

Г. В. АБРАМОВ, Л. А. НАЗАРОВА

**РАСЧЕТ ФУНКЦИЙ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ  
ИНТЕНСИВНОСТИ И ФАЗЫ УЛЬТРАЗВУКОВОГО ПОЛЯ  
В РАСКРЫВЕ ПЛОСКО-ВОГНУТЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЛИНЗ  
И РЕФЛЕКТОРОВ ПРИ ОБЛУЧЕНИИ ИЗОТРОПНЫМ ИЗЛУЧАТЕЛЕМ**

Известно [1], что в результате фокусирования ультразвуковых волн при помощи плоско-вогнутых эллиптических линз и рефлекторов образуются сходящиеся сферические и цилиндрические волновые фронты с неравномерным распределением интенсивности. Описание этого распределения при помощи специальных функций позволяет облегчить вычисление интенсивности ультразвукового поля в фокальной плоскости концентратора [2]. Из соображений геометрической оптики следует, что все устройства, способные фокусировать ультразвук, могут быть применены и для решения обратной задачи — получения квазиплоского поля.

Наша задача заключается в отыскании функций распределения интенсивности и фазы ультразвукового поля в раскрыве плоско-вогнутых эллиптических линз и рефлекторов. Влиянием неточности изготовления профиля оптической поверхности на функции распределения пренебрегаем. Расчет функций распределения производится при условии, что размеры плоско-вогнутой эллиптической линзы и рефлектора значительно превышают длину волны, то есть методом геометрической оптики.

Задача нахождения функции распределения просто решается для рефлекторных систем. Для рефлекторов, даже таких простых, как плоско-вогнутая эллиптическая линза, функция распределения строится приближенно. Это объясняется тем, что при выводе функции распределения для линзы необходимо учитывать изменение интенсивности по волновому фронту, происходящее как вследствие изменения сечения энергетических трубок при трансформации волнового фронта, так и вследствие прохождения ультразвуковой

энергии через границу раздела различных сред. Поэтому функция распределения зависит и от отношения волновых сопротивлений сред и от показателя преломления на преломляющих границах раздела.

Функция распределения интенсивности ультразвукового поля в раскрыве плоско-вогнутой эллиптической линзы определяется сле-

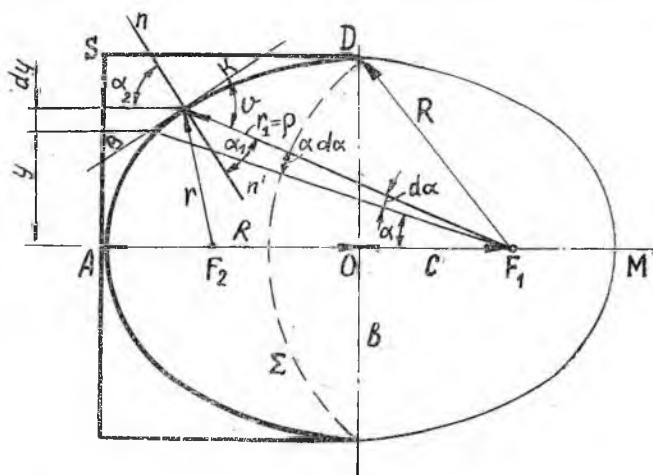


Рис. 1. К расчету функции распределения интенсивности ультразвукового поля в раскрыве плоско-вогнутой эллиптической линзы

дующими факторами:

- изменением сечения энергетических трубок в падающей и преломленной волнах;
- прохождением через преломляющую границу раздела;
- прохождением через плоскую границу раздела;
- затуханием при распространении в среде и материале линзы.

