Министерство высшего и среднего специального
образования РСФСР

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени
авиационный институт имени академика С.П.Королева

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ПРОБЛЕМА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Утверждено редакционно-издательским советом института в качестве методических указаний к лабораторным работам

Куйбышев 1983

УДК 519.6 (076)

Методические указания содержат краткие теоретические сведения, укрупненные блок-схемы и подробные иллюстративные примеры по прямым и итерационным методам отыскания собственных значений и собственных векторов матриц.

Предназначены для студентов специальностей 0646, 0647 в качестве руководства при выполнении лабораторных работ по численным методам.

Составитель О.С. И в а н о в а

Рецензенты: С.В. К о п е й к и н, В.М.Ш е р ш н ё в

Лабораторная работа I

ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ ОТЫСКАНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ МАТРИЦ

Задание I. Метод интерполяции

Необходимые расчетные формулы. Для матрицы $A=(a_{ij})_{n\times n}$ характеристический многочлен $f(\lambda)$ имеет вид

$$f(\lambda)=\det(A-\lambda E), \tag{I}$$

где E – единичная матрица того же размера, что и А. Многочлен (I) является многочленом n-й степени и однозначно определяется своими значениями в (n +I)-м узле. Выберем произвольно (n +I)-е значение λ_k и вычислим

$$f(\lambda_k)=\det(A-\lambda_k E), \qquad k=0,1,2,\dots,n. \tag{2}$$

Построим по этим значениям интерполяционный многочлен Ньютона для произвольного расположения узлов по формуле

$$f(\lambda)=f(\lambda_0)+f(\lambda_0,\lambda_1)(\lambda-\lambda_0)+\dots+f(\lambda_0,\dots,\lambda_n)\prod_{i=0}^{n-1}(\lambda-\lambda_i), \tag{3}$$

где

$$f(\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_k)=\frac{f(\lambda_1,\dots,\lambda_k)-f(\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_{k-1})}{\lambda_k-\lambda_0}. \tag{4}$$

В силу единственности многочлен, определяемый по формуле (3), является характеристическим.

Вычисление $f(\lambda_k)$ производят, используя стандартную программу вычисления определителя методом исключения.

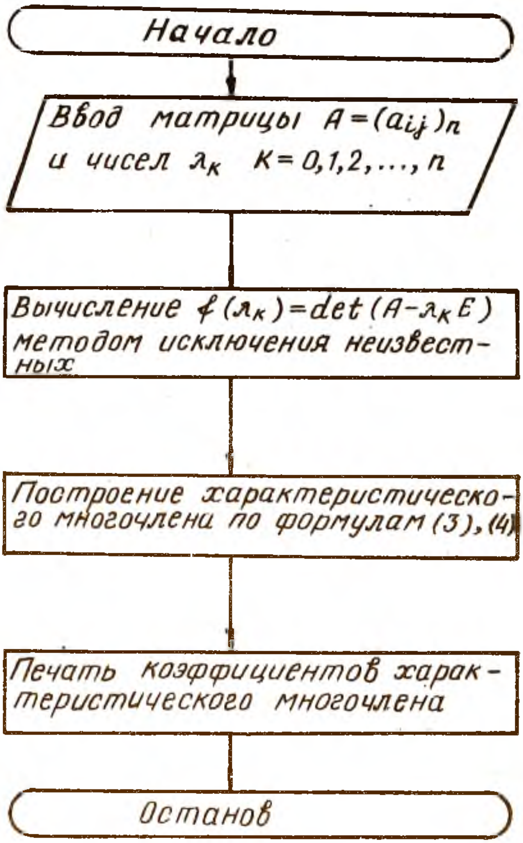
Выбирать узлы λ_k следует так, чтобы

$$|\lambda_k|<\|A\|, \qquad k=0,1,\dots,n, \tag{5}$$

где $\|A\|$ – любая норма матрицы.

Для определения корней многочлена (3) можно использовать любой способ определения корней алгебраического многочлена.

Блок - схема метода.



Порядок выполнения работы

1. Составить программу вычисления определителя методом исключения.

2. Вычислить $\|A\|$ и подобрать числа λ_k , расположив их примерно равномерно так, чтобы выполнялась формула (5).

3. Составить и отладить программу метода интерполяции.

4. Провести расчеты на ЭВМ.
5. Написать отчет.

ПРИМЕР. Методