МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

КУЙБЫШЕВСКИЙ ордена ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ имени АКАДЕМИКА С. П. КОРОЛЕВА

АЛГЕБРА МАТРИЦ

КУЙБЫШЕВ 1988

Министерство высшего и среднего специального
образования РСФСР

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени
авиационный институт имени академика С.П.Королева

А Л Г Е Б Р А   М А Т Р И Ц

У т в е р ж д е н о
редакционно-издательским
советом института
в качестве
методических указаний
для студентов

Куйбышев 1988

УДК 516(07)

В методических указаниях к расчетно-графической работе рассмотрены вопросы умножения и сложения матриц, вычисление обратной матрицы и ранга, а также некоторые методы вычисления определителей. Приводится к каждой теме 3I вариант заданий.

Предназначены для студентов первого курса КуАИ специальности 0646, 0647, 070I, 070[illegible].

Рецензенты: В.Г.Г у м е р о в, В.В.А з о в с к и й

Составитель Ольга Сергеевна И в а н о в а

АЛГЕБРА МАТРИЦ

Редактор Л.М.Б а л ы к о в а
Техн.редактор Н.М.К а л е н ю к
Корректор А.П.З а х а р д и е в а

Подписано в печать 26.0I.88 г. Формат 60x84 I/I6.
Бумага оберточная белая. Печать оперативная.
Усл.п.л. I,4. Уч.-изд.л. I,2. Т. 500 экз.
Заказ № 3593 Бесплатно.

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени авиационный институт имени академика С.П.Королева, г. Куйбышев, ул. Молодогвардейская, I5I.

Тип.им.В.П.Мяги Куйбышевского полиграфического объединения. 443099, г. Куйбышев,ул.Венцека,60.

I. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

I.I. Матрица. Основные понятия

I.I.I. Теоретические сведения

<u>Определение I</u>. Произвольная совокупность действительных или комплексных чисел a_{pk}, расположенная в виде таблицы, содержащей s строк и n столбцов, называется матрицей с размерами $s \times n$ и обозначается одним из следующих символов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s1} & a_{s2} & & a_{sn} \end{pmatrix} = \|a_{pk}\|_{s\times n} = \|a_{pk}\|_{\substack{p=\overline{1,s}\\ k=\overline{1,n}}}.$$

<u>Определение 2</u>. Две матрицы $A=\|a_{pk}\|_{s\times n}$ и $\mathcal{B}=\|b_{pk}\|_{s\times n}$ называются равными, если $a_{pk}=b_{pk}$, $p=\overline{1,s}$, $k=\overline{1,n}$. Если число столбцов матрицы A равно I, то такую матрицу называют матрицей-столбцом и записывают

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_s \end{pmatrix} = \|a_p\|_{s\times 1}.$$

Число элементов в матрице-столбце называется его высотой. Аналогично в матрице с размерами $1\times n$, т.е. в матрице-строке, индексы нужны только для нумерации столбцов, поэтому ее будем обозначать

$$A = (a_1, a_2, \dots, a_n) = \|a_k\|_{1\times n}.$$

Число элементов в матрице-строке называется ее длиной.

<u>Определение 3</u>. Матрица $\mathcal{B}=\|b_{kp}\|_{n\times s}$ называется транспонированной по отношению к матрице $A=\|a_{pk}\|_{s\times n}$, если $b_{kp}=a_{pk}$, $\forall p=\overline{1,s}$, $k=\overline{1,n}$. При этом матрицу B принято обозначать символом A^T, а операцию перехода от матрицы A к матрице A^T называть транспонированием.

I.2. Линейные операции над матрицами. Умножение матриц

I.2.I. Теоретические сведения

Рассмотрим две матрицы $A=\|a_{pk}\|_{s\times n}$ и $\mathcal{B}=\|b_{pk}\|_{s\times n}$ с действительными или комплексными элементами.

Определение I. Суммой матриц A и B называется матрица $C=\|c_{pk}\|_{s\times n}$, где $c_{pk}=a_{pk}+b_{pk}$, $\forall p=\overline{1,s}$, $k=\overline{1,n}$, которая обозначается символом $C=A+B$.

Определение 2. Произведением числа α на матрицу A называется матрица $D=\|d_{pk}\|_{s\times n}$, $d_{pk}=\alpha a_{pk}$, $\forall p=\overline{1,s}$, $k=\overline{1,n}$, которая обозначается символом $D=\alpha A$ или $D=A\alpha$.

Свойства линейных операций над матрицами. Для любых матриц A, B, C и любых чисел α, β:

I°. $A+\mathcal{B}=\mathcal{B}+A$.

2°. $(A+\mathcal{B})+C=A+(\mathcal{B}+C)$.

