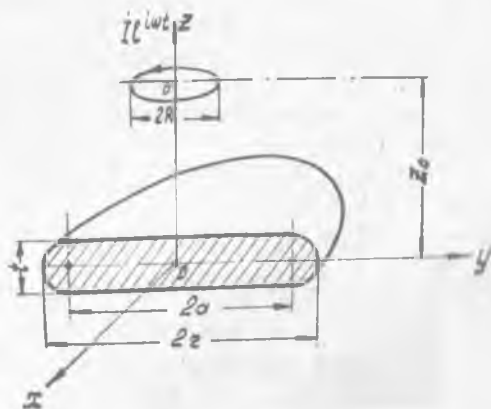


Рис. 1.

(рис. 1). Имея аналитическое решение для сплющенного сфероида, нетрудно трансформировать его для вытянутого сфероида, что позволит исследовать также влияние конечных размеров цилиндрических тел (трубы, прутки и т. д.) при электромагнитном контроле материалов и индукционном нагреве.

Для решения поставленной задачи выбираем систему координат сплющенного сфероида  $(\eta, \xi, \varphi)$ , связанную с декартовой соотношениями [1]:

$$z = a\eta\xi, \quad x = a\sqrt{(\xi^2 + 1)(1 - \eta^2)} \cdot \cos \varphi, \\ y = a\sqrt{(\xi^2 + 1)(1 - \eta^2)} \cdot \sin \varphi.$$

В этом случае граничные условия упрощаются и задача становится осесимметричной, а неоднородное уравнение Гельмгольца для изотропной среды, характеризующее рассматриваемую систему, сведется к дифференциальному уравнению в частных производных. Определив лапласиан от векторной функции  $\bar{A}$  в сфероидальных координатах и подставив его в исходное уравнение, получим:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[ (1 + \xi^2) \frac{\partial \dot{A}_\varphi}{\partial \xi} \right] + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ (1 - \eta^2) \frac{\partial \dot{A}_{\text{ср}}}{\partial \eta} \right] + \\ + \left( \frac{1}{1 + \xi^2} - \frac{1}{1 - \eta^2} - h^2 \xi^2 - h^2 \eta^2 \right) \dot{A}_\varphi = -\mu_0 \mu_1 j_{\text{ср}}, \quad (1)$$

где

$$j_{\text{ср}} = \frac{I \sqrt{(1 + \xi^2)(1 - \eta^2)}}{a^2 (\xi^2 + \eta^2)} \delta(\xi - \xi_0) \delta(\eta - \eta_0) \bar{a}_\varphi \quad (2)$$

— сторонний ток,  $\xi_0$  и  $\eta_0$  — координаты контура с током;  $\delta$  — функция Дирака;  $h^2 = -a^2 k^2$  — постоянный коэффициент;  $k^2 = -i\mu_0 \mu_2 \sigma_2 \omega$ ,  $\mu_2$  и  $\sigma_2$  — магнитная проницаемость и удельная электропроводность сфероида;  $\omega$  — круговая частота тока в контуре;  $\mu_1$  — магнитная проницаемость окружающей среды.

Исследование исходных уравнений для векторного потенциала вида (1) показало, что их можно решать с помощью общего метода интегрирования дифференциальных уравнений, допускающих разделение переменных.

Исходя из принципа суперпозиции, векторный потенциал поля вне сфероида ищем в виде [2]:

$$\bar{A}_1 = \bar{A}_0 + \bar{A}_p, \quad (3)$$

где  $\bar{A}_0$  — векторный потенциал от кругового контура с током в свободном пространстве;  $\bar{A}_p$  — вектор-потенциал, обусловленный реакцией проводящего сфероида. Значение  $\bar{A}_0$  определяется из решения уравнения (1) для  $h=0$  через функцию Грина, которая в сфероидальной системе координат равна:

$$G = \frac{2}{a} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \sum \varepsilon_m (m+1) \cdot \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \cdot \cos |m(\varphi - \varphi_0)|$$

$$P_n^m(\eta_0) P_n^m(\eta) \cdot \begin{cases} P_n^m(i\xi_0) Q_n^m(i\xi) & \xi > \xi_0 \\ P_n^m(i\xi) Q_n^m(i\xi_0) & \xi < \xi_0. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь  $P_n^m$  и  $Q_n^m$  — присоединенные функции Лежандра 1-го и 2-го рода,  $\varepsilon_m$  — множитель Неймана.

Вектор-потенциал  $\bar{A}_0$ , обусловленный сторонними токами, определяется выражением [2]:

$$\bar{A}_0 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V G j_{ct} dV = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} G j_{ct} h_\xi h_\eta \times \\ \times R \cos \varphi d\xi d\eta d\varphi. \quad (5)$$

Подставляя (4) в (5) и интегрируя с учетом ортогональности гармонических функций, получим:

$$\bar{A}_0 = -\bar{a}_\varphi i \frac{\mu_0 i R}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n^2(n+1)} = \\ = P_n^1(\eta_0) P_n^1(\eta) \begin{cases} P_n^1(i\xi_0) Q_n^1(i\xi) & \xi > \xi_0 \\ P_n^1(i\xi) Q_n^1(i\xi_0) & \xi < \xi_0. \end{cases} \quad (6)$$

Вектор-потенциал  $\bar{A}_p$  определяется из решения уравнения (1), когда правая часть равна нулю и коэффициент  $h=0$ . Ищем решение этого уравнения в виде:

$$\bar{A}_p = f_1(\xi) f_2(\eta) \bar{a}_\varphi. \quad (7)$$

Разделяя переменные, получим:

$$\frac{d}{d\xi} \left[ (1 + \xi^2) \frac{df_1(\xi)}{d\xi} \right] - \left[ n(n+1) - \frac{1}{1 + \xi^2} \right] f_1(\xi) = 0, \quad (8)$$

$$\frac{d}{d\eta} \left[ (1 - \eta^2) \frac{df_2(\eta)}{d\eta} \right] + \left[ n(n+1) - \frac{1}{1 - \eta^2} \right] f_2(\eta) = 0. \quad (9)$$

Здесь  $n=0, 1, 2, 3, \dots$  постоянная разделения. Частные решения этих уравнений имеют вид:

$$\begin{cases} f_{1n}(\xi) = B_n P_n^1(i\xi) + C_n Q_n^1(i\xi) \\ f_{2n}(\eta) = D_n P_n^1(\eta) + E_n Q_n^1(\eta). \end{cases} \quad (10)$$

Исходя из физического смысла, полагаем  $E_n=0$  и  $B_n=0$ , тогда общее решение получим как сумму всех частных:

$$\bar{A}_p = \bar{a}_\varphi \sum_{n=1}^{\infty} C_n P_n^1(\eta) Q_n^1(i\xi). \quad (11)$$

Для определения вектор-потенциала поля  $\bar{A}_2$  в проводящем

сфереоиде необходимо решить однородное уравнение Гельмгольца, получаемое из уравнения (1). Полагаем  $\bar{A}_2 = \bar{a}_\varphi \psi_1(\xi) \psi_2(\eta)$ , разделяя переменные, получим:

$$\frac{d}{d\eta} \left[ (1 - \eta^2) \frac{d\psi_2(\eta)}{d\eta} \right] + \left( N - h^2 \eta^2 - \frac{1}{1 - \eta^2} \right) \psi_2(\eta) = 0 \quad (12)$$

$$\frac{d}{d\xi} \left[ (1 + \xi^2) \frac{d\psi_1(\xi)}{d\xi} \right] - \left( N + h^2 \xi^2 - \frac{1}{1 + \xi^2} \right) \psi_1(\xi) = 0. \quad (13)$$

где  $N$  — постоянная разделения.

Функция  $\psi_2(\eta)$  может быть представлена рядом по функциям Лежандра [1]:

$$\psi_2(\eta) = \sum_n d_n P_{n+1}^1(\eta), \quad (14)$$

где последовательные коэффициенты « $d_n$ » связаны рекурсивной формулой:

$$\frac{n(n-1)h^2}{(2n+1)(2n-1)} d_{n-2} + \frac{(n+3)(n+4)h^2}{(2n+5)(2n+7)} d_{n+2} + \left[ \frac{2(n+1)(2+n)-2}{(2n+5)(2n+1)} h^2 + (n+1)(n+2) - N \right] d_n = 0. \quad (15)$$

Решение  $\psi_2(\eta)$  — конечное при  $\eta=1$  для большинства значений  $N$  будет бесконечным при  $\eta=-1$ . Рекурсивное уравнение (15) может быть решено методом непрерывных дробей. Сходимость ряда обеспечивается для дискретного ряда значениями постоянной разделения « $N$ ».

Так как имеются две последовательности конечных решений (с четными и нечетными « $n$ »), то, нумеруя каждую последовательность по возрастающим  $N$ , получим:

$$\psi_{2l}(\eta) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} d_{2n}(h, l) P_{2n+1}^1(\eta), & l=1, 3, 5, \dots \\ \sum_{n=0}^{\infty} d_{2n+1}(h, l) P_{2n+2}^1(\eta), & l=2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (16)$$

где входят коэффициенты  $N_l(h) < N_{l+1}(h)$ .

Функции  $\psi_{2l}(h)$  являются собственными функциями и при различных « $l$ » они взаимно-ортогональны. Аналогично находим решение уравнения (13):

$$\psi_{1l}(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_l} \sum_{n=0}^{\infty} d_{2n}(h, l) P_{2n+1}^1(i\xi), & l=1, 3, 5, \dots \\ \frac{1}{\lambda_l} \sum_{n=0}^{\infty} d_{2n+1}(h, l) P_{2n+2}^1(i\xi), & l=2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (17)$$

Тогда общее решение для  $\bar{A}_2$  можно представить как сумму произведений частных решений (12) и (13):

$$A_n = a_n \sum_{l=1}^{\infty} M_l \psi_{1l}(\xi) \psi_{2l}(\eta). \quad (18)$$

Для определения коэффициентов  $C_n$  и  $M_l$  используют граничные условия:

$$\begin{cases} \bar{A}_1 = \bar{A}_2 \\ \frac{1}{\mu_1} \frac{\partial (V\sqrt{1+\xi^2} \bar{A}_1)}{\partial \xi} = \frac{1}{\mu_2} \frac{\partial (V\sqrt{1+\xi^2} \bar{A}_2)}{\partial \xi}. \end{cases} \quad (19)$$

Из 1-го граничного условия с учетом ортогональности функции  $\psi_{2l}(\eta)$  получим:

$$\begin{aligned} M_l \psi_{2l}(\eta) \bar{\Lambda}_l(h) = & -\frac{i\mu_0 l R}{a} \sum_n \frac{2}{(n+1)(n+2)} d_n P_n^1(\eta') P_{n+1}^1(i\xi_0) \times \\ & \times Q_{n+1}^1(i\xi') + \sum_n C_n \frac{2(n+1)(n+2)}{(2n+3)} d_n Q_{n+1}^1(i\xi_0). \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь в сумму включаются только члены с четным « $n$ », если « $l$ » — четное, и с нечетным, если « $l$ » — нечетное.

$\Lambda_l(h) = \sum_n (d_n(h, l))^2 \cdot \frac{2(n+1)(n+2)}{2n+3}$  — нормирующая постоянная.

Из 2-го граничного условия будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_2} M_l K_l(h, \xi^1) \Lambda_l(h) = & -\frac{i l R}{a} \sum_n \frac{2}{(n+1)(n+2)} \times \\ & \times d_n P_{n+1}^1(\eta') Q_{n+1}^1(i\xi') F_{n+1}(i\xi') + \\ & + \frac{1}{\mu_1} \sum_n C_n \frac{2(n+1)(n+2)}{2n+3} d_n \Phi_{n+1}(i\xi_0), \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} K_l &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ V\sqrt{1+\xi^2} \psi_1(h, \xi) \right]_{\xi=\xi_0} \\ F_{n+1} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ V\sqrt{1+\xi^2} P_{n+1}^1(i, \xi) \right]_{\xi=\xi_0} \\ \Phi_{n+1} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ V\sqrt{1+\xi^2} Q_{n+1}^1(i\xi) \right]_{\xi=\xi_0} \end{aligned}$$

Решая совместно выражения (20) и (21), получим для разных « $l$ » систему уравнений, из которой определяются коэффициенты  $C_n$

