4. Pearson J. R. A., Petrie C. J. S. Proc. 4th Internat. Congr. Rheol., Providence, R. I., 1963. Part. 3. New York—London—Sydney, Interscience, 1965, 265.

5. **Иванилов Ю. П.** ПММ, 1960, **24**, 380.

6. Yih Chia—Shun. Phys. Fluids, 1963, **6**, 321. Русск. перевод: Механика. Период. сб. перев. ин. статей, 1963, 5, 77.

7. **Заварзин Н. В., Суязов В. М.** Редколлегия Инж.-физ. ж. АН БССР Минск, 1974. Рукопись деп. в ВИНИТИ, рег. № 2908-74 Деп.

УДК 539.376+532.135

Ю. П. Самарин

О ПРИМЕНЕНИИ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ К ИССЛЕДОВАНИЮ ПОЛЗУЧЕСТИ КОНСТРУКЦИЙ

1. Пусть имеется l однородных реономных тел, каждое из которых находится в однородном возмущающем поле. Уравнение состояния тела, рассматриваемого как управляемая система, имеет вид [1, 2]

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\eta^i(t)}{dt} = f^i(\eta^i(t),\ x^i(t));\ \eta^i(0) = 0;\\ &y^i(t) = \varphi^i(\eta^i(t),\ x^i(t));\ \varphi^i(0,\ 0) = 0,\ i = \overline{1,\ l}, \end{aligned}\right| \qquad (1)$$

здесь $x^i(t)$—управляющая (входная) вектор-функция со значениями в $D^i \subset R_{m_i}$; $\eta^i(t)$—вектор-функция со значениями в пространстве состояний $S^i \subset R^{s_l}$ (вектор η^i представляет собой набор фазовых координат); $y^i(t)$—наблюдаемая (выходная) вектор-функция со значениями в $Y^i \subset R^{n_i}$. В работе [2] показано, что уравнения вида (1) содержат, как частные случаи, все наиболее важные варианты теории ползучести.

Пусть далее реономные тела с уравнениями состояния (1) взаимодействуют друг с другом, т. е. между управляющими и наблюдаемыми координатами имеют место функциональные зависимости, в которые могут также входить заданные внешние нагрузки:

$$F_k(x^1,\ \ldots,\ x^l,\ y^1,\ \ldots,\ y^l,\ q_1,\ \ldots,\ q_m) = 0,\ k = \overline{1,\ m_0},$$

$$m_0 = \sum_{i=1}^{l} m_i. \qquad (2)$$

Совокупность уравнений (1) и (2) описывает дискретную конструкцию из управляемых систем. m_a—соответственно число внутренних, и m—внешних степеней свободы конструкции по управлению.

Равенства (2) отражают структуру конструкции, а уравнения (1) — свойства ее отдельных элементов. Примерами дискретных конструкций могут служить стержневые системы, некоторые многослойные конструкции при однородном напряженном состоянии в каждом слое и т. п.

С точки зрения теории управления равенства (2) представляют собой обратные связи, при помощи которых образуется m_0 координат управляющих функций. Действительно, после подстановки выражений $y^i = \varphi^i(\eta^i, x^i)$ из уравнения (1) в равенства (2) последние определяют функции:

$$x^i = \Phi^i(q_1, \ldots, q_m, \eta^1, \ldots, \eta^l), \quad i = \overline{1, l} \tag{3}$$

(соответствующий якобиан не должен обращаться в нуль). Соотношения (3) замыкают уравнения состояния (1), поскольку внешние воздействия $q_j(t)$ предполагаются известными.

Если в равенстве (2) не содержится наблюдаемых вектор-функций y^i, то конструкция называется определимой по управлению. В этом случае равенства (3) не содержат величин η^i, и конструкция расщепляется на отдельные элементы, т. е. уравнения состояния (1) для каждого реономного тела могут рассматриваться независимо.

Определимыми по управлению являются статически определимые стержневые системы с управлениями $x^i = \{\sigma^i, \vartheta^i\}$ при заданных внешних силах $q_j(t)$ (σ^i — напряжение, θ^i — температура в соответствующем стержне; температуры считаются известными). Сюда же относятся кинематически определимые стержневые системы, если $x^i = \{\varepsilon^i, \Theta^i\}$ и известны перемещения узлов $q_j(t)$ (ε^i — деформация стержня). Примерами неопределимых по управлению конструкций могут служить фланцевые соединения при $x^i = \{\sigma^i, \Theta^i\}$ и заданных перемещениях $q_j(t)$, а также конструкции, в которых необходимо рассмотрение связанных задач термоползучести.

2. **Теорема 1.** Дискретная конструкция из управляемых систем является управляемой системой с уравнением состояния:

$$\left.\begin{aligned} &\eta^{\cdot}(t) = f(\eta(t), q(t)); && \eta(0) = 0; \\ &y(t) = \varphi(\eta(t), q(t)), && \varphi(0, 0) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

причем вектор-функция внешних воздействий $q(t)$ принимает значения из множества $d \subset r^m$, $y(t)$ — из $Y \subset r^n$, $\eta(t)$ — из $S \subset r^s$, где $n = \sum_{i=1}^{l} n_i$; $s = \sum_{i=1}^{l} s_i$ (m и n считаются конечными, но допускается случай $s = \infty$ — [2]).

Доказательство основано на равенствах (1) и (3). Уравнения (4) служат обоснованием макроскопического подхода к исследованию деформирования дискретной конструкции, когда уравнение состояния конструкции строится без исследования деформирования ее отдельных элементов. Макроскопический подход в ряде случаев позволяет сократить объем необходимых экспериментальных работ.

Теорема 2. Если для каждого элемента дискретной конструкции выполняется гипотеза отделимости [2]:

$$y^i = \{\varphi^i_1(\eta^i),\ \varphi^i_2(x^i)\}, \qquad (s_i \quad \infty), \tag{5}$$

то определяющие уравнения конструкции можно привести к виду

$$\left.\begin{aligned} &\eta^{*\cdot} = f^*(\eta^*,\ x^*), \qquad \eta^*(0) = 0; \\ &y = \left\|\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right\| \left\|\begin{array}{c} \eta^* \\ \hline x^* \end{array}\right\|, \end{aligned}\right| \tag{6}$$

$$x^* = \Phi^*(q,\ \eta^*), \tag{7}$$

где $\eta^* = \eta^*(\eta) \in R^s$, $x^* = x^*(x) \in R^{m_0}$, A_1 и A_2 — постоянные $k_1 \times s$ и $k_2 \times m_0$ матрицы, $k_1 + k_2 = n$, $\operatorname{rang} A_1 = k_1$, $\operatorname{rang} A_2 = k_2$.

Доказательство аналогично доказательству предыдущей теоремы [2]. Равенство (7) следует из (3), если существует обратная функция для функции $\eta^*(\eta)$.

Теорема 3. Если дискретная конструкция определима по управлению и для всех ее элементов выполняется гипотеза отделимости (5), то определяющие уравнения приводятся к виду

$$\left.\begin{aligned} &\eta^{*\cdot} = f^*(\eta^*, = q^*); \quad \eta^*(0) = 0; \\ &y = \left\|\begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array}\right\| \left\|\begin{array}{c} \eta^* \\ \hline q^* \end{array}\right\|; \quad q^* = q^*(q) \in R^{m_0}, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

и уравнение состояния конструкции строится методом разделения деформации [3].

Для доказательства достаточно заменить, что если обратные связи (3) не содержат величин η^i, то в формуле (7) не содержатся η^*. После этого выражения (8) становятся очевидным следствием определяющих уравнений (6) и (7).

Теорема 4. Если для всех элементов неопределимой по управлению дискретной конструкции выполняется гипотеза отделимости (5), то уравнение состояния конструкции можно построить согласно методу разделения деформации, но с учетом зависимости мгновенно изменяющихся наблюдаемых координат от вектора пространства состояний.

Это доказывается подстановкой (7) в (6), причем мгновенно изменяющиеся координаты вектора y, отвечающие произведению $A_2 x^*$, зависят от η^*.

Теоремы 3 и 4 оправдывают применение метода разделения деформации [3, 4] при макроскопическом исследовании ползучести дискретных конструкций, если только уравнения состояния всех ее элементов построены тем же методом.

Для неопределимых по управлению конструкций наибольший прикладной интерес представляет случай, когда возможна линеаризация обратных связей (7)

$$x^* = q^*(q) + B(q)\,\eta^*, \tag{9}$$

где $B(q)$—зависящая от q матрица m_0xs. Равенство (9) выполняется с большой точностью при малых деформациях многих реальных конструкций. При этом слагаемое $B(q)\eta^*$ обусловливает дрейф мгновенно изменяющихся наблюдаемых координат за счет реологических эффектов. Это явление аналогично изменению упругой деформации при постоянном напряжении в процессе старения [4].

Таким образом, при помощи уравнений вида (6) и (9) можно описать деформирование довольно широкого класса дискретных механических конструкций. Дальнейшее упрощение структуры определяющих уравнений позволяет доказать теорему.

Теорема 5. Если для дискретной конструкции множество вектор-функций внешних воздействий зависит от конечного или счетного набора параметров

$$q = \varkappa(t,\ a); \qquad a = \{a_1,\ \ldots,\ a_r\}$$

($\varkappa$—заданная функция; допускается случай $r=\infty$), то система дифференциальных уравнений (4) может рассматриваться как расщепленная:

$$\dot{\eta}_i(t) = \Psi_i(\eta_i(t),\ a), \qquad i = 1,\ s.$$

Доказательство [2] подобно теореме 2.

3. Рассмотрим непрерывную конструкцию из управляемых систем. Введем некоторую односвязную область $\Omega \subset E^\kappa$, заполненную реономным материалом (E^κ—точечное, κ—мерное евклидово пространство; в соответствии с размерностью модели тела $\kappa = 1$, 2 или 3). На материал действует неоднородное управляющее векторное поле $x = x(t,\ r)$, где r—радиус-вектор точки в E^κ.

Если управляющее поле $x(t,\ r)$ при любом $t > 0$ непрерывно по совокупности пространственных координат, то в пределах элементарной области $d\Omega$ оно будет почти однородным. Поэтому в каждой точке области Ω в соответствии с (1) имеет место уравнение состояния:

$$\left.\begin{aligned} &\dot{\eta}(t,\ r) = f(\eta(t,\ r),\ x(t,\ r),\ r); && \eta(0,\ r) = 0; \\ &y(t) = \varphi_r[\eta(t,\ r),\ x(t,\ r)]; && \varphi_r[0,\ 0] = 0, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

где $\varphi_r[\cdot]$—вектор-функционал по пространственным координатам, $y(t)$—наблюдаемая вектор-функция (ее координатами, например, могут служить перемещения в дискретном множестве точек, энергия диссипации в Ω, критерий повреждаемости в опасной точке и т. п.). Размерности векторов x, η, y по аналогии с дискретной конструкцией обозначаются через m, s, n.

Предполагается, что функция $f(\eta, x, r)$ в (10) по аргументам η и x удовлетворяет условиям типа Липшица [2], а по r является непрерывной. Последнее отвечает слабонеоднородным материалам, к которым относятся некоторые смеси и композиты. Примером слабонеоднородного тела является стержень, изготовленный из двух отличающихся по реологическим свойствам металлов так, что концы стержня состоят из чистых металлов, а средняя часть—из сплава с непрерывно изменяющимися реологическими свойствами.

Управляющее поле $x(t, r)$ в каждый момент времени определяется векторным полем внешних воздействий $q(t, r)$ и достигнутым состоянием $\eta(t, r)$

$$x(t, r) = \Phi_r [q(t, r), \eta(t, r)], \tag{11}$$

где $\Phi_r[\cdot]$—некоторый оператор по пространственным координатам.

Равенство (11) выявляет структуру взаимодействия отдельных элементарных объемов среды и подобно (3) может быть истолковано как запись обратных связей, действующих в сплошной среде. Например, если $q(t, r)$ описывает температуру среды, объемные силы в Ω и напряжения на границе Ω, то равенство (11) должно рассматриваться как эквивалентная замена уравнений равновесия и уравнений совместности, при помощи которых можно определить напряженное состояние в каждой точке области Ω.

Совокупность уравнений (10) и (11) описывает непрерывную конструкцию из управляемых систем.

Если обратные связи (1) не содержат $\eta(t, r)$, то непрерывная конструкция называется определимой по управлению. Например, неоднородный стержень переменного сечения при действии продольной нагрузки, тонкая оболочка вращения при осесимметричном нагружении и др.

4. Пусть задано разбиение области Ω на непересекающиеся измеримые части $\Delta\Omega_i$. В большинстве задач функционал φ_r по физическому смыслу должен быть определен на каждом из множеств $\Delta\Omega_i$ и аддитивен по отношению к разбиению:

$$[\varphi_r]_{\bigcup\limits_i \Delta\Omega_i} = \sum_i [\varphi_r]_{\Delta\Omega_i}.$$

В силу непрерывности по пространственным координатам векторные поля $\eta(t, r)$ и $x(t, r)$ можно рассматривать в пределах каждого элементарного деления $d\Omega$ как однородные, и поэтому значение аддитивного функционала φ_r на $d\Omega$ определяется формулой

$$dy = \varphi(\eta, x, r)\, d\omega, \tag{12}$$

где φ — вектор-функция, $d\omega = \mu(d\Omega)$ — аддитивная метрическая характеристика подмножеств в Ω (для разных координат наблюдаемого вектора мера μ может иметь различный смысл).