3°. $\alpha(A+\mathcal{B})=\alpha A+\alpha\mathcal{B}$.

4°. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$.

5°. $(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)$.

6°. $1\cdot A=A$.

7°. Существует матрица Θ такая, что $A+\Theta=A$.

8°. Существует матрица $\mathcal{B}$ такая, что $A+\mathcal{B}=\Theta$.

Замечание. Доказательство свойств I°–8° может быть выполнено студентами в качестве упражнения.

Определение 3. Матрица $G=\|g_{pk}\|_{s\times n}$ называется произведением матрицы $A=\|a_{p\ell}\|_{s\times m}$ и матрицы $\mathcal{B}=\|b_{\ell k}\|_{m\times n}$, если ее элементы определяются по формуле

$$g_{pk}=\sum_{\ell=1}^{m} a_{p\ell}\, b_{\ell k}\,,\quad p=\overline{1,s},\ k=\overline{1,n}\,. \qquad \text{(I)}$$

Обозначение. $G=A\mathcal{B}$.

Для запоминания формулы (I) воспользуемся схемой

Таким образом, можно сказать, что элемент g_{pk} произведения матриц AB равен сумме произведений элементов p -й строки первой матрицы на соответствующие элементы k -го столбца второй матрицы.

З а м е ч а н и е. Произведение AB определено только для таких матриц, у которых число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.

Свойства произведения матриц. Если определены левые части равенств, то определены их правые части, причем

1°. $A(BC)=(AB)C$.

2°. $A(B+C)=AB+AC$, $(A+B)C=AC+BC$.

3°. $A(\alpha B)=(\alpha A)B=\alpha(AB)$.

4°. $(AB)^T=B^TA^T$.

З а м е ч а н и е. Свойства 1°–4° предлагается доказать студентам в качестве упражнения.

Определение 4. Матрица $E=\|e_{pk}\|_{n\times n}$ называется единичной, если для любой матрицы $A=\|a_{pk}\|_{n\times n}$ имеет место равенство

$$AE=EA=A. \qquad (2)$$

Данному определению удовлетворяет матрица $E=\|\nu_{pk}\|_{n\times n}$, где

$$\nu_{pk} = \begin{cases} 1, \text{ если } p=k \\ 0, \text{ если } p\neq k \end{cases}$$

и можно показать, что матрица, обладающая свойством (2) единственна.

П р и м е р. Найти значение многочлена $f(C)$ от матрицы C, если

$$f(x)=x^2-2x+5;\ C=AB;\ A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}.$$

Решение. По формуле (1) найдем элементы произведения матриц:

$$C=AB=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot1+(-3)\cdot0+1\cdot2 & 2\cdot1+(-3)\cdot1+1\cdot(-1)\\ 0\cdot1+1\cdot0+2\cdot2 & 0\cdot1+1\cdot1+2\cdot(-1)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 4 & -1\end{pmatrix};$$

$$C^2 = CC = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot4+(-2)\cdot4 & 4\cdot(-2)+(-2)\cdot(-1) \\ 4\cdot4+(-1)\cdot4 & 4\cdot(-2)+(-1)\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ 12 & -7 \end{pmatrix};$$

$$f(C) = C^2 - 2C + 5E = \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ 12 & -7 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 8-8+5 & -6+4+0 \\ 12-8+0 & -7+2+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

I.2.2. Расчетные задания

Найти значение многочлена $f(C)$ от матрицы C, если $C = AB$.

I. $f(x) = x^2 + 3x - 4$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$;

2. $f(x) = 3x^3 - 4$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$;

3. $f(x) = 2x^2 + 3$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; $\mathcal{B} = E$;

4. $f(x) = 2x^2 - x + 3$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$;

5. $f(x) = -2x^2 + 3x - 5$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

6. $f(x) = -2x^2 + 5$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; $\mathcal{B} = E$;

7. $f(x) = x^2 - 5x + 1$, $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$;

8. $f(x) = 2x^2 + 6x - 1$, $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$;

9. $f(x) = x^2 - 4x + 2$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;

I0. $f(x)=-3x^2+4,\qquad A=\begin{pmatrix}2&0&3\\1&1&1\\0&-1&-1\end{pmatrix};\quad B=E;$

II. $f(x)=3x^2-x+2,\qquad A=\begin{pmatrix}-1&-1&2\\1&-1&0\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}2&0\\1&-1\\-1&0\end{pmatrix};$

I2. $f(x)=-5x^2+2x-1,\qquad A=\begin{pmatrix}2&-2&-1\\-1&0&1\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\\1&1\end{pmatrix};$

I3. $f(x)=4x^2-x-2,\qquad A=\begin{pmatrix}-3&0&1\\0&3&1\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\\1&0\end{pmatrix};$