Рассмотрим изменение интенсивности, обусловленное различными сечениями энергетических трубок в падающей и преломленных волнах. В то время, как падающая сферическая волна изотропного излучателя образует на некоторой поверхности  $\Sigma$  (рис. 1) с центром в геометрическом фокусе энергетическую трубку с сечением  $ada$  (где  $a$  — радиус кривизны поверхности  $\Sigma$ ), преломленная волна состоит из элементарных энергетических трубок сечением  $dy$ . Сечения трубок обратно пропорциональны интенсивностям, поэтому для функции распределения интенсивности справедливо выражение:

$$\psi_1(\alpha) = \frac{ada}{dy}. \quad (1)$$

Из рис. 1

$$y = \rho \sin \alpha, \quad (2)$$

поэтому

$$\psi_1(\alpha) = \frac{a}{\frac{d\rho}{d\alpha} \sin \alpha + \rho \cos \alpha} \quad (3)$$

Положим для плоско-вогнутой эллиптической линзы  $a = DF_1$ . При этом вычисленные функции распределения  $\psi_1(\alpha)$  будут справедливы для линз с любым центральным углом  $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$ .

Определим величину  $a = DF_1$ . Из геометрических соотношений (рис. 1)  $a = R$ , и радиус кривизны вспомогательной поверхности  $\Sigma$  совпадает с величиной большой полуоси эллиптической поверхности.

Фокальный радиус — вектор эллиптической поверхности запишем в виде:

$$\begin{aligned} \rho = r_1 &= \frac{\frac{b^2}{R}}{1 - n \cos \alpha} = \\ &= \frac{R(1 - n^2)}{1 - n \cos \alpha}. \end{aligned} \quad (4)$$

Подставив выражение (4) в формулу (3), получим

$$\psi_1(\alpha) = \frac{(1 - n \cos \alpha)^2}{(1 - n^2)(\cos \alpha - n)}. \quad (5)$$

Заметим, что выражение (5) справедливо лишь при малых  $n$ . Если  $n = 0$ , то

$$\psi_1(\alpha) = \frac{1}{\cos \alpha}. \quad (5a)$$

Это предельное выражение является общим для плоско-вогнутых эллиптических линз.

На рис. 2 показаны графики функции распределения, построенные при помощи выражения (5) для значений  $n$  и  $m$ , приведенных в таблице 1.

Кривая (5) построена по формуле (5a) для  $n = 0$ .

Цифры у кривых на рис. 2 и последующих графиках соответствуют номерам материалов в таблице 1.

Из графиков рис. 2 видно, что неравномерность распределения интенсивности по волновому фронту с ростом  $n$  и  $m$  увеличивается при условии, что в фокусе линзы находится изотропный излучатель.

Вычислим коэффициент прохождения через преломляющую

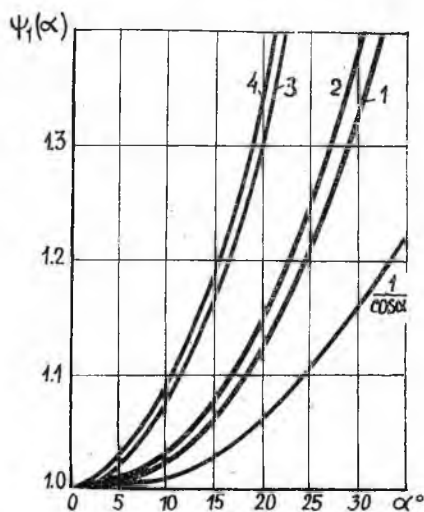


Рис. 2. График функции

№ п/п	Материал линзы	$C \cdot 10^{-5}, \frac{см}{сек}$	$Z \cdot 10^{-5}, \frac{ом}{см}$	$n$	$m$
1	Алюминий . . . . .	6,32	13,70	0,23	0,104
2	Латунь . . . . .	4,43	40,40	0,32	0,035
3	Плексиглас . . . . .	2,63	3,14	0,54	0,435
4	Полистирол . . . . .	2,35	2,49	0,61	0,574

границу раздела. Общее выражение для коэффициента прохождения энергии преломленной волны [3] имеет вид:

$$\psi_2(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{4z_1 z_2 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2}{(z_1 \cos \alpha_2 + z_2 \cos \alpha_1)^2}, \quad (6)$$

где  $z$  — волновое сопротивление среды;  
 $z_2$  — волновое сопротивление материала линзы;  
 $\alpha_1$  — угол падения;  
 $\alpha_2$  — угол преломления.

Выразим углы падения ( $\alpha_1$ ) и преломления ( $\alpha_2$ ) через текущий угол раскрытия  $\alpha$  и угол  $\nu$  между полярным радиусом и касательной ВК (рис. 1):

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} - \nu, \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \nu + \alpha.$$

Подставив найденные значения  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  в (6) и введя величину  $m = \frac{z_1}{z_2}$ , получим:

$$\psi_2(\alpha, \nu) = \frac{4m \frac{\sin(\nu - \alpha)}{\sin \nu}}{\left[1 + m \frac{\sin(\nu - \alpha)}{\sin \nu}\right]^2}. \quad (7)$$

В этом выражении  $\nu = f(\alpha)$ . Для того, чтобы установить эту зависимость, воспользуемся выражением, которое связывает угол  $\nu$  с элементами эллипса:

$$\sin^3 \nu = \frac{R \cdot b \cdot P}{(r_1 \cdot r_2)^{3/2}}. \quad (8)$$

Величину  $r_2$  определяем аналогично  $r_1$ :

$$r_2 = \frac{(1 - n^2)}{1 - n \cos(2\nu - \alpha)}. \quad (9)$$

Подставив выражения (4), (9) в формулу (8), получим:

$$\sin^2 \nu = \frac{(1 - n \cos \alpha) [1 - n \cos(2\nu - \alpha)]}{1 - n^2}. \quad (10)$$

Если  $\alpha$  и  $n$  — параметры, то выражение (10) представляет трансцендентное уравнение относительно  $\nu$ . Задаваясь значением  $n$

на табл. 1 и изменяя  $\alpha$  в пределах от  $0^\circ$  до величины угла раскрытия волнового фронта, можно графически найти величины  $v$ , получив зависимость  $v=f(\alpha)$  (рис. 3).

Из рис. 3 видно, что при малой величине  $n$  зависимость  $v$  от  $\alpha$  слабая, угол  $v$  близок к  $\frac{\pi}{2}$  и эллиптическая поверхность линзы мало отличается от сферической.

При  $n=0$ ,  $v=\frac{\pi}{2}$  при любых значениях  $\alpha$  (прямая 5, рис. 3).

Коэффициент прохождения энергии через плоскую границу раздела записывается [3] в виде

$$\psi_3 = \frac{4z_1 z_2}{(z_1 + z_2)^2}. \quad (11)$$

Выражение (11) не зависит от текущего угла  $\alpha$  раскрытия линзы. Коэффициент прохождения энергии характеризуется отношением волновых сопротивлений сред, поэтому выражение (11) перепишем:

$$\psi_3 = \frac{4m}{(1+m)^2}. \quad (11a)$$

Получим теперь функцию распределения, которая учитывает как коэффициент прохождения энергии через границы раздела (преломляющую и плоскую), так и изменение сечения энергетических трубок. Для этого нужно перемножить выражения (5), (7) и (11a):

$$\begin{aligned} \psi(\alpha) &= \psi_1(\alpha) \cdot \psi_2(\alpha) \cdot \psi_3 = \\ &= \frac{(1-n \cos \alpha)^2}{(1-n^2)(\cos \alpha - n)} \cdot \frac{4m \sin(v-\alpha)}{\sin v} \cdot \frac{4m}{(1+m)^2} = \\ &= \frac{16m^2}{(1+m)^2} \cdot \frac{\sin(v-\alpha)}{\sin v} \cdot \frac{(1-n \cos \alpha)^2}{(1-n^2)(\cos \alpha - n)} \cdot \frac{1}{\left[1+m \frac{\sin(v-\alpha)}{\sin v}\right]^2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Затухание при распространении в среде и материале линзы учитывает множитель  $B(\alpha)$ , который равен [5]:

$$B(\alpha) = 10^{-0,1 \left[ K_{cp} f \frac{1-n}{1-n \cos \alpha} + K_{л} f \frac{1-\cos \alpha}{1-n \cos \alpha} \right]}, \quad (13)$$

где  $K_{cp}$  — коэффициент затухания в среде;

$K_{л}$  — коэффициент затухания в материале линзы.

