Н. С. КОНДРАШОВ

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ МАССЫ НА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ

Уравнение для определения собственных частот совместных колебаний цилиндрической оболочки с закрепленной на ней сосредоточенной массой получено в работе [1]. В это уравнение входит сумма двойного медленно сходящегося ряда, поэтому окончательные результаты можно получить только с использованием ЦВМ. Функции изгибных напряжений при этом представляются двойными рядами, которые сходятся еще медленнее, а в точке присоединения массы расходятся.

Ниже приведено решение этой задачи другим методом, который позволил получить более компактные результаты. Для определения собственных частот, например, в большинстве случаев достаточно использовать только первый член ряда. Полученные результаты можно применять без использования ЦВМ.

Рассмотрим свободноопертую замкнутую цилиндрическую оболочку длиной l, радиусом R и толщиной стенки h. Материал оболочки подчиняется закону Гука, свойства его определяются тремя физическими константами: модулем упругости E, коэффициентом Пуассона μ и плотностью ρ. На поверхности оболочки находится сосредоточенная в точке масса M. В соответствии с методом динамических податливостей разорвем связь и под действием реакции связи $P \sin \omega t$ найдем амплитуды перемещений массы и радиальных перемещений оболочки в месте присоединения массы. Из условия равенства этих перемещений получим частотное уравнение собственных колебаний. Амплитуда перемещения массы определяется весьма просто

$$w^{\text{м}} = \frac{P}{M\omega^2}. \tag{1}$$

Поэтому основное в задаче сводится к определению радиальных прогибов цилиндрической оболочки.

Движение оболочки в цилиндрических безразмерных координатах можно описать системой уравнений типа уравнения Власова-Доннела [2]

$$\frac{1}{Eh}\nabla^4\psi - R\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2} = 0,$$

$$R\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2} + D\nabla^4 w - \rho h R^4\omega^2 w = PR^4\delta(\xi-\xi_1)\delta(\varphi), \tag{2}$$

где w — функция радиальных прогибов; ψ — потенциальная функция напряжений; $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$ — оператор Лапласа; $\xi = \frac{x}{R}$ — относительная осевая координата, отсчитываемая от края оболочки; ξ_1 — координата расположения груза; φ — угловая координата, отсчитываемая от места расположения сосредоточенной массы; $\delta(\xi-\xi_1)$, $\delta(\varphi)$ — импульсные функции Дирака; $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ — цилиндрическая жестксость оболочки; ω — частота колебаний.

Применим к системе уравнений (2) конечное синус преобразование [3]. Обозначим изображение конечного синус преобразования через

$$f^*(m,\varphi) = \int_0^{\xi_0} f(\xi,\varphi)\sin\lambda_m\xi\,d\xi, \tag{3}$$

где $\xi_0 = \frac{l}{R}$, $\lambda_m = \frac{m\pi R}{l}$ $(m = 1, 2, 3\ldots)$.

Тогда, умножая уравнения (2) на $\sin\lambda_m\xi$, интегрируя результат умножения и используя известные свойства импульсивных функций, получим

$$\frac{1}{Eh}\left(\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} - \lambda_m^2\right)^2\psi^*(m,\varphi) + R\lambda_m^2 w^*(m,\varphi) = 0,$$

$$-R\lambda_m^2\psi^*_{(m,\varphi)} + D\left(\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} - \lambda_m^2\right)^2 w^*(m,\varphi) - \rho h R^4\omega^2 w^*(m,\varphi) = \tag{4}$$

$$= PR^3\sin\lambda_m\xi,\ \delta(\varphi).$$

Представим перемещения $w^*_{(m,\varphi)}$ и функцию напряжений $\psi^*(m,\varphi)$ в диапазоне $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$ в виде следующих рядов [4]

$$w^*(m,\varphi) = w(m,\varphi) + w(m, 2\pi-\varphi) + w(m, 2\pi+\varphi) +$$

$$+ w(m, 4\pi-\varphi) + w(m, 4\pi+\varphi) + \ldots$$

$$\psi^*(m,\varphi) = \psi(m,\varphi) + \psi(m, 2\pi-\varphi) + \psi(m, 2\pi+\varphi) + \tag{5}$$