I4. $f(x)=-2x^2+5;\qquad A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&0&-1\\3&1&0\end{pmatrix};\quad B=E;$

I5. $f(x)=-x^2+2x-1;\qquad A=\begin{pmatrix}-1&0&-3\\0&2&-1\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\\-1&0\end{pmatrix};$

I6. $f(x)=2x^2+x+1,\qquad A=\begin{pmatrix}-1&0&-1&1\\1&1&0&1\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}1&-1\\2&2\\0&0\\0&1\end{pmatrix};$

I7. $f(x)=2x^3-1,\qquad A=\begin{pmatrix}3&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\\0&2\end{pmatrix};$

I8. $f(x)=-3x^2+x+2,\qquad A=\begin{pmatrix}-1&0&1\\3&1&1\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}1&0\\3&0\\1&3\end{pmatrix};$

I9. $f(x)=3x^2-4,\qquad A=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&-1&2\\1&0&3\end{pmatrix};\quad B=E;$

20. $f(x)=-x^2+2x-3,\qquad A=\begin{pmatrix}1&-3&0\\1&0&-3\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\\1&-1\end{pmatrix};$

2I. $f(x)=3x^3-5,\qquad A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&-1\end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix}3&0\\0&-3\\1&0\end{pmatrix};$

22. $f(x)=5x^2-x+3$, $A=\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&2&1&0\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1&0\\-1&0\\0&-1\\-1&0\end{pmatrix}$;

23. $f(x)=3x^2-2x-2$, $A=\begin{pmatrix}2&2&1\\1&2&2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}3&-1\\1&1\\-1&3\end{pmatrix}$;

24. $f(x)=-3x^2-2$, $A=\begin{pmatrix}-2&1&1\\0&1&0\\-1&0&0\end{pmatrix}$; $B=E$;

25. $f(x)=-x^2+2x-5$, $A=\begin{pmatrix}0&5&1&2\\0&0&-1&1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}5&4\\1&-1\\2&2\\0&1\end{pmatrix}$;

26. $f(x)=2x^2-x+3$, $A=\begin{pmatrix}0&-3&1&1\\1&0&0&2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\\-1&1\\2&2\end{pmatrix}$;

27. $f(x)=4x^2+x-3$, $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&-1&1\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\\0&1\end{pmatrix}$;

28. $f(x)=4x^2-x-2$, $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}0&1\\2&0\\1&-1\end{pmatrix}$;

29. $f(x)=4x^2-1$, $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&-1&-1\end{pmatrix}$; $B=E$;

30. $f(x)=4x^2+2x-1$, $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&-3&0\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}3&1\\0&3\\-1&0\end{pmatrix}$;

31. $f(x)=4x^2-2x+1$, $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\1&-1&2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1&2\\1&0\\1&0\end{pmatrix}$.

1.3. Определители

1.3.1. Теоретические сведения

Рассмотрим n различных натуральных чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, причем

$\forall k=\overline{1,n}$, $1\leqslant \alpha_k \leqslant n$.

Тогда запись α_1, α_2, ..., α_n есть перестановка n чисел I, 2,..., n, которую обычно называют перестановкой n -го порядка.

Определение I. Числа p, k образуют беспорядок в перестановке n -го порядка, если число p стоит левее числа k и $p>k$. Обозначим $I(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ число всех беспорядков в перестановке n -го порядка α_1, α_2, ..., α_n.

Определение 2. Определителем n -го порядка, соответствующим матрице $A=\|a_{pk}\|_{n\times n}$ (квадратной матрице), называется сумма $n!$ слагаемых

$$(-1)^{I(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)} a_{\alpha_1 1} a_{\alpha_2 2}\cdots a_{\alpha_n},$$

где сумма берется по всем перестановкам из n чисел α_1, α_2, ..., α_n:

$$\sum(-1)^{I(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)} a_{\alpha_1 1} a_{\alpha_2 2}\ldots a_{\alpha_n n}. \tag{3}$$

Определитель обозначается одним из следующих символов

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=|A|=\det A=\det\|a_{pk}\|_{n\times n}.$$

На практике часто встречаются определители 2-го и 3-го порядков. Из формулы (3) при $n=2$ имеем

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}. \tag{4}$$

(4) называется определителем 2-го порядка.

Из формулы (2) при $n=3$ имеем определитель 3-го порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}- \\ -a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33} \tag{5}$$

Существует ряд правил, облегчающих составление выражения в правой части формулы (5). Рассмотрим некоторые из них.