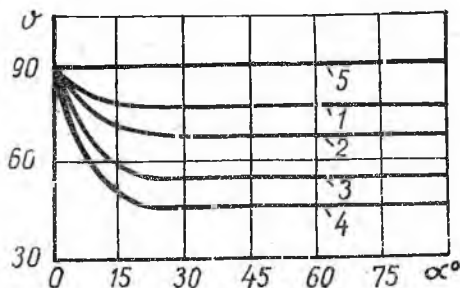


Рис. 3. График функции

Таким образом, функция распределения интенсивности ультразвукового поля в раскрыве линзы имеет вид:

$$\psi(\alpha) = \frac{16m^2}{(1+m)^2} \cdot \frac{\sin(\nu - \alpha)}{\sin \nu} \cdot \frac{(1 - n \cos \alpha)^2}{(1 - n^2)(\cos \alpha - n)} \cdot \left[ 1 + m \frac{\sin(\nu - \alpha)}{\sin \nu} \right]^2 \times \\ \times 10^{-0,1} \left[ K_{\text{ср}} f \frac{1-n}{1-n \cos \alpha} + K_n f \frac{1-\cos \alpha}{1-n \cos \alpha} \right] \quad (14)$$

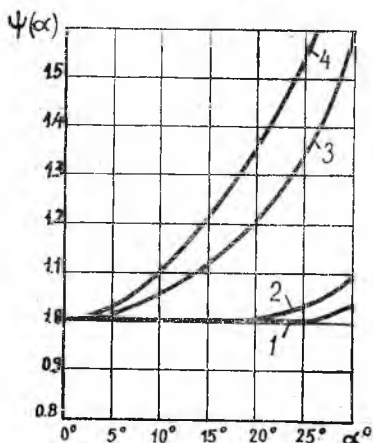


Рис. 4. График функции распределения интенсивности ультразвукового поля в раскрыве плоско-вогнутой эллиптической линзы

На рис. 4 показаны графики функции распределения интенсивности в раскрыве плоско-вогнутых эллиптических линз, построенные при помощи выражения (14), для материалов, приведенных в таблице 1.

Из графиков видно, что с ростом  $n$  и  $m$  неравномерность распределения интенсивности по волновому фронту увеличивается. Если волновое сопротивление материала линзы и среды одинаково, то  $m=1$  и выражение (14) приобретает вид:

$$\psi(\alpha) = 4 \frac{\sin(\nu - \alpha)}{(1 - n^2)(\cos \alpha - n)} \times \\ \times \frac{(1 - n \cos \alpha)^2}{\left[ 1 + \frac{\sin(\nu - \alpha)}{\sin \nu} \right]^2} \times \\ \times 10^{-0,1} \left[ K_{\text{ср}} f \frac{1-n}{1-n \cos \alpha} + K_n f \frac{1-\cos \alpha}{1-n \cos \alpha} \right] \quad (15)$$

Если линза «просветлена» (4) и ее показатель преломления мал, то, считая  $m \approx 1$ ,  $n=0$ , из выражения (15) получим:

$$\psi(\alpha) = \frac{1}{(1 + \cos \alpha)^2} \quad (16)$$

Рассмотрим искажение фазового фронта, происходящее вследствие неполной прозрачности линзы\*.

Если принять амплитуду падающей волны за единицу, то потенциал прошедшей волны примет вид (1)

$$\Phi = \frac{\cos(kx \pm \omega t + kl - \epsilon)}{\sqrt{\cos^2 k_1 l + \frac{1}{4} \left( m + \frac{1}{m} \right)^2 \sin^2 k_1 l}} \quad (17)$$

\* Под прозрачностью понимают отношение прошедшей через линзу звуковой энергии ко всей энергии, упавшей на поверхность линзы.

