Н. З. БАЛУХОВ, Е. М. МАРКУШИН

ЗАДАЧА РАУСА-ГУРВИЦА ДЛЯ КВАЗИПОЛИНОМА В ОДНОМ ЧАСТНОМ СЛУЧАЕ

При исследовании устойчивости решений дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом важным вопросом является вопрос о расположении нулей характеристических уравнений [1, 2, 3].

В работе рассматривается задача Рауса-Гурвица для квазиполинома, соответствующего дифференциальному уравнению с запаздыванием времени второго порядка, путем построения квадратичного функционала, введенного Н. Н. Красовским в работе [4].

1. Построение квадратичного функционала

Пусть движение некоторой системы описывается уравнением

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + a\frac{dx(t)}{dt} + bx(t) + cx(t-\tau) = 0, \tag{1.1}$$

где a, b, c — произвольные постоянные, τ — запаздывание времени ($\tau=\text{const}>0$). Уравнение (1.1) можно представить в виде двух уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= x_2(t), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= -bx_1(t) - cx_1(t-\tau) - ax_2(t), \end{aligned} \tag{1.2}$$

где $x_1(t) = x(t)$, $x_2(t) = \frac{dx(t)}{dt}$.

На основании разложения С. Н. Шиманова [3], системе (1.2) будет эквивалентна счетная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_i(t)}{dt} = \lambda_i y_i(t) \quad (i = 1, 2, \ldots), \tag{1.3}$$

где $y_i(t)$ — линейные функционалы.

$$y_i(t) = x_1(t) + \frac{1}{\lambda_i + a} x_2(t) - \frac{c}{\lambda_i + a} \int\limits_{-\tau}^{0} x_1(t + \vartheta) e^{-\lambda_i (\vartheta + \tau)} dv, \quad (1.4)$$

$\lambda_i (i = 1, 2, \ldots)$ — корни характеристического уравнения.

$$\Delta(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b + ce^{-\lambda\tau} = 0. \quad (1.5)$$

При этом предполагаем, что корни характеристического уравнения (1.5) простые. Решение системы (1.2) можно представить в виде ряда

$$\begin{aligned} x_1(t + \vartheta) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(\lambda_i + a) e^{\lambda_i \vartheta}}{\Delta'(\lambda_i)} y_i(t), \\ x_2(t + \vartheta) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i (\lambda_i + a) e^{\lambda_i \vartheta}}{\Delta'(\lambda_i)} y_i(t), \end{aligned} \quad (1.6)$$

где $\Delta'(\lambda_i)$ — производная от уравнения (1.4) при $\lambda = \lambda_i$.

Рассмотрим квадратичную форму

$$V = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\lambda_i + a)(\lambda_j + a)}{(\lambda_i + \lambda_j) \Delta'(\lambda_i) \Delta'(\lambda_j)} y_i y_j, \quad (1.7)$$

производная по времени от которой, в силу системы (1.3), равна

$$W = \left(\frac{dV}{dt}\right)_{(1.3)} = x_1^2(t). \quad (1.8)$$

Подставляя в (1.7) аналитические выражения функционалов y_i $(i = 1, 2, \ldots)$ (1.4), получим

$$\begin{aligned} V = {} & A_1 x_1^2(t) + A_2 x_1(t) x_2(t) + A_3 x_2^2(t) + \\ & + x_1(t) \int\limits_{-\tau}^{0} B_1(\vartheta) x_1(t + \vartheta) d\vartheta + x_2(t) \int\limits_{-\tau}^{0} B_2(\vartheta) x_1(t + \vartheta) d\vartheta + \\ & + \int\limits_{-\tau}^{0} \int\limits_{-\tau}^{0} K(\rho, \sigma) x_1(t + \rho) x_1(t + \sigma) d\rho\, d\sigma, \end{aligned} \quad (1.9)$$

где

$$A_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\lambda_i + a)(\lambda_j + a)}{(\lambda_i + \lambda_j) \Delta'(\lambda_i) \Delta'(\lambda_j)}, \quad (1.10)$$

$$B_1(\vartheta) = -2c \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\lambda_i + a) e^{-\lambda_i (\vartheta + \tau)}}{(\lambda_i + \lambda_j) \Delta'(\lambda_i) \Delta'(\lambda_j)}, \quad (1.11)$$

$$K(\rho, \sigma) = c^2 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_i (\tau+\rho)} e^{-\lambda_j (\tau+\sigma)}}{(\lambda_i + \lambda_j) \Delta'(\lambda_i) \Delta'(\lambda_j)}, \tag{1.12}$$

$$A_2 = \frac{1}{c} B_1(-\tau), \tag{1.13}$$

$$A_3 = \frac{1}{c} K(-\tau, -\tau), \tag{1.14}$$

$$B_2(\vartheta) = -\frac{2}{c} K(\vartheta, -\tau). \tag{1.15}$$

Из соотношений (1.12), (1.14) имеем

$$A_3 = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_i + \lambda_j) \Delta'(\lambda_i) \Delta'(\lambda_j)}. \tag{1.16}$$

Так как корни уравнения (1.5) простые, то [6]

$$\frac{1}{\lambda^2 + a\lambda + b + ce^{-\lambda\tau}} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda - \lambda_i) \Delta'(\lambda_i)} \tag{1.17}$$

на всей плоскости комплексного λ.
Тогда

$$A_3 = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\lambda_i^2 - a\lambda + b + ce^{\lambda_i \tau}\right) \Delta'(\lambda_i)}. \tag{1.18}$$