I. Составим таблицу (Саррюса)

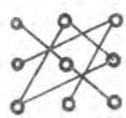
$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - + & + & + \end{array},$$

полученную из элементов матрицы A третьего порядка, если дописать к ней справа первый и второй столбцы. Для вычисления определителя надо взять три произведения элементов, соответствующие прямым, параллельным главной диагонали, со знаком плюс, а три произведения, соответствующие прямым, параллельным побочной диагонали, со знаком минус.

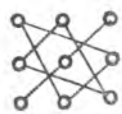
2. Первое слагаемое в (5) – произведение элементов главной диагонали матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

каждое из двух других – произведение элементов, лежащих на параллели к этой диагонали, и элемента из противоположного угла матрицы (рис. I), а слагаемые, входящие в формулу (5) со знаком минус, строятся таким же образом, но относительно второй (побочной) диагонали (рис. 2).



Р и с. I.



Р и с. 2.

Это правило называется правилом треугольника или правилом звездочки. Если в матрице $A = \|a_{pk}\|$ зачеркнуть p -ю строку и k -й столбец, то получим матрицу $(n-1)$ -го порядка. Определитель этой матрицы называется минором элемента a_{pk} матрицы A и обозначается M_{pk} . Алгебраическим дополнением элемента a_{pk} определителя матрицы $A = \|a_{pk}\|_{n \times n}$ называется величина $(-1)^{p+k} M_{pk}$ и обозначается

$$A_{pk} = (-1)^{p+k} M_{pk}, \; p, k = \overline{1,n} .$$

Свойства определителей n -го порядка. I°. Определитель не меняется при транспонировании, т.е.

$$\det A = \det A^T.$$

З а м е ч а н и е. Дальнейшие свойства справедливы и для строк определителя.

2°. При перестановке двух столбцов определитель меняет знак.

3°. Определитель с двумя одинаковыми столбцами равен нулю.

4°. Общий множитель всех элементов некоторого столбца можно вынести за знак определителя.

5°. Если все элементы k -го столбца определителя Δ имеют вид $a_{pk} = a'_{pk} + a''_{pk}, p=\overline{1,n}$, то $\Delta = \Delta' + \Delta''$, где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a'_{1k} + a''_{1k} \cdots a_{1n} \\ a_{21} \cdots a'_{2k} + a''_{2k} \cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{21} \cdots a'_{nk} + a''_{nk} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}, \Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a'_{1k} \cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{21} \cdots a'_{2k} \cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} \cdots a'_{nk} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}, \Delta'' = \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a''_{1k} \cdots a_{1n} \\ a_{21} \cdots a''_{2k} \cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} \cdots a''_{nk} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

6°. Если некоторый столбец состоит из нулей, то определитель равен нулю.

7°. Определитель не изменится, если к элементам одного из его столбцов прибавить соответствующие элементы любого другого столбца, умноженные на некоторое число.

8°. Определитель равен сумме произведений элементов какого-либо столбца на алгебраические дополнения этих элементов, т.е.

$$\det A = \sum_{p=1}^{n} a_{pk} A_{pk}, \ k = \overline{1,n}.$$

9°. Сумма произведений всех элементов какого-либо столбца определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другого столбца равна нулю, т.е.

$$\sum_{p=1}^{n} a_{pk} A_{p\ell} = 0, \ \ell \neq k, \ \ell = \overline{1,n}.$$

Из свойств определителя и определения произведения матриц вытекает теорема.

Т е о р е м а I. Если $A = \|a_{pk}\|_{n \times n}$, $\mathcal{B} = \|b_{pk}\|_{n \times n}$, то $\det A\mathcal{B} = \det A \det \mathcal{B}$.

I.3.2. Основные методы вычисления определителей

Метод приведения к треугольному виду. Этот метод состоит в том, что определитель преобразуется к такому виду, когда элементы, стоящие по одну сторону от главной (побочной) диагонали, равны нулю. Последний определитель равен произведению элементов главной диагонали (побочной диагонали, умноженной на $(-1)^{n(n-1)/2}$).

Пример I. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Решение. Прибавим к I-му столбцу все остальные, получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Умножим I-ю строку на -I и сложим со всеми остальными, получим треугольный определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix},$$

который равен произведению элементов главной диагонали, т.е.

$$\Delta = 6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 48.$$

Метод понижения порядка основан на использовании свойства 8^0 из пункта I.3.I. Формула разложения определителя по столбцу (или строке) принимает особенно простой вид, когда в этом столбце (или строке) все элементы равны нулю, кроме одного. Предположим $a_{pk} \neq 0$, тогда

$$\Delta = a_{pk} A_{pk} = a_{pk} (-1)^{p+k} M_{pk},$$

т.е. вычисление определителя n -го порядка Δ сводится к вычислению единственного определителя $(n-1)$ -го порядка M_{pk} . В наперед заданном определителе Δ может не оказаться столбца или строки с нужным количеством нулей, но, не изменяя величины определителя, можно преобразовать его так, чтобы в выбранном (по желанию) столбце (или строке) все элементы, кроме одного, обратились в нуль.