$$+ \psi(m, 4\pi-\varphi) + \psi(m, 4\pi+\varphi) + \ldots$$

Разложение (6) можно представить с помощью двух фиктивных полос шириной l, каждая из которых начинается на образующей $\varphi=0$ и обертывается бесчисленное множество раз вокруг данной оболочки: одна по часовой стрелке, другая против. Суммирование рядов (5) не представляет трудностей, как будет показано ниже, члены этих рядов образуют геометрические прогрессии. Используем для дальнейшего решения только первые члены рядов (5), т. к. другие члены ряда будут отличаться только началом и порядком отсчета аргумента. Если в (4) вместо $w^*(m, \varphi)$, $\psi^*(m, \varphi)$ подставить только первые члены разложения, то к полученной системе уравнений можно применить интегральные косинус-преобразования. Введем для изображений интегральных косинус-преобразований следующие обозначения

$$f(m, \alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(m, \varphi)\cos\alpha\varphi\, d\varphi. \tag{6}$$

Умножая уравнения (4), в которых используются только первые члены разложения, на $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos\alpha\varphi$ и интегрируя по φ в пределах от 0 до ∞, получим

$$\begin{aligned} &\frac{1}{Eh}(\alpha^2+\lambda_m^2)^2\psi(m, \alpha)+R\lambda_m^2 w(m, \alpha)=0,\\ &-R\lambda_m^2\psi(m, \alpha)+D(\alpha^2+\lambda_m^2)^4 w(m, \alpha)-\rho hR^4\omega^2 w(m, \alpha)=\\ &=\sqrt{\frac{2}{\pi}}PR^2\sin\lambda_m\xi_1. \end{aligned} \tag{7}$$

Из системы (7) находим изображения радиального прогиба и функции напряжений

$$\begin{aligned} w(m, \alpha)&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}A_m P\frac{(\lambda_m^2+\alpha^2)^2}{(\lambda_m^2+\alpha^2)^4-2c(\lambda_m^2+\alpha^2)^2+d},\\ \psi(m, \alpha)&=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}B_m P\frac{1}{(\lambda_m^2+\alpha^2)^4-2c(\lambda_m^2+\alpha^2)^2+d}, \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$A_m=\frac{R^2\sin\lambda_m\xi_1}{D},\quad B_m=12(1-\mu^2)\frac{R^3}{h^2}\lambda_m^2\sin\lambda_m\xi_1,$$

$$d=12(1-\mu^2)\lambda_m^4\frac{R^2}{h^2},\quad 2c=\frac{\rho hR^4\omega^2}{D}.$$

Чтобы по изображениям (8) найти функции $w(\xi, \varphi)$, $\psi(\xi, \varphi)$, необходимо применить операции обратных преобразований. Рассмотрим более подробно процесс определения $w(\xi, \varphi)$. Представим изображение прогиба (8) в виде

$$w(m, \alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} A_m P\left(\frac{\gamma_1}{\alpha^2 + \beta_1^2} + \frac{\gamma_2}{\alpha^2 + \beta_2^2} + \frac{\gamma_3}{\alpha^2 + \beta_3^2} + \frac{\gamma_4}{\alpha^2 + \beta_4^2}\right). \quad (9)$$

Непосредственной подстановкой легко установить, что параметры β и γ определяются следующими зависимостями

$$\gamma_1 = -\gamma_2 = \frac{[c + (c^2 - d)^{1/2}]^{1/2}}{4(c^2 - d)^{1/2}}, \quad \gamma_3 = -\gamma_4 = -\frac{[c - (c^2 - d)^{1/2}]^{1/2}}{4(c^2 - d)^{1/2}},$$

$$\beta_1^2 = \lambda_m^2 - [c + (c^2 - d)^{1/2}]^{1/2},$$

$$\beta_2^2 = \lambda_m^2 + [c + (c^2 - d)^{1/2}]^{1/2},$$

$$\beta_3^2 = \lambda_m^2 - [c - (c^2 - d)^{1/2}]^{1/2},$$

$$\beta_4^2 = \lambda_m^2 + [c - (c^2 - d)^{1/2}]^{1/2}.$$

При $\omega = \omega_{\min}$, $m = 1$ выражение в круглых скобках обращается в нуль

$$c^2 - d = 0.$$

Здесь $\omega^2_{\min}$ — квадрат минимальной собственной частоты оболочки без сосредоточенной массы

$$\omega^2_{\min} = \frac{\pi^2 Eh}{\sqrt{3(1 - \mu^2)}\, \rho\, l^2 R}.$$

При

$$\omega < \omega_{\min}, \quad c^2 - d < 0. \quad (10)$$

Хотя излагаемый в данной статье метод позволяет решать задачу при любом значении ω, в дальнейшем будем рассматривать только случай $\omega < \omega_{\min}$ как наиболее интересный в практических приложениях. Именно этот случай соответствует минимальной частоте собственных колебаний и сильному локальному максимуму напряжений в месте подсоединения сосредоточенной массы. Поэтому знание минимальной частоты необходимо как для полной частотной отстройки, так и для отстройки от форм колебаний с сильными локальными максимумами напряжений.

Принимая во внимание условие (10), γ и β можно представить в следующем виде

$$\gamma_1 = -\gamma_2 = q_1 - iq_2, \quad \gamma_3 = -\gamma_4 = q_1 + iq_2, \quad (11)$$

$$q_1 = \frac{\sqrt[4]{d}\sin\Theta}{4(d - c^2)^{1/2}}, \quad q_2 = \frac{\sqrt[4]{d}\cos\Theta}{4(d - c^2)^{1/2}}, \quad 2\Theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{d}{c^2} - 1\right),$$

$$\beta_1 = \rho_1 - i\sigma_1, \quad \beta_2 = \rho_2 + i\sigma_2, \quad (12)$$

$$\beta_3 = \rho_1 + i\sigma_1, \quad \beta_4 = \rho_2 - i\sigma_2\,,$$
$$\rho_1 = r_1 \sin\nu_1\,, \quad \sigma_1 = r_1 \cos\nu_1\,,$$
$$\rho_2 = r_2 \cos\nu_2\,, \quad \sigma_2 = r_2 \sin\nu_2\,,$$
$$r_1 = \left(\lambda_m^4 - 2\lambda_m^2 \sqrt[4]{d}\cos\Theta + \sqrt{d}\, \right)^{1/4},$$
$$r_2 = \left(\lambda_m^4 + 2\lambda_m^2 \sqrt[4]{d}\cos\Theta + \sqrt{d}\, \right)^{1/4},$$
$$2\nu_1 = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{d}\sin\Theta}{\sqrt[4]{d}\cos\Theta - \lambda_m^2}\,, \quad 2\nu_2 = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{d}\sin\Theta}{\sqrt[4]{d}\cos\Theta + \lambda_m^2}\,.$$

Кроме приведенных в (12) существует еще четыре значения β с отрицательными значениями реальных частей. Как будет ясно из дальнейшего, положительное значение реальной части β соответствует неограниченному росту прогибов и напряжений при увеличении угла φ, что противоречит физической сути задачи. Поэтому в дальнейшем будем использовать только те значения β, которые приведены в (12).

Обратное интегральное косинус-преобразование определяется интегралом Фурье.

$$f(m, \varphi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(m, \alpha)\cos\alpha\varphi\, d\alpha. \tag{13}$$

Тогда, используя (9), для радиальных прогибов оболочки получим

$$w(m, \varphi) = \frac{2}{\pi} A_m P \int_0^\infty \left(\frac{\gamma_1}{\alpha^2+\beta_1^2} + \frac{\gamma_2}{\alpha^2+\beta_2^2} + \frac{\gamma_3}{\alpha^2+\beta_3^2} + \frac{\gamma_4}{\alpha^2+\beta_4^2} \right)\cos\alpha\varphi\, d\alpha. \tag{14}$$

Так как

$$\int_0^\infty \frac{\cos\alpha\varphi\, d\alpha}{\alpha^2+\beta^2} = \frac{\pi}{2}\,\frac{e^{-\beta\varphi}}{\beta}\,, \quad \operatorname{Re}\beta > 0, \quad \varphi > 0$$

выражение (14) после интегрирования будет иметь вид

$$w(m, \varphi) = A_m P \left(\frac{\gamma_1 e^{-\beta_1\varphi}}{\beta_1} + \frac{\gamma_2 e^{-\beta_2\varphi}}{\beta_2} + \frac{\gamma_3 e^{-\beta_3\varphi}}{\beta_3} + \frac{\gamma_4 e^{-\beta_4\varphi}}{\beta_4} \right). \tag{15}$$

Подставляя в (15) значения γ из (11) и β из (12), используем только реальную часть полученного результата

$$w(m, \varphi) = 2A_m P \left\{ \frac{e^{-\rho_1\varphi}}{r_1^2} \left[(\rho_1 q_1 + \sigma_1 q_2)\cos\sigma_1\varphi + (\rho_1 q_2 - \sigma_1 q_1)\sin\sigma_1\varphi \right] + \right.$$
$$\left. + \frac{e^{-\rho_2\varphi}}{r_2^2} \left[(-\rho_2 q_1 + \sigma_2 q_2)\cos\sigma_2\varphi + (\rho_2 q_1 + \sigma_2 q_2)\sin\sigma_2\varphi \right] \right\}. \tag{16}$$

Переходя к суммированию ряда (5), заметим, что все члены ряда можно разделить на две группы: с положительным и отрицательным аргументами. Заметим также, что в каждой группе аргумент возрастает на 2π при переходе от одного члена к другому. Так как при увеличении аргумента на 2π в (16) будут меняться только экспоненциальные функции, то ряд (5) образует две геометрические прогрессии со знаменателем $e^{-2\pi\rho}$. Первый член первой прогрессии соответствует (16), первый член второй прогрессии образуется из (16) заменой φ на $2\pi-\varphi$.

После суммирования (5) получим

$$w^*(m,\ \varphi)=2A_m P\left\{\frac{1}{(1-e^{-2\pi\rho_1})\,r_1^2}[(\rho_1 q_1+\sigma_1 q_2)\times\right.$$

$$\times(e^{-\rho_1\varphi}+e^{-2\pi\rho_1}e^{\rho_1\varphi})\cos\sigma_1\varphi+(\rho_1 q_2-\sigma_1 q_1)(e^{-\rho_1\varphi}-e^{-2\pi\rho_1}e^{\rho_1\varphi})\sin\sigma_1\varphi]+$$

$$+\frac{1}{(1-e^{-2\pi\rho_2})\,r_2^2}[(-\rho_2 q_1+\sigma_2 q_2)(e^{-\rho_2\varphi}+e^{-2\pi\rho_2}e^{\rho_2\varphi})\cos\sigma_2\varphi+$$

$$\left.+(\rho_2 q_1+\sigma_2 q_2)(e^{-\rho_2\varphi}-e^{-2\pi\rho_2}e^{\rho_2\varphi})\sin\sigma_2\varphi]\right\}. \tag{17}$$

Для определения $w(\xi,\ \varphi)$ применим к (15) обратное конечное синус-преобразование

$$w(\xi,\ \varphi)=\frac{2R}{l}\sum_{m=1}^{\infty}w^*(m,\ \varphi)\sin\lambda_m\xi. \tag{18}$$

Аналогично для функции напряжений

$$\psi^*(m,\ \varphi)=-2\frac{B_m P}{\sqrt{d}}\left\{\frac{1}{(1-e^{-2\pi\rho_1})\,r_1^2}[(-\rho_1 q_1+\sigma_1 q_2)\times\right.$$

$$\times(e^{-\rho_1\varphi}+e^{-2\pi\rho_1}e^{\rho_1\varphi})\cos\sigma_1\varphi+(\rho_1 q_2+\sigma_1 q_1)(e^{-\rho_1\varphi}-e^{-2\pi\rho_1}e^{\rho_1\varphi})\sin\sigma_1\varphi]+$$

$$+\frac{1}{(1-e^{-2\pi\rho_2})\,r_2^2}[(\rho_2 q_1+\sigma_2 q_2)(e^{-\rho_2\varphi}+e^{-2\pi\rho_2}e^{\rho_2\varphi})\cos\sigma_2\varphi+$$

$$\left.+(\rho_2 q_2-\sigma_2 q_1)(e^{-\rho_2\varphi}-e^{-2\pi\rho_2}e^{\rho_2\varphi})\sin\sigma_2\varphi]\right\}, \tag{19}$$

$$\psi(\xi,\ \varphi)=\frac{2R}{l}\sum_{m=1}^{\infty}\psi^*(m,\ \varphi)\sin\lambda_m\xi. \tag{20}$$

Приравнивая правые части (1) и (18) для $\xi=\xi_1$, $\varphi=0$, получим частотное уравнение совместных колебаний

$$\frac{1}{M\omega^2}=\frac{2R}{l}\sum_{m=1}^{\infty}\overline{w}^*(m,\ 0)\sin\lambda_m\xi_1, \tag{21}$$

где $$\overline{w}^*=w^*/P.$$

Из решения уравнения (21) определяются низшие частоты совместных колебаний оболочки с сосредоточенной массой. Для груза, расположенного в середине оболочки, первый член ряда в (21) отличается от всей суммы примерно на 10%. Учет трех членов ряда дает достаточную для инженерных нужд точность.

В двух крайних случаях из (21) могут быть получены формулы для приближенного вычисления собственных частот совместных колебаний. Когда сосредоточенная масса мала, минимальная собственная частота собственных колебаний массы и оболочки будет близка к минимальной частоте оболочки без массы. При этом отношение d/c^2 будет незначительно отличаться от единицы, т. е.

$$\frac{d}{c^2} - 1 \to 0. \tag{22}$$

Для этого случая значения параметров, входящих в (11), (12), упрощаются

$$\begin{gathered}
\Theta \approx \frac{1}{2}\left(\frac{d}{c^2} - 1\right)^{1/2}, \\
\sin\Theta \approx \frac{1}{2}\left(\frac{d}{c^2} - 1\right)^{1/2}, \quad \cos\Theta \approx 1, \\
\sin\nu_1 \approx \nu_1 \approx \frac{1}{4}\,\frac{\sqrt[4]{d}\left(\frac{d}{c^2} - 1\right)^{1/2}}{\sqrt[4]{d} - \lambda_m^2}, \quad \cos\nu_1 \approx 1, \\
\sin\nu_2 \approx \upsilon_2 \approx \frac{1}{4}\,\frac{\sqrt[4]{\alpha}\left(\frac{d}{c^2} - 1\right)^{1/2}}{\sqrt[4]{d} + \lambda_m^2}, \quad \cos\nu_2 \approx 1, \\
r_1 = (-\lambda_m^2 + \sqrt[4]{\alpha})^{1/2}, \quad r_2 = (\lambda_m^2 + \sqrt[4]{d})^{1/2}, \\
\rho_1 = \frac{\sqrt[4]{d}}{4}\,\frac{\left(\frac{d}{c^2} - 1\right)^{1/2}}{(\sqrt[4]{d} - \lambda_m^2)^{1/2}}, \quad \sigma_1 = (\sqrt[4]{d}) - (\lambda_m^2)^{1/2}, \\
\rho_2 = (\lambda_m^2 + \sqrt[4]{d})^{1/2}, \quad \sigma_2 = \frac{\sqrt[4]{d}}{4}\,\frac{\left(\frac{d}{c^2} - 1\right)^{1/2}}{(\sqrt[4]{d} + \lambda_m^2)^{1/2}}, \\
q_1 = \frac{\sqrt[4]{d}}{4c}, \quad q_2 = \frac{\sqrt[4]{d}}{4\sqrt{d - c^2}}, \\
\frac{1 + e^{-2\pi\rho_1}}{1 - e^{-2\pi\rho_1}} \approx \frac{1 - \pi\rho_1}{\pi\rho_1}, \quad \frac{1 + e^{-2\pi\rho_2}}{1 - e^{-2\pi\rho_2}} \approx 1.
\end{gathered} \tag{23}$$

Учитывая (23), а также неравенства

$$\sqrt{d}\left(\frac{d}{c^2}-1\right) \ll \left|\sqrt[4]{d}-\lambda_m^2\right|, \qquad \sqrt{d}\left(\frac{d}{c^2}-1\right) \ll \sqrt[4]{d}+\lambda_m^2, \tag{24}$$

получим величину прогиба в месте крепления сосредоточенной массы

$$w(\xi_1, 0) = \frac{8}{\pi c} P \frac{R}{l} \sum_{m=1}^{\infty} A_m \frac{\sin \lambda_m \xi_1}{\frac{d}{c^2}-1}. \tag{25}$$

В правой части равенства (25) достаточно учитывать только первый член ряда, т. к. только при $m=1$, $\omega<\omega_{\min}$ знаменатель близок к нулю. Поэтому подставляя (25) с учетом последнего замечания в (21), получим формулу для определения собственных частот совместных колебаний, если сосредоточенная масса мала

$$\omega^2 = \omega^2_{\min}\left(\frac{1}{1+16\frac{M}{M_0}\sin^2\lambda_m \xi_1}\right)^{1/2}, \tag{26}$$

где $M_0 = 2\pi\rho Rl$ — масса оболочки.

Для другого крайнего случая, когда сосредоточенная масса большая, можно положить

$$\frac{d}{c^2} \to \infty, \quad \Theta = \frac{\pi}{4}. \tag{27}$$

Тогда

$$q_1 = q_2 = q = \frac{\sqrt[4]{d}}{4(d-c^2)^{1/2}} \approx \frac{1}{4\sqrt[4]{d}},$$

$$2\nu_1 = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{d}}{\sqrt[4]{d}-\sqrt{2}\lambda_m^2}, \quad 2\nu_2 = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{d}}{\sqrt[4]{d}+\sqrt{2}\lambda_m^2}, \tag{28}$$

$$r_1 = \left(\lambda_m^4 - \sqrt{2}\lambda_m^2\sqrt[4]{d}+\sqrt{d}\right)^{1/4},$$

$$r_2 = \left(\lambda_m^4 + \sqrt{2}\lambda_m^2\sqrt[4]{d}+\sqrt{d}\right)^{1/4}.$$

С учетом (28) величина прогиба в месте крепления массы

$$w(\xi_1, 0) = \frac{R}{l\sqrt[4]{d}} P \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin\lambda_m \xi_1 \left[\frac{(\rho_1+\sigma_1)(1+e^{-2\pi\rho_1})}{r_1^2(1-e^{-2\pi\rho_2})} + \frac{(-\rho_2+\sigma_2)(1+e^{-2\pi\rho_2})}{r_2^2(1-e^{-2\pi\rho_2})}\right]. \tag{29}$$

Подставляя (29) в (21), получим формулу для определения низшей частоты совместных колебаний при большой сосредоточенной массе

$$\omega^2 = \frac{\sqrt[4]{d}\, l}{RM} \frac{1}{\sum\limits_{m=1}^{\infty} A_m \sin\lambda_m \xi_1 \left[\frac{(\rho_1+\sigma_1)(1+e^{-2\pi\rho_1}}{r_1^2(1-e^{-2\pi\rho_1})} + \frac{(-\rho_2+\sigma_2)(1+e^{-2\pi\rho_2}}{r_2^2(1-e^{-2\pi\rho_2})}\right]} \tag{30}$$

В формуле (30) учет 3-х членов суммы дает достаточную для инженерных расчетов точность.

Функции мембранных и изгибных напряжений, соответствующие частоте ω, могут быть определены по известным зависимостям [2] и полученным формулам (18) и (20).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Даревский В. М., Шарипов И. Л.* Свободные колебания цилиндрической оболочки с сосредоточенной массой, труды VI Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластинок. Издательство Наука, М., 1966.
2. *Ониашвили О. Д* Некоторые динамические задачи теории оболочек. Изд-во АН СССР, М., 1957.
3. *Новацкий В.* Динамика сооружений. ГИЛСАСМ, Москва, 1963.
4. *Хофф Н., Кемпнер Ж., Пол Ф.* Линейная нагрузка, приложенная вдоль образующих тонкостенных круговых цилиндрических оболочек конечной длины. Сб-к переводов. Вопросы прочности цилиндрических оболочек, под редакцией В. М. Даревского, Оборонгиз, Москва, 1960.