А. Н. МУМОРЦЕВ

О ВЫЧИСЛЕНИИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ УДАРЕ ПО СТЕРЖНЮ

В задаче рассматриваются поперечные колебания призматического стержня с учетом деформаций сдвига, вызываемые неупругим ударом массивного тела.

Решение строится методом, предложенным в [1], и развивая результаты этой статьи, позволяет определить динамические прогибы по длине стержня, а также находить нормальные напряжения в его поперечных сечениях.

1. Применив к дифференциальному уравнению свободных поперечных колебаний призматического стержня с учетом деформаций сдвига [2] интегральное преобразование по переменной t основанное на разложении, использованном в [1], получим:

$$\frac{d^4 Y(x, p)}{dx^4} - c^2p^2 \frac{d^2 Y(x, p)}{dx^2} + a^2p^2 Y(x, p) = 0 \qquad (1.1)$$

здесь:

$$a^2 = \frac{m}{EI}; \quad c^2 = \overline{\gamma}\cdot m \qquad (1.2)$$

m — погонная масса стержня, $\overline{\gamma}$ — единичный угол сдвига, для стержней сплошного сечения равный $\overline{\gamma}=\mu/GF$; EI и GF — жесткости стержня при изгибе и сдвиге, $p=i\lambda/a$ — чисто мнимый параметр преобразования, где λ — действительное число.

Для свободно опертого стержня преобразованные граничные условия запишутся:

$$\begin{array}{ll} Y(0, p) = 0; \quad Y''_x(0, p) = 0 & \text{при } x = 0 \\ Y(l; p) = 0; \quad Y''_x(l, p) = 0 & \text{при } x = l \end{array} \qquad (1.3)$$

Начальные условия:

$$y(x, 0) = 0; \quad \frac{\partial y(x, 0)}{\partial t} = 0 \text{ при } t = 0 \qquad (1.4)$$

Для точки $x = x_1$, где происходит удар, второе условие будет

$$\left(\frac{\partial y(x,0)}{\partial t}\right)_{\left(\substack{x=x_1\\ t=0}\right)} = V_0 \qquad (1.5)$$

V_0 — начальная скорость колебаний балки.

Давление ударяющей массы на стержень при неупругом ударе для $t>0$:

$$f(x_1, t) = P - \frac{P}{g}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)_{x=x_1}$$

после преобразования по переменной, выразится следующей функцией:

$$F(x_1; p) = P - \frac{P}{g} p^2 Y(x_1; p) + pZ, \qquad (1.6)$$

где импульс, сообщаемый стержню в момент удара,

$$Z = \frac{P}{g}\cdot V_0 .$$

По виду корней характеристического уравнения дифференциального уравнения (1.1)

$$\alpha_2 = \left|\sqrt{\sqrt{\frac{(k\lambda)^4}{4} + \lambda^2} + \frac{(k\lambda)^2}{2}}\right|; \quad \alpha_1 = \left|\sqrt{\sqrt{\frac{(k\lambda)^4}{4} + \lambda^2} - \frac{(k\lambda)^2}{2}}\right| \qquad (1.7)$$

$$k^2 = \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \bar{\gamma}\cdot EI$$

для двух участков стержня записывается функция Грина, которая должна удовлетворять уравнению (1.1), условиям (1.3) и быть непрерывной вместе с $Y'_x(x_1; x; p)$ и $Y''_x(x_1; x; p)$ в точке $x = x_1$. Третья же производная $Y'''_x(x_1; x; p)$ в этой точке испытывает скачок q. Удовлетворяя условия на границе левого и правого участков в точке $x = x_1$, а также граничные условия (1.3), находим восемь постоянных функций Грина и записываем ее в следующем виде [1]:

$$Y(x; x_1; p) = \begin{cases} \dfrac{(q - q_1\alpha_2^2)\, sh\,\alpha_1(x_1 - l)}{\alpha_1(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)\, sh\,\alpha_1 l}\, sh\,\alpha_1 x - \dfrac{(q + q_1\alpha_1^2)\sin\alpha_2(x_1 - l)}{\alpha_2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)\sin\alpha_2 l}\sin\alpha_2 x & 0 \leqslant x \leqslant x_1 \\ \dfrac{(q - q_1\alpha_2^2)\, sh\,\alpha_1 x_1}{\alpha_1(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)\, sh\,\alpha_1 l}\, sh\,\alpha_1(x - l) - \dfrac{(q + q_1\alpha_1^2)\sin\alpha_2 x_1}{\alpha_2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)\sin\alpha_2 l}\sin\alpha_2(x - l) & x_1 \leqslant x \leqslant l \end{cases} \qquad (1.8)$$

2. Полагая, что удар происходит по середине стержня, то есть при $x_1 = l/2$, вычислим величину скачков функции Грина,

для этого обратимся к уравнению совместности деформаций при изгибе стержня с учетом деформаций сдвига:

$$\frac{dy}{dx} = \psi + \gamma \tag{2.1}$$

$\frac{dy}{dx}$ — угол наклона касательной к оси стержня, а ψ и γ — соответственно угол поворота и угол сдвига сечения.

Вследствие равенства углов поворота левого и правого сечений при $x_1 = l/2$ скачок q_1, появляющийся в первой производной функции Грина благодаря учету касательных напряжений, будет:

$$q_1 = \frac{dY^{\text{л}}}{dx} - \frac{dY^{\text{пр}}}{dx} = \frac{k^2}{EI}\left(Q^{\text{л}} - Q^{\text{пр}}\right), \tag{2.2}$$

значение скачка q в $Y'''_x\left(x; \frac{l}{2}; p\right)$ определяется как разность значений $\frac{d^3 Y}{dx^3}$ для левого и правого сечений в точке $x_1 = \frac{l}{2}$

$$q = \frac{1}{EI}\left(Q^{\text{л}} - Q^{\text{пр}}\right) + \frac{k^2}{EI}\left(\frac{d^2 Q^{\text{л}}}{dx^2} - \frac{d^2 Q^{\text{пр}}}{dx^2}\right) \tag{2.3}$$

Заменяя в (2.2) и (2.3) разность поперечных сил функцией давления (1.6) и подставляя полученные выражения в (1.8), представим функцию Грина в следующем виде (вследствие симметрии рассматривается только левый участок):

$$Y\left(x; \frac{l}{2}; p\right) = \frac{P + pZ}{2EI\left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2\right)\alpha_1\alpha_2 D} \cdot \left[\alpha_1 \frac{\sin\alpha_2 x}{\cos\frac{\alpha_2 l}{2}} - \alpha_2 \frac{sh\,\alpha_1 x}{ch\,\frac{\alpha_1 l}{2}} + \right.$$

$$+ k^2\left(\alpha_1^3 \frac{\sin\alpha_2 x}{\cos\frac{\alpha_2 l}{2}} + \alpha_2^3 \frac{sh\,\alpha_1 x}{ch\,\frac{\alpha_1 l}{2}}\right) -$$

$$\left. - \frac{k^4}{EI} \cdot \frac{P}{2g}\left(\alpha_1^2\, th\frac{\alpha_1 l}{2} \cdot \frac{\sin\alpha_2 x}{\cos\frac{\alpha_2 l}{2}} + \alpha_2^2 \operatorname{tg}\frac{\alpha_2 l}{2} \cdot \frac{sh\,\alpha_1 x}{ch\frac{\alpha_1 l}{2}}\right)\right] \tag{2.4}$$

где

$$D = 1 + \frac{P}{EIg}p^2 \frac{1 + k^2\left(\alpha_1^2 - \alpha_2^2\right)}{2\left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2\right)}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha_2 l}{2}}{\alpha_2} - \frac{th\,\frac{\alpha_1 l}{2}}{\alpha_1}\right) -$$

$$- \frac{k^4 P^2 p^4}{4(EIg)^2 \alpha_1 \alpha_2}\operatorname{tg}\frac{\alpha_2 l}{2}\, th\frac{\alpha_1 l}{2}$$