З а м е ч а н и е. Следует обратить внимание на то, что все преобразования определителя легче производить с целыми числами. Поэтому элемент столбца (строки), который остается в этом столбце(строке), отличном от нуля, если возможно, выбирают равным I.

Пример 2. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение. Во 2-й строке определителя уже имеется два нуля, поэтому займемся именно этой строкой. Постараемся, не изменяя величины определителя, преобразовать его так, чтобы все элементы 2-й строки, кроме $a_{24} = 1$, обратились в нуль. Для этого умножим 4-й столбец на 2, сложим со 2-м и запишем на место второго. Умножим 4-й столбец на −2 , сложим с 3-м и запишем на место 3-го, получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 7 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Разлагая его по 2-й строке, получим

$$\Delta = 1\cdot(-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 7 & 1 \end{vmatrix}.$$

В полученном определителе 4-го порядка удобно выбрать 2-й столбец, так как в нем есть один нуль и элементы невелики. Преобразуем определитель так, чтобы во втором столбце все элементы, кроме a_{12} = −I, стали равными нулю. Для этого I-ю строку умножим на −I и −2 и сложим соответственно с 3-й и 4-й строками:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

Разлагая определитель по 2-му столбцу, получим

$$\Delta = (-1)(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}.$$

Разлагая последний определитель по 1-му столбцу, получим

$$\Delta = (-1)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1.$$

1.3.3. Расчетные задания

Вычислить определитель 4-го порядка.

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$ 2. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 2 & -3 \end{vmatrix}.$ 3. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}.$

4. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & -5 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 5 & -6 & -12 \end{vmatrix}.$ 5. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 & 2 \\ -3 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -5 \end{vmatrix}.$ 6. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & -1 & -4 \end{vmatrix}.$

7. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$ 8. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 & -1 \\ 4 & 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}.$ 9. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 & 5 \\ -3 & 5 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 4 \\ -2 & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$

10. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & -1 & 5 \end{vmatrix}.$ 11. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$ 12. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & -6 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}.$

13. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$.

14. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$.

15. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$.

16. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$.

17. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & 4 \\ -2 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

18. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}$.

19. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$.

20. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$.

21. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

22. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 5 & -6 & 1 \end{vmatrix}$.

23. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

24. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

25. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & -2 \end{vmatrix}$.

26. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 & -2 \\ 3 & -5 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

27. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

28. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

29. $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$.

30. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 11 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

31. $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 10 & 9 & 7 \\ 3 & 8 & 9 & 2 \end{vmatrix}$.

I.4. Ранг матрицы

Пусть дана матрица $A=\|a_{pk}\|_{s\times n}$. Зафиксируем в ней некоторое число r столбцов и такое же число строк. Элементы, стоящие на пересечении выделенных столбцов и строк, образуют квадратную матрицу r -го порядка. Ее определитель называется минором r -го порядка матрицы A .

Определение I. Наивысший порядок отличного от нуля минора матрицы A называется рангом этой матрицы и обозначается одним из символов

$$RgA = rang\,A = r(A).$$

Если все элементы матрицы A равны нулю, то считается, что $RgA = 0$

Определение 2. Минор матрицы A, отличный от нуля, порядок которого равен рангу матрицы, называется базисным. Ясно, что в матрице может быть несколько разных базисных миноров. Столбцы и строки, на пересечении которых находится базисный минор, называются базисными. Перебирать все миноры в поисках базисного - задача, связанная с большими вычислениями, если размеры матрицы не очень малы. Поэтому проще находить ранг матрицы с помощью элементарных преобразований.

Определение 3. Назовем элементарными преобразованиями матрицы следующие преобразования:

I) умножение столбца на число, отличное от нуля;

2) прибавление к одному столбцу другого столбца;

3) перестановка столбцов;

4) те же преобразования строк.

Т е о р е м а I. Элементарные преобразования не меняют ранга матрицы.

Определение 4. Минор $\tilde{M}$ матрицы A называется окаймляющим для минора M матрицы A, если порядок $\tilde{M}$ на единицу больше порядка M и все элементы M принадлежат $\tilde{M}$.

Т е о р е м а 2. Если матрица A имеет отличный от нуля минор M порядка r и все окаймляющие миноры $(r+1)$ -го порядка равны нулю, то ранг матрицы A равен r .