где  $k = \frac{\omega}{c}$  — волновое число в среде;

$k_1 = \frac{\omega}{c_1}$  — волновое число в материале линзы;

$l$  — толщина линзы в данной точке;

$$\varepsilon = \text{arctg} \left[ \frac{1}{2} \left( m + \frac{1}{m} \right) \text{tg} k_1 l \right]. \quad (18)$$

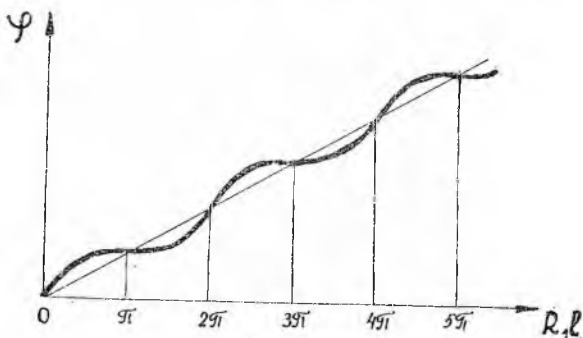


Рис. 5. График зависимости сдвига фазы от толщины линзы

Введем обозначение:  $a = \frac{1}{2} \left( m + \frac{1}{m} \right)$  и перепишем уравнение (17), используя (16):

$$\mathcal{D} = \frac{\cos(kx + \omega t + kl - \varepsilon)}{\sqrt{\cos^2 k_1 l + a^2 \sin^2 k_1 l}}. \quad (17a)$$

Из формулы (17a) видно, что набег фазы при прохождении через линзу

$$\varphi = k \cdot l - \text{arctg}(a \cdot \text{tg} k_1 \cdot l) \quad (19)$$

не пропорционален толщине, а является более сложной ее функцией. Следовательно, фазовый фронт волны, вышедшей из линзы, будет иметь расчетную форму только в том случае, когда  $a=1$ , то есть в случае идеальной прозрачности. Во всех других случаях фазовый фронт будет модулирован из поверхности.

Выделим из (19) часть, пропорциональную толщине:

$$\varphi = l(k - k_1) - \text{arctg}(a \text{tg} k_1 l) + k_1 l = l(k - k_1) - \psi.$$

Величина  $\psi$  будет определять искажение фазового фронта:

$$\psi = \text{arctg}(a \text{tg} k_1 l) - k_1 l = \text{arctg} \frac{(a-1) \text{tg} k_1 l}{1 + a \text{tg}^2 k_1 l}. \quad (20)$$

На рис. 5 показан ход кривой  $\varphi = \varphi(k_1, l)$ . Из рис. 5 видно, что при  $k_1 l = n\pi$   $\psi = 0$ , то есть в точках полной прозрачности фазовые искажения отсутствуют.

Определим точки, где фазовые искажения максимальны. Обозначим  $k_1 l$  через  $z$ , тогда

$$\frac{d\psi}{dz} = \frac{(a-1)(1-a \operatorname{tg}^2 z_m)}{1+a^2 \operatorname{tg}^2 z_m}.$$

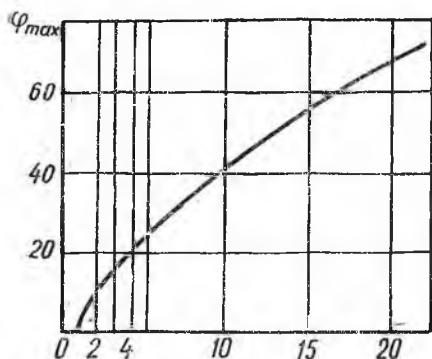


Рис. 6. График зависимости величины максимальной фазовой ошибки от отношения волновых сопротивлений материала линзы и среды

Откуда

$$\operatorname{tg} z_m = \pm \frac{1}{\sqrt{a}}$$

и

$$z_m = \operatorname{arctg} \pm \frac{1}{\sqrt{a}} + n\pi.$$

Подставив это значение в (20), получим величину наибольшей фазовой ошибки  $\psi_{\max}$

$$\psi_{\max} = \pm \operatorname{arctg} \frac{a-1}{2\sqrt{a}}$$

или

$$\psi_{\max} = \pm \operatorname{arctg} \frac{\frac{1}{2} \left( m + \frac{1}{m} \right) - 1}{\sqrt{8 \left( m + \frac{1}{m} \right)}}.$$

На рис. 6 показана зависимость величины максимальной фазовой ошибки  $\psi_{\max}$  от отношения волновых сопротивлений материала линзы и среды.