Располагая преобразованной функцией прогибов, находим преобразованную функцию кривизны стержня. $Y''_x(x;\ l/2;\ p)$, связанную с нормальными напряжениями в поперечном сечении известной формулой:

$$\sigma_h = -E \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} \cdot \frac{h_y}{2}\ .$$

Значения трансформированной функции прогибов и ее второй производной записываются в виде отношений двух функций:

$$Y\left(x;\ \frac{l}{2};\ p\right) = \frac{\varphi(p)}{\alpha_1\alpha_2\psi(p)} \quad \text{и} \tag{2.5}$$

$$Y''_x\left(x;\ \frac{l}{2};\ p\right) = \frac{\varkappa(p)}{\psi(p)}$$

здесь:

$$\psi(p) = 2\left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2\right) + \frac{Pp^2\left[1 + k^2\left(\alpha_1^2 - \alpha_2^2\right)\right]}{EIg}\left(\frac{1}{\alpha_1}\operatorname{tg}\frac{\alpha_2 l}{2} - \frac{1}{\alpha_2}\, th\frac{\alpha_1 l}{2}\right) -$$

$$- \frac{k^4P^2p^4\left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2\right)}{2\alpha_1\alpha_2(EIg)^2}\operatorname{tg}\frac{\alpha_2 l}{2}\, th\frac{\alpha_1 l}{2}; \tag{2.6}$$

$$\varphi(p) = \frac{P + pZ}{EI}\left[\alpha_1\left(1 + k^2\alpha_1^2\right)\frac{\sin\alpha_2 x}{\cos\frac{\alpha_2 l}{2}} - \alpha_2\left(1 - k^2\alpha_2^2\right)\frac{sh\,\alpha_1 x}{ch\,\frac{\alpha_1 l}{2}} -\right.$$

$$\left.- \frac{k^4Pp^2}{2EIg}\left(\alpha_1^2\, th\,\frac{\alpha_1 l}{2}\cdot\frac{\sin\alpha_2 x}{\cos\frac{\alpha_2 l}{2}} + \alpha_2^2\operatorname{tg}\frac{\alpha_2 l}{2}\cdot\frac{sh\,\alpha_1 x}{ch\,\frac{\alpha_1 l}{2}}\right)\right] \tag{2.7}$$

$$\chi(p) = -\frac{P + pZ}{EI}\left[\alpha_2\left(1 + k^2\alpha_1^2\right)\frac{\sin\alpha_2 x}{\cos\frac{\alpha_2 l}{2}} + \alpha_1\left(1 - k^2\alpha_2^2\right)\cdot\frac{sh\,\alpha_1 x}{ch\,\frac{\alpha_1 l}{2}} +\right.$$

$$\left.+ \frac{k^4Pp^2\alpha_1\alpha_2}{2EIg}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha_2 l}{2}\cdot\frac{sh\,\alpha_1 x}{ch\,\frac{\alpha_1 l}{2}} - th\frac{\alpha_1 l}{2}\cdot\frac{\sin\alpha_2 x}{\cos\frac{\alpha_2 l}{2}}\right)\right] \tag{2.8}$$

Вследствие равенств

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{\alpha_2^2}{1 + k^2\alpha_2^2}} \tag{2.9}$$

$$\text{и} \quad p^2 = -\frac{1}{a^2}\cdot\frac{\alpha_2^4}{1 + k^2\alpha_2^2} \quad \text{и} \quad p = \pm i\,\frac{\alpha_1\alpha_2}{a}$$

вытекающих из (1.7), функции (2.5) ввиду того, что их особенность в точке p, соответствующей $\alpha_2 = \pm i/k$, не принадлежит физической области задачи (α_2 — по условию задачи — действительные числа), можно считать голоморфными функциями. Благодаря этому в качестве теоремы обращения может быть применена вторая теорема разложения Хэвисайда:

$$Y\left(x;\ \frac{l}{2};\ t\right) = y\left(x;\ \frac{l}{2};0\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi(p_n)}{p_n\left[\alpha_1\alpha_2\psi'(p_n)\right]}\exp(p_n t) \tag{2.10}$$