Теорема 6. Если в каждой точке области Ω выполняется гипотеза отделимости

$$\varphi(\eta, x, r) = \{\varphi_1(\eta, r), \varphi_2(x, r)\}; \quad (s < \infty), \tag{13}$$

где φ_1 — непрерывно дифференцируемая вектор-функция с k_1 координатами и не равным нулю якобианом по некоторым k_1 переменным, η_i, φ_2—непрерывно дифференцируемая вектор-функция с k_2 координатами и неравным нулю якобианом по некоторым k_2 переменным x_i, $k_1 + k_2 = n$, то уравнение состояния (10) с аддитивным функционалом φ_r, определяемым согласно (12), можно привести к виду

$$\left.\begin{aligned} &\eta^{*\cdot}(t, r) = f^*(\eta^*(t, r), x^*(t, r), r), \ \eta^*(0, r) = 0; \\ &y(t) = \int_\Omega \left\| \begin{array}{c|c} A_1(r) & 0 \\ \hline 0 & A_2(r) \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} \eta^*(t, r) \\ \hline x^*(t, r) \end{array} \right\| d\omega, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

причем

$$\eta^* = \eta^*(\eta, r); \quad x^* = x^*(x, r).$$

Имеется в виду, что в соответствии с (12) структура интеграла $\int_\Omega \cdot d\omega$ в (14) для каждой координаты вектора y может быть различной (например, интегралы по дуге и по площади).

Доказательство выполняется подобно доказательству теоремы 1 [2].

Функция φ в (12) от времени явно не зависит—в этом заключается свойство стационарности наблюдения (см. (1) и [2]). Если φ не зависит явно от r, то наблюдение называется однородным. Свойство однородности наблюдения имеет место для широкого класса задач. При этом, очевидно, $\eta^* = \eta^*(\eta)$ и $x^* = x^*(x)$.

Теорема 7. Если для определимой по управлению непрерывной конструкции из однородного материала выполняется гипотеза отделимости (13), интегралы в (14) для различных координат вектора y имеют одну и ту же структуру и функция f^* в (14) линейна относительно η^* и x^*, то уравнение состояния конструкции можно привести к следующему виду:

$$\left.\begin{aligned} &H^\cdot(t) = AH(t) + BX(t); \quad H(0) = 0; \\ &y(t) = \left\| \begin{array}{c|c} A_1 & 0 \\ \hline 0 & A_2 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c} H(t) \\ \hline X(t) \end{array} \right\|, \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

где A, B, A_1, A_2 — постоянные матрицы.

$$H(t) = \int_\Omega \eta(t, r)\, d\omega; \quad X(t) = \int_\Omega \Phi_r[q(t, r)]\, d\omega. \tag{16}$$

Доказательство получается при помощи равенств (11) и (14). Следует отметить, что линейность функции f^* имеет место для довольно сложных уравнений состояния [3]. Это позволяет использовать метод разделения деформации для построения определяющих уравнений непрерывных конструкций частного вида.

Теорема 8. Если для непрерывной конструкции выполняются условия теоремы 7 и множество векторных полей внешних воздействий зависит от конечного или счетного набора параметров

$$q = \chi\,(t,\ r,\ a), \quad a = \{a_1,\ \ldots,\ a_r\}$$

(χ—заданная функция; допускается случай $r = \infty$), то система дифференциальных уравнений (15) расщепляется

$$H_i\,(t) = \Psi_i\,(H_i\,(t),\ a), \quad i = \overline{1,\ s}.$$

Доказательство выполняется аналогично доказательству теоремы 2 работы [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ли Э. Б., Маркус Л.** Основы теории оптимального управления. М., «Наука», 1972.
2. **Самарин Ю. П.** О применении теории управления к описанию деформирования реономных материалов. — В сб.: Дифференциальные уравнения и их приложения. Куйбышев, 1975, вып. 2 (Куйбышевский политехнический институт).
3. **Самарин Ю. П.** Об одном обобщении метода разделения деформации в теории ползучести. — «Изв. АН СССР. МТТ», 1971, № 3.
4. **Самарин Ю. П.** Применение метода разделения деформации в теории ползучести бетона. — В сб.: Механика. Новые разработки конструкций. Куйбышев, 1973. (Куйбышевский политехнический институт).

УДК 519.2

В. Б. Илюшин, Ю. В. Солодянников

К ОЦЕНКЕ РЕЗУЛЬТАТА СВЕРТКИ

Устройство наблюдения [1], участвующее в идентификации объекта, можно представить в виде структуры, изображенной на рис. 1. На вход устройства поступает сигнал x. Устройство состоит из отдельных блоков, каждый из которых вносит помеху измерений, являющуюся случайной величиной. В результате на выходе наблюдается величина z. Помеха измерений β_i, $i = \overline{1, m}$ каждого блока определяется своим распределением вероятностей. Распределение вероятностей суммарной помехи измерений $\beta_{(m)} = \beta_1 + \ldots + \beta_m$ является сверткой распределений вероятностей слагаемых помех, которые либо из-

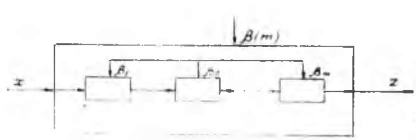

Рис. 1