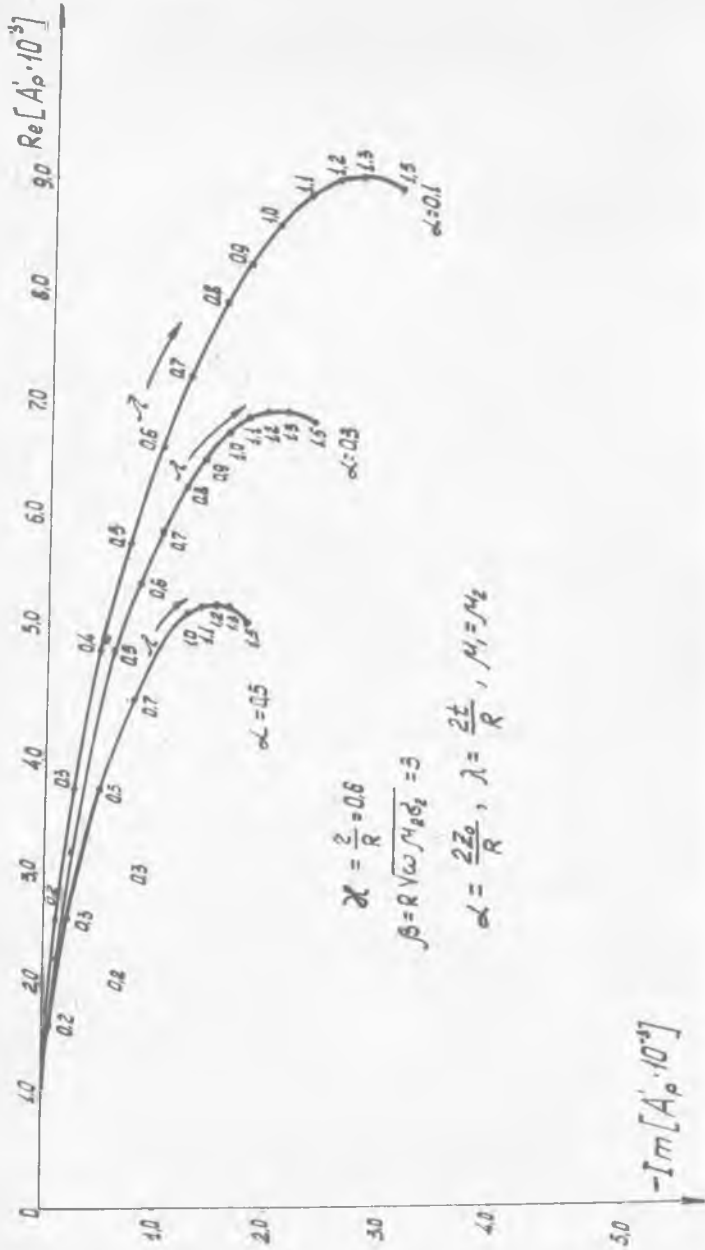


Рис. 7

$$\sum_n^1 C_n \frac{2(n+1)(2+n)}{(2n+3)} d_n \left[ \frac{K_1}{\psi_{11}(\xi_0)} Q_{n+1}^1(i\xi_0) - \frac{\mu_2}{\mu_1} \Phi_{n+1}(i\xi_0) \right] = \sum_n^1 - \frac{i\mu_0/R}{a} + \frac{2}{(n+1)(n+2)} \times \\ \times d_n P_{n+1}^1(\gamma_1') Q_{n+1}^1(i\xi') \left[ F_{n+1}(i\xi_0) \frac{\mu_2}{\mu_1} - \frac{K_1}{\psi_{11}(\xi_0)} P_{n+1}^1(i\xi_0) \right], \quad (22)$$

Для нахождения коэффициентов  $C_n$  из полученной системы уравнений необходимо исследовать вопрос о сходимости бесконечного ряда по функциям Лежандра 1-го и 2-го рода. Известно, что если длина волны намного больше размеров сфероида, то ряды сходятся очень быстро. Численный анализ показал, что в этом случае вполне достаточно просуммировать четыре первых члена бесконечного ряда, при этом погрешность составит не более 1% во всей области изменения независимых переменных.

Прежде чем решать систему уравнений (22) относительно коэффициентов  $C_n$ , необходимо из рекурсивного уравнения (15) определить коэффициенты  $d_n$ , которые вычисляются только после нахождения значений постоянной разделения  $N_l$ . Однако точное решение уравнения (15) весьма затруднительно, поэтому применяют приближенные методы (например, используют метод Баукампа). После того как определены коэффициенты  $C_n$ ,  $M_l$  и  $d_n$ , используя выражения (6), (11) и (18), определяют вектор-потенциалы  $\bar{A}_1$  и  $\bar{A}_2$  соответственно для диэлектрического пространства и проводящего сплюснутого сфероида.

Зная вектор-потенциал поля по известным соотношениям [2], можно рассчитать составляющие напряженности электромагнитного поля, построить картину, определить вносимые параметры для вихретоковых датчиков или потери в деталях при индукционном нагреве.

На рис. 2 представлены расчетные годографы изменения относительного вектор-потенциала  $\bar{A}_p'$ , обусловленного реакцией проводящего сплюсненного сфероида. Результаты расчета подтверждаются экспериментом, максимальная погрешность составляет около 10%.

Таким образом, решена задача по расчету электромагнитного поля наиболее общей распространенной системы: «виток-электропроводящий магнитный сфероид». Предложенный метод расчета позволяет определить основные закономерности распределения электромагнитного поля для различных электромагнитных и радиотехнических устройств.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Арфкен. «Математические методы в физике». Москва, «Атомиздат», 1970.
2. Г. П. Морс, Х. Фешбах. «Методы теоретической физики», Москва, Изд-во П. Л., 1970.