и

$$y''_x\left(x;\ \frac{l}{2};\ t\right) = Y''_x\left(x;\ \frac{l}{2};0\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(p_n)}{p_n\psi'(p_n)}\exp(p_n t) \tag{2.11}$$

В этих выражениях p_n — корни уравнения:

$$\psi(p_n) = 0. \qquad (2.12)$$

Для определения первых членов в (2.10) и (2.11) положим $p=0$ в отношениях (2.5). Раскрывая по правилу Лопиталя полученные неопределенности, находим кривую прогибов и функцию кривизны оси стержня по длине при бесконечно медленном (статическом) загружении стержня по середине пролета силой P.

$$Y\left(x; \frac{l}{2}; 0\right) = \lim_{\alpha_{10},\alpha_{20}\to 0} \frac{P\left[\frac{1}{\alpha_{20}}\cdot\frac{\sin\alpha_{20}x}{\cos\alpha_{20}\frac{l}{2}} - \frac{1}{\alpha_{10}}\cdot\frac{sh\,\alpha_{10}x}{ch\,\alpha_{10}\frac{l}{2}}\right.}{2EI\left(\alpha_{10}^2+\alpha_2^2\right)} + \qquad (2.13)$$

$$+ \frac{\left.k^2\left(\frac{\alpha_{10}^2}{\alpha_{20}}\cdot\frac{\sin\alpha_{20}x}{\cos\alpha_{10}\frac{l}{2}} + \frac{\alpha_{20}^2}{\alpha_{10}}\cdot\frac{sh\,\alpha_{10}x}{ch\,\alpha_{10}\frac{l}{2}}\right)\right]}{2EI\left(\alpha_{10}^2+\alpha_{20}^2\right)} = \frac{P}{24\,EI}\left[\left(\frac{3xl^2}{2} - 2x^3\right) + 12k^2x\right]$$

$$Y''_x\left(x; \frac{l}{2}; 0\right) = \lim_{\alpha_{10},\alpha_{20}\to 0} \frac{-P\left[\alpha_{20}\frac{\sin\alpha_{20}x}{\cos\alpha_{20}\frac{l}{2}} + \alpha_{10}\frac{sh\,\alpha_{10}x}{ch\,\alpha_{10}\frac{l}{2}}\right.}{2EI\left(\alpha_{10}^2+\alpha_{20}^2\right)} +$$

$$+ \frac{\left.k^2\alpha_{10}\alpha_{20}\left(\alpha_{10}\cdot\frac{\sin\alpha_{20}x}{\cos\alpha_{20}\frac{l}{2}} - \alpha_{20}\frac{sh\,\alpha_{10}x}{ch\,\alpha_{10}\frac{l}{2}}\right)\right]}{2EI\left(\alpha_{10}^2+\alpha_{20}^2\right)} = -\frac{Px}{2EI} \qquad (2.14)$$

Разлагая (2.9) в степенной ряд и удерживая только два первых члена ($k^2\alpha_2{}^2<1$), подставляем, преобразованные с учетом этого разложения, выражения (2.6), (2.7) и (2.8) в (2.10) и (2.11), которые после замены экспоненциальных множителей по формуле Эйлера и объединения сумм с последующей подстановкой (2.13) и (2.14) соответственно дадут следующие выражения для динамического прогиба и нормальных напряжений, имеющих место на левом участке стержня при ударе по середине пролета:

$$y\left(x, \frac{l}{2}, t\right) = \frac{P}{24EI}\left[\frac{3xl^2}{2} - 2x^3\right) + 12k^2x\right] +$$