Замечая, что $\lambda_i (i = 1, 2, \ldots)$ корни уравнения (1.5) и аналогично суммируя ряд (1.18), получим

$$A_3 = \frac{1}{2k_1\left(k_1^2 - k_2^2\right)} \cdot \frac{\left(b + k_1^2\right) \operatorname{sh} k_1 \tau + ak_1 \operatorname{ch} k_1 \tau}{c + \left(b + k_1^2\right) \operatorname{ch} k_1 \tau + ak_1 \operatorname{sh} k_1 \tau} +$$

$$+ \frac{1}{2k_2\left(k_2^2 - k_1^2\right)} \cdot \frac{\left(b + k_2^2\right) \operatorname{sh} k_2 \tau + ak_2 \operatorname{ch} k_2 \tau}{c + \left(b + k_2^2\right) \operatorname{ch} k_2 \tau + ak_2 \operatorname{sh} \tau}, \tag{1.19}$$

где

$$k_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[a_2 - 2b \pm \sqrt{(a - 2b) - 4(b^2 - c^2)}\right]. \tag{1.20}$$

Вычисление остальных параметров функционала (1.9) можно провести аналогично работам [7,8].

2. Задача Рауса-Гурвица

Задача Рауса-Гурвица состоит в том, чтобы определить условия, которым должны подчиняться постоянные a, b, c, τ характеристического уравнения (1.5), для того, чтобы корни этого уравнения лежали налево от мнимой оси, т. е. имели отрицательные вещественные части. В этом случае все решения уравнения (1.1) будут асимптотически устойчивы.

Известно, что для того, чтобы решения уравнения были асимптотически устойчивы, необходимо и достаточно, чтобы квадратичный функционал $V[\varphi(\vartheta)]$ был меньше нуля, где $\varphi(\vartheta)$ $(-\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0)$ начальное возмущение уравнения (1.1) или что то же самое, системы (1.2). Тогда область асимптотической устойчивости решений уравнения (1.1) определится неравенством $V[\varphi(\vartheta)] < 0$. Пусть начальное возмущение уравнения (1.1) задано в виде

$$\varphi(\vartheta) = \begin{cases} 0 \text{ при } -\tau \leqslant \vartheta \leqslant -\varepsilon \\ \vartheta + \varepsilon \text{ при } -\varepsilon < \vartheta \leqslant 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

где ε — достаточно малое положительное число. Это возможно, так как среди начальных возмущений $y_i(t)$ $(i=1, 2,...)$ нет равных нулю.

Интегрируя соотношение (1.8), получим

$$V(\infty) - V(0) = \int_0^\infty x_1^2(t)\,dt. \tag{2.2}$$

Замечая в силу выбранного начального возмущения (2.1), что

$$V(\infty) = 0; \quad x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 1,$$

$$\int_{-\tau}^{0} \varphi(\vartheta)\,d\vartheta = 0,$$

получим

$$A_3 = -\int_0^\infty x_1^2(t)\,dt. \tag{2.3}$$

Тогда вместо $V[\varphi(\vartheta) < 0$ условие асимптотической устойчивости решений уравнения (1.1) можно представить в виде неравенства $A_3 < 0$; причем искомая область определяется первой сменой знака неравенства. В частном случае, при $b=0$ область устойчивости определится неравенством

$$\frac{\alpha_1 \operatorname{sh}\alpha_1\tau + a \operatorname{ch}\alpha_1\tau}{c + \alpha_1^2 \operatorname{ch}\alpha_1\tau + a\alpha_1 \operatorname{sh}\alpha_1\tau} - \frac{\alpha_2 \operatorname{sh}\alpha_2\tau + a \operatorname{ch}\alpha_2\tau}{c + \alpha_2^2 \operatorname{ch}\alpha_2\tau + a\alpha_2 \operatorname{sh}\alpha_2\tau} < 0.$$

Область асимптотической устойчивости может быть легко построена, используя условие (2.4). Для этого, положив $\tau=0$, строим область устойчивости для обыкновенного дифференциального уравнения; наименьшая область устойчивости определяется при $\tau \to \infty$.

Геометрическое построение области устойчивости в указанном случае приведено в работе [9].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чеботарев Н. Г. и Мейман Н. Н.* Проблема Рауса-Гурвица для полиномов и целых функций. Труды математического института им. В. А. Стеклова, т. 26, Изд. АН СССР, М. 1949.

2. *Понтрягин Л. С.* О нулях некоторых элементарных трансцендентных функций. Изв. АН СССР, серия матем., 6, 3 (1942), 115—134.

3. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. «Мир», 1967.

4. *Красовский Н. Н.* Об аналитическом конструировании оптимального регулятора в системе с запаздыванием времени. П. ММ., т. XXVI, вып. 1, 1962.

5. *Шиманов С. Н.* О неустойчивости движения систем с запаздыванием по времени. П. ММ, т. XXIV, вып. I, 1960.

6. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. т. IV. Физматгиз. 1960.

7. *Маркушин Е. М.* О вычислении квадратичных функционалов для систем с запаздыванием времени. Д. У., т. VII, № 2, 1971.

8. *Маркушин Е. М.* О вычислении квадратичного функционала в одном частном случае. Д. У., т. VII, № 2, 1971.

9. *Эльсгольц Л. Э.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. «Наука», 1964.