Пример. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & 4 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 6 & 5 & -7 \\ 7 & 0 & 7 & 7 & -11 \end{pmatrix}.$$

Решение. I способ. Метод элементарных преобразований.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & 4 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 6 & 5 & -7 \\ 7 & 0 & 7 & 7 & -11 \end{pmatrix} \rightarrow$$

Поменяем местами I-ю и 2-ю строки, чтобы на месте элемента a_{11} оказалась единица:

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & -4 \\ 5 & 1 & 6 & 5 & -7 \\ 7 & 0 & 7 & 7 & -11 \end{pmatrix} \rightarrow$$

Будем умножать I-ю строку матрицы на -2, -5, -7 и прибавлять соответственно ко 2-й, 3-й, 4-й строкам, получим

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & -7 & 5 & -6 \\ 0 & -14 & -14 & 10 & -12 \\ 0 & -21 & -21 & 14 & -18 \end{pmatrix} \rightarrow$$

Умножим 2-ю строку на -2 и -3 и прибавим соответственно к 3-й и 4-й строкам, получим

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & -7 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

Поменяем местами 3-ю и 4-ю строки и 3-й и 4-й столбцы, получим

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & -7 & 5 & -7 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг последней матрицы равен 3, так как не существует минора 4-го порядка, отличного от нуля, следовательно, таков же ранг и исходной матрицы.

2-й способ. Метод окаймляющих миноров.

Фиксируем минор 2-го порядка, отличный от нуля:

$$M_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7 \neq 0.$$

Следовательно, $RgA \geq 2$.
Миноров 3-го порядка, окаймляющих M_2, будет 6. Будем вычислять их последовательно.

$$M_3^{(1)} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 7 & 0 & 7 \\ 7 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 0;$$

$$M_3^{(2)} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 5 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 7 & 0 & 8 \\ 7 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 0; \quad M_3^{(3)} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & -7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 7 & 0 & -11 \\ 7 & 0 & -11 \end{vmatrix} = 0;$$

$$M_3^{(4)} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 7 & 0 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 7 & 0 & 7 \\ 7 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 0; \quad M_3^{(5)} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 7 & 0 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 7 & 0 & 8 \\ 7 & 0 & 7 \end{vmatrix} = -7 \neq 0.$$

Следовательно, $RgA \geq 3$, и нужно вычислять окаймляющие миноры для $M_3^{(5)} \neq 0$. Но оба минора

$$M_4^{(1)} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & -1 \\ 5 & 1 & 6 & 5 \\ 7 & 0 & 7 & 7 \end{vmatrix} = 0; \qquad M_4^{(2)} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 5 & -7 \\ 7 & 0 & 7 & -11 \end{vmatrix} = 0.$$

Поэтому (теорема 2) ранг A равен 3, а базисным минором является, например, $M_3^{(5)}$.

З а м е ч а н и е. Шестой окаймляющий минор для M_2 искать не следует, так как мы нашли минор 3-го порядка, отличный от нуля.

I.4.I. Р а с ч е т н ы е з а д а н и я

Найти ранг матрицы.

I. $$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & -3 & 2 & 4 & 5 \\ 6 & -3 & 4 & 8 & 13 \\ 4 & -2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. $$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 9 & 6 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & 5 & -4 & 3 \\ 1 & 2 & 7 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. $$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. $$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 9 & 8 & 3 \\ 3 & 7 & 7 & 2 \\ 5 & 7 & 9 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. $$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 2 & 7 \\ 6 & 4 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & -11 \\ 6 & 4 & 1 & 4 & -13 \end{pmatrix}.$$

7. $$A=\begin{pmatrix} 2 & 7 & 4 & 5 & 8 \\ 4 & 4 & 8 & 5 & 4 \\ 1 & -9 & -3 & -5 & -14 \\ 3 & 5 & 7 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

8. $$A=\begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 & 4 & 9 \\ 3 & -1 & 2 & 6 & 3 \\ 6 & -2 & 5 & 20 & 3 \end{pmatrix}.$$

9. $$A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & 9 & 6 \\ 9 & 8 & 5 & 6 & 9 \\ 3 & 8 & 7 & 30 & 15 \\ 6 & 6 & 4 & 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

10. $$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -7 & 5 \\ 6 & -3 & 1 & -4 & 7 \\ 4 & -2 & 14 & -31 & 18 \\ 6 & -3 & 17 & -38 & 23 \end{pmatrix}.$$

11. $$A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & -8 & 8 & -6 \\ 4 & 3 & -9 & 9 & -5 \\ 2 & 3 & -5 & 7 & -3 \\ 1 & 8 & -7 & 12 & -6 \end{pmatrix}.$$

12. $$A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 6 & -4 & 4 & 3 & 3 \\ 9 & -6 & 3 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 8 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