$$+ \frac{4}{EI}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[P\cos\frac{\alpha_{1n}\alpha_{2n}}{a}t - Z\alpha_{2n}^2\left(1-0{,}5k^2\alpha_{2n}^2\right)\sin\frac{\alpha_{1n}\alpha_{2n}}{a}t\right]\omega(\alpha_n)}{\Omega(\alpha_n)}$$

$$0 \leqslant x \leqslant \frac{l}{2} \qquad (2.15)$$

$$\sigma^{\max}\left(x, \frac{l}{2}, t\right) = \frac{Px}{2W} +$$

$$+ \frac{4}{W}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[P\cos\frac{\alpha_{1n}\alpha_{2n}}{a}t - Z\alpha_{2n}^2\left(1-0{,}5k^2\alpha_{2n}^2\right)\sin\frac{\alpha_{1n}\alpha_{2n}}{a}t\right]\vartheta(\alpha_n)}{\Upsilon(\alpha_n)}$$

$$0 \leqslant x \leqslant \frac{l}{2} \qquad (2.16)$$

Ниже приводятся значения $\omega(\alpha_n)$, $\Omega(\alpha_n)$ и $\vartheta(\alpha_n)$, $\Upsilon(\alpha_n)$:

$$\omega(\alpha_{1n}, \alpha_{2n}) = \Bigg\{\alpha_{2n}\left(1+0{,}5k^2\alpha_{2n}^2\right)\frac{\sin\alpha_{2n}x}{\cos\frac{\alpha_{2n}l}{2}} - \alpha_{2n}\left(1-k^2\alpha_{2n}^2\right)\frac{sh\,\alpha_{1n}x}{ch\,\frac{\alpha_{1n}l}{2}} +$$

$$+\frac{\beta l k^4\alpha_{2n}^6}{2}\left(1-k^2\alpha_{2n}^2\right)\left[th\,\frac{\alpha_{1n}l}{2}\left(1-k^2\alpha_{2n}^2\right)\frac{\sin\alpha_{2n}x}{2}+\right.$$

$$\left.+\operatorname{tg}\frac{\alpha_{2n}l}{2}\cdot\frac{sh\,\alpha_{1n}x}{ch\,\frac{\alpha_{1n}l}{2}}\right]\Bigg\} \qquad (2.17)$$

$$\Omega(\alpha_{1n}, \alpha_{2n}) = \alpha_{2n}\frac{1-0{,}5k^2\alpha_{2n}^2}{1-k^2\alpha_{2n}^2}\Big\{8\alpha_{2n}^3\left(2-3k^2\alpha_{2n}^2\right)+2\alpha_{2n}^4 l\left(1-k^2\alpha_{2n}^2\right)\times$$

$$\times\left[\left(1-1{,}5k^2\alpha_{2n}^2\right)th\,\frac{\alpha_{m}l}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha_{2n}l}{2}\right]+5\beta l\alpha_{2n}^4\left[\left(1-1{,}4k^2\alpha_{2n}^2\right)th\,\frac{\alpha_{1n}l}{2}-\right.$$

$$\left.-\left(1-2{,}1k^2\alpha_{2n}^2\right)\operatorname{tg}\frac{\alpha_{2n}l}{2}\right]-k^2\alpha_{2n}^7\beta l^2-\alpha_{2n}^5\beta l^2\left(1-2k^2\alpha_{2n}^2\right)tg\,\frac{\alpha_{2n}l}{2}\times$$

$$\times th\,\frac{\alpha_{1n}l}{2}-10k^4\beta l^2\alpha_{2n}^9\left(1-3k^2\alpha_{2n}^2\right)th\,\frac{\alpha_{1n}l}{2}\times$$

$$\times\cos\frac{d_{2n}l}{2}\ \operatorname{tg}\frac{\alpha_{2n}l}{2}-k^4\beta^2l^3\alpha_{2n}^{10}\left(1-2k^2\alpha_{2n}^2\right)\left[\operatorname{tg}\frac{\alpha_{2n}l}{2}+\right.$$