Определим функцию распределения интенсивности квазиплоского ультразвукового поля, создаваемого рефлектором. Примем интенсивность падающей сферической волны, исходящей из источника, помещенного в главный фокус системы, за единицу. Эта сферическая волна отражается от зеркала таким образом, что на выходе системы в плоскости  $S_1$  получается плоская волна (рис. 7). В этой волне интенсивность распределена неравномерно, так как одинаковые участки сферического волнового фронта трансформируются в участки плоского фронта, различные по величине, в зависимости от их положения по отношению к оси системы. После отражения

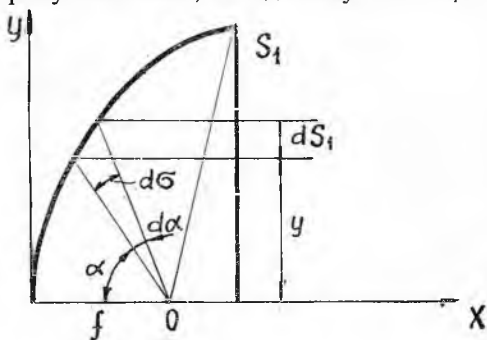


Рис. 7. К расчету функции распределения интенсивности ультразвукового поля в раскрыве параболического рефлектора



элемент поверхности сферы  $d\sigma$  трансформируется в элемент плоскости  $dS_1$ , и сила звука на поверхности  $S_1$  будет пропорциональна отношению  $\frac{d\sigma}{dS_1}$ .

Следовательно, функция распределения интенсивности имеет вид

$$G(\alpha) = \frac{d\sigma}{dS_1}.$$

Найдем величину  $\frac{d\sigma}{dS_1}$ . Обозначим полярный радиус через  $\rho$  и введем параметр параболы  $p = 2f$ . Тогда  $\frac{d\sigma}{dS_1} = \frac{p^2}{4\rho^2}$ . Следовательно, функция распределения интенсивности по волновому фронту будет

$$G(\alpha) = \frac{p^2}{4\rho^2}.$$

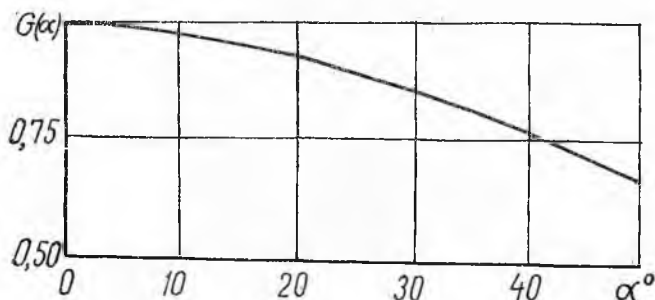


Рис. 8. График функции распределения интенсивности ультразвукового поля в раскрытии параболического рефлектора

Уравнение параболы в полярных координатах, отнесенное к фокусу имеет вид  $\rho = \frac{p}{1 + \cos \alpha}$ , где  $\alpha$  — полярный угол. Поэтому, распределение интенсивности по волновому фронту будет иметь вид:

$$G(\alpha) = \frac{(1 + \cos \alpha)^2}{4}.$$

При  $\alpha=0$ ,  $G(\alpha) = 1$ , так как в этой точке элемент поверхности волнового фронта совпадает с элементом поверхности параболоида. На рис. 8 показана кривая распределения интенсивности по волновому фронту.

Функция распределения фазы квазиплоского ультразвукового поля рефлектора зависит от точности изготовления профиля рефлектора и от точности установки фазового центра излучателя в главный фокус системы. В идеальном случае функция распределения постоянна по волновому фронту.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Л. И. Розенберг. Звуковые фокусирующие системы. Изд. Академии наук, 1949.
  2. И. Н. Каневский. Функция распределения амплитуды цилиндрических линз и рефлекторов. Акустич. журнал, вып. I, т. XII, 1966.
  3. Л. Бергман. Ультразвук и его применение в науке и технике. ИЛ, 1967.
  4. Б. Д. Тартаковский. Звуковые переходные слои. Доклады АН СССР, 1950 год, 75, 1, 1950, стр. 29—32.
  5. А. М. Тюлин, А. П. Сташкевич, Э. С. Гаранов. Основы гидроакустики. Издат. «Судостроение», Ленинград, 1966.
-