13. $$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

14. $$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ -2 & 3 & -7 & 8 \\ 3 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

15. $$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -3 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

16. $$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

17. $$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

18. $$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -10 & -15 & -2 \end{pmatrix}.$$

19. $$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & -1 & 5 \\ -1 & 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

20. $$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 9 & 0 & 12 \\ 4 & 0 & 4 & 4 & 12 \\ 1 & 2 & 5 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

21. $$A = \begin{pmatrix} 3 & I & -4 & I & 2 \\ I & I & 3 & -2 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & -3 & 2 \\ 7 & 3 & -5 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

22. $$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -I & I & 0 \\ 6 & I & 2 & 3 & I \\ I & I & -I & 0 & I \\ 4 & 3 & -2 & I & I \end{pmatrix}.$$

23. $$A = \begin{pmatrix} 4 & I & 2 & -3 & 0 \\ 2 & I & 3 & 0 & I \\ 2 & 0 & I & -I & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

24. $$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & I & 0 \\ 2 & I & 0 & -I & -I \\ I & I & 2 & 3 & 2 \\ 2 & I & 0 & -I & -I \end{pmatrix}.$$

25. $$A = \begin{pmatrix} 2 & I & 3 & 5 & 0 \\ -I & -I & I & 0 & 2 \\ 0 & -I & 5 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & 8 & IO & 4 \end{pmatrix}.$$

26. $$A = \begin{pmatrix} I & 2 & 4 & I \\ I & 6 & 8 & 5 \\ -2 & 0 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 6 & -3 \\ 5 & I & II & -4 \end{pmatrix}.$$

27. $$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & I & -I & -I \\ I & I & 2 & 5 \\ 0 & -I & 3 & 5 \\ -I & 0 & I & 2 \end{pmatrix}.$$

28. $$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & I & 0 & -2 \\ I & 2 & 3 & 2 & -I \\ -I & I & 2 & I & 0 \\ 3 & 2 & -4 & -3 & -I \end{pmatrix}.$$

29. $$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & I \\ -I & 4 & 0 & 2 & -I \\ 3 & I & 0 & 2 & 3 \\ 3 & -I & 3 & -2 & -I \end{pmatrix}.$$

30. $$A = \begin{pmatrix} 4 & I & 2 & 7 \\ -2 & -I & 0 & -3 \\ -2 & 2 & -6 & -6 \\ 2 & 3 & -4 & I \\ 6 & I & 4 & II \end{pmatrix}.$$

31. $$A = \begin{pmatrix} 3 & -I & I & 3 \\ I & -I & -I & -I \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & I & 5 & 9 \\ I & 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

I.5. Обратная матрица

I.5.I. Теоретические сведения

Определение I. Квадратная матрица B называется обратной по отношению к матрице A таких же размеров, если

$$AB = BA = E.$$

Обратная матрица обозначается символом A^{-1} .
Можно доказать, что существует не более одной обратной матрицы.

Определение 2. Квадратная матрица A называется невырожденной, если

$$\det A \neq 0.$$

Теорема I. Для того, чтобы для матрицы A существовала обратная, необходимо и достаточно, чтобы матрица A была невырожденной. Пусть дана невырожденная матрица $A = \| a_{pk} \|_{n \times n}$. Тогда элементы обратной матрицы $A^{-1} = \| b_{pk} \|_{n \times n}$ вычисляются по формуле

$$b_{pk} = \frac{A_{kp}}{\det A}, \quad k, p = \overline{1,n}, \tag{6}$$

где A_{kp} – алгебраическое дополнение элемента a_{kp} .

Матрица

$$C = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \tag{7}$$

называется присоединенной к матрице A и

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} C. \tag{8}$$

Замечание. Следует обратить внимание на то, что в матрице C алгебраические дополнения к элементам i -й строки матрицы A расположены в i -м столбце.

Свойства обратных матриц

1°. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

2°. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

Обратную матрицу можно находить методом элементарных преобразований, который заключается в следующем. Для данной матрицы A n -го порядка построим прямоугольную матрицу $\Gamma_A = (A|E)$ размера $n \times 2n$, приписывая к A справа единичную матрицу. Далее, используя элементарные преобразования над строками матрицы, приводим матрицу Γ_A к виду $(E|B)$, что всегда возможно, если A невырождена.

Тогда $A^{-1}=B$.

Пример. Методом присоединенной матрицы найти A^{-1}, если

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Имеем $\det A=5\neq 0$. Найдем алгебраические дополнения соответствующих элементов матрицы A.