$$\left.+\left(1-0{,}5k^2\alpha_{2n}^2\right)th\,\frac{\alpha_{1n}l}{2}\right]\Big\} \qquad (2.18)$$

$$\vartheta(\alpha_{1n}, \alpha_{2n}) = \left[\alpha_{2n}\left(1+k^2\alpha_{2n}^2\right)\frac{\sin\alpha_{2n}x}{\cos\frac{\alpha_{2n}l}{2}} - \alpha_{2n}\left(1-1.5k^2\alpha_{2n}^2\right)\frac{sh\,\alpha_{1n}x}{ch\,\frac{\alpha_{1n}l}{2}} -\right.$$

$$\left.-\beta l\frac{k^4}{2}\alpha_{2n}^6\left(1-1.5k^2\alpha_{2n}^2\right)\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha_{2n}l}{2}\cdot\frac{sh\,\alpha_{1n}x}{ch\,\frac{\alpha_{1n}l}{2}} - th\,\frac{\alpha_{1n}l}{2}\cdot\frac{\sin\alpha_{2n}x}{\cos\frac{\alpha_{2n}l}{2}}\right)\right] \qquad (2.19)$$

$$\Upsilon(\alpha_{1n}, \alpha_{2n}) = \alpha_{2n}^2\frac{1-0.5k^2\alpha_{2n}^2}{1-k^2\alpha_{2n}^2}\Big\{8\left(1-k^2\alpha_{2n}^2\right)+2\alpha_{2n}l\left(1-0{,}5k^2\alpha_{2n}^2\right)\times$$

$$\times\left[\left(1-1{,}5k^2\alpha_{2n}^2\right)th\frac{\alpha_{1n}l}{2}-\operatorname{tg}\frac{\alpha_{2n}l}{2}\right]+3\alpha_{2n}\beta l\left[\left(1-2{,}5k^2\alpha_{2n}^2\right)th\frac{\alpha_{1n}l}{2}-\right.$$

$$\left.-\left(1-1{,}66k^2\alpha_{2n}^2\right)\operatorname{tg}\frac{\alpha_{2n}l}{2}\right]-\alpha_{2n}^2\beta l^2\left(1-2k^2\alpha_{2n}^2\right)\operatorname{tg}\frac{\alpha_{2n}l}{2}\,th\frac{\alpha_{1n}l}{2}-$$

$$-k^2\alpha_{2n}^4\beta l^2-8k^4\alpha_{2n}^6\beta^2l^2\left(1-2.5k^2\alpha_{2n}^2\right)th\frac{\alpha_{1n}l}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha_{2n}l}{2}-$$

$$\left.-k^4\alpha_{2n}^7\beta^2\frac{l^3}{2}\left(1-2k^2\alpha_{2n}^2\right)\left[\left(1-1.5k^2\alpha_{2n}^2\right)\operatorname{tg}\frac{\alpha_{2n}l}{2}+th\frac{\alpha_{1n}l}{2}\right]\right\} \quad (2.20)$$

здесь $\beta=\dfrac{P}{P_1}$.

Корни α_{2n} определяются из трансцендентного уравнения (2.12), которое после преобразований приводится к виду:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha_{2n}l}{2}=\frac{4\left(1-k^2\alpha_{2n}^2\right)+\alpha_{2n}\beta l\left(1-k^2\alpha_{2n}^2\right)th\frac{l}{2}\sqrt{\frac{\alpha_{2n}^2}{1+k^2\alpha_{2n}^2}}}{\alpha_{2n}\beta l\left[1-1.5k^2\alpha_{2n}^2+k^4\alpha_{2n}^5\beta l\left(1-2.5k^2\alpha_{2n}^2\right)th\frac{l}{2}\sqrt{\frac{\alpha_{2n}^2}{1+k^2\alpha_{2n}^2}}\right]}. \quad (2.21)$$

Время t_1, соответствующее наибольшему значению динамического прогиба или напряжения, определяется по максимуму первого члена разложения:

$$t_1=\frac{\pi a}{\alpha_{21}^2\left(1-0{,}5k^2\alpha_{21}^2\right)}+\frac{a^2g}{V_0\alpha_{21}^4\left(1-k^2\alpha_{21}^2\right)}.$$

Полагая в (2.15), (2.17) и (2.18) $x=l/2$, получим результаты, совпадающие с опубликованным ранее решением для определения динамического прогиба под силой P, приложенной в середине пролета стержня [1], если же в этих выражениях считать $k=0$, то есть пренебречь деформациями сдвига, то результаты оказываются тождественны выражениям, приводимым в [3, 4].

3. В качестве примера рассматривается удар по стальному стержню I № 12, начальная скорость принимается равной $v_0=100$ *см/сек*. Соотношение масс ударяющего груза и стержня берется в пределах от 1 до 10, отношение высоты стержня к его длине: $1/10\div1/4$.

По прогибам и напряжениям в поперечных сечениях стержня определялись динамические коэффициенты:

$$k_{(x)}^{y}=\frac{y\left(x,\frac{l}{2},t_1\right)}{y_{ст}\left(x,\frac{l}{2}\right)} \quad \text{и} \quad k_{(x)}^{\sigma}=\frac{\sigma\left(x,\frac{l}{2},t_1\right)}{\sigma_{ст}\left(x,\frac{l}{2}\right)}.$$

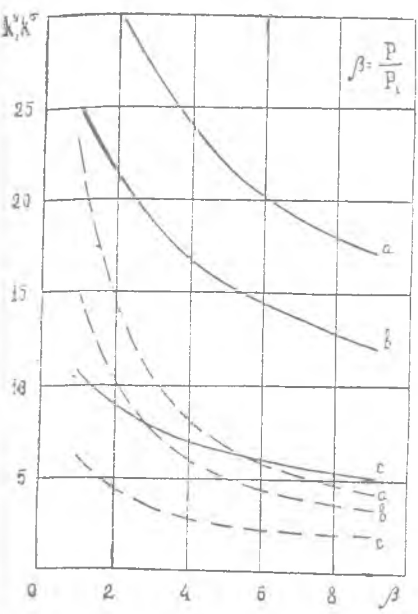

Рис. 1.

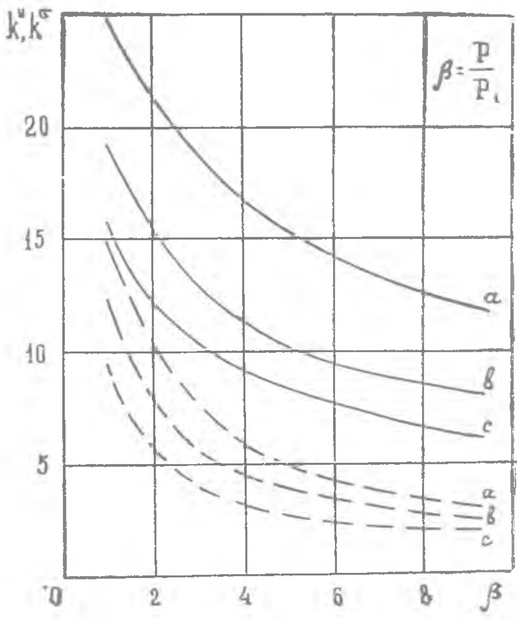

Рис. 2.

На рис. 1 показана зависимость коэффициентов по перемещениям (сплошные линии) и по напряжениям (пунктир) от величины β при различных значениях h/l, соответственно a — $^1/_5$; b—$^1/_6$; c—$^1/_{10}$.

Кривыми на рис. 2 изображаются динамические коэффициенты по прогибам и напряжениям для стержней с одинаковым отношением $h/l={}^1/_6$, но различными гибкостями λ:a—14,5; b—15; c—16.

Соответствующие статическому загружению и первым двум корням трансцендентного уравнения формы оси балки приведены на рис. 3.