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1; \quad A_{21}=-\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=3; \quad A_{31}=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-2;$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-3; \quad A_{22}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1; \quad A_{32}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1;$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1; \quad A_{23}=-\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-2; \quad A_{33}=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=3.$$

Согласно формуле (7), присоединенная матрица C имеет вид:

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

По формуле (8) обратная матрица

$$A^{-1}=\frac{1}{5}C=\begin{pmatrix} 1/5 & 3/5 & -2/5 \\ -3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

Пример. Методом элементарных преобразований найти A^{-1}, если

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -7 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Образуем матрицу

$$\Gamma_A=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -7 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\longrightarrow.$$

Умножим 1-ю строку на -2 и -1, сложим соответственно со 2-й и 3-й строками, получим

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -9 & 4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to .$$

Разделим 2-ю строку на -3 :

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & -9 & 4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to .$$

Умножим вторую строку на -2 и 9 и сложим соответственно с I-й и 3-й строками :

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1/3 & -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 1 \end{array}\right) \to .$$

Умножим 3-ю строку на I/3 и сложим с I-й и 2-й :

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4/3 & -1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 7/3 & -4/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -3 & 1 \end{array}\right) .$$

Имеем

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4/3 & -1/3 & 1/3 \\ 7/3 & -4/3 & 1/3 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix} .$$

Сделаем проверку правильности решения.

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4/3 & -1/3 & 1/3 \\ 7/3 & -4/3 & 1/3 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 7 & -4 & 1 \\ 15 & -9 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E .$$

Аналогично, $A^{-1}A = E$.

I.5.2. Расчетные задания

Найти обратную матрицу, если задана матрица A.

I. $A = \begin{bmatrix} I & I & 0 \\ 2 & -3 & I \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$.

2. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & I & 2 \\ 3 & 4 & I \end{bmatrix}$.

3. $A = \begin{bmatrix} 5 & I & 0 \\ 3 & 2 & I \\ 5 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

4. $A = \begin{bmatrix} I & I & -I \\ 3 & 2 & I \\ I & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

5. $A = \begin{bmatrix} 2 & -I & 6 \\ I & -I & 5 \\ I & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

6. $A = \begin{bmatrix} I & I & 2 \\ -I & 0 & -I \\ 2 & I & -I \end{bmatrix}$.

7. $A = \begin{bmatrix} I & 2 & 0 \\ -I & I & 2 \\ 3 & I & I \end{bmatrix}$.

8. $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & I \\ I & 0 & I \\ -I & I & 2 \end{bmatrix}$.

9. $A = \begin{bmatrix} 2 & I & I \\ I & 2 & I \\ I & I & 2 \end{bmatrix}$.

I0. $A = \begin{bmatrix} I & 2 & 2 \\ 2 & I & 2 \\ 2 & 2 & I \end{bmatrix}$.

II. $A = \begin{bmatrix} I & 3 & I \\ I & I & 3 \\ 3 & I & I \end{bmatrix}$.

I2. $A = \begin{bmatrix} I & I & I \\ 2 & I & 3 \\ I & 2 & I \end{bmatrix}$.

I3. $A = \begin{bmatrix} I & -I & 6 \\ 0 & -I & 5 \\ I & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

I4. $A = \begin{bmatrix} 3 & I & I \\ 3 & 2 & I \\ 2 & I & 2 \end{bmatrix}$.

I5. $A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 7 \\ -I & 4 & 5 \\ I & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

I6. $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & I \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & I \end{bmatrix}$.

I7. $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & I \end{bmatrix}$.

I8. $A = \begin{bmatrix} I & I & I \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

I9. $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 7 \\ 3 & -I & 4 \\ 4 & -I & 3 \end{bmatrix}$.

20. $A = \begin{bmatrix} -I & 0 & 5 \\ I & -I & 5 \\ 0 & I & 5 \end{bmatrix}$.

2I. $A = \begin{bmatrix} I & 2 & I \\ -I & 0 & I \\ 2 & I & I \end{bmatrix}$.

22. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & I \\ I & I & 2 \\ 0 & I & 2 \end{bmatrix}$.

23. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & I \\ 0 & I & I \\ 3 & 2 & I \end{bmatrix}$.

24. $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ I & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

25. $A = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 7 \\ -I & 3 & 4 \\ I & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

26. $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 5 & 4 & 7 \\ -I & 0 & I \end{bmatrix}$.

27. $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 3 \\ I & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

28. $A = \begin{bmatrix} -I & -2 & 3 \\ -I & -I & 2 \\ -I & 3 & -2 \end{bmatrix}$.

29. $A = \begin{bmatrix} 4 & I & 0 \\ I & I & I \\ 5 & 2 & -2 \end{bmatrix}$.

30. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & I \\ 0 & 3 & I \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

3I. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -I \\ 5 & 3 & I \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$.