Кривые построены в различных масштабах, абсолютные значения ординат даны в мм.

На основании анализа численного счета, выполненного на ЭЦВМ «Урал-2», можно сформулировать следующие выводы:

— величина динамического коэффициента не меняется по длине стержня;

— учет деформаций сдвига не оказывает существенного влияния на величину динамических нормальных напряжений;

— расхождение значений динамических коэффициентов, определяемых по прогибам и напряжениям, показывает, что

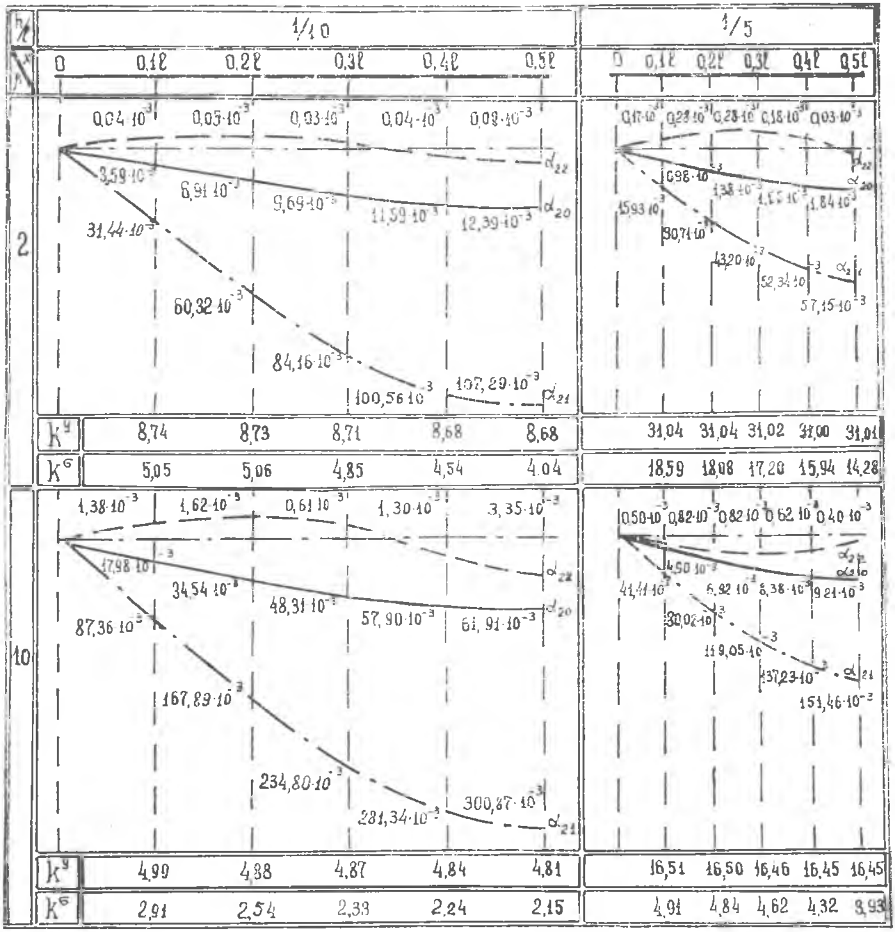

Рис. 3.

учет деформаций сдвига необходим при определении перемещений при ударных воздействиях.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сеницкий Ю. Э.* Поперечный удар по стержню сплошного или составного сечения, «Инженерный журнал», т. 5, вып. 4, АН СССР, 1965.

2. *Тимошенко С. П.* Колебания в инженерном деле. Физматгиз, 1959.

3. *Солодовников Р. В., Смелянская Л. Н.* Поперечный удар по балке, нагруженной продольными силами. «Известия вузов» МВиССО СССР, раздел «Строительство и архитектура», 1962, № 2.

4. *Мумориев А. Н., Сафонов С. Ф.* Удар по стержню с упруго поворачивающейся опорой. «Известия вузов» МВиССО СССР, раздел «Строительство и архитектура» 1969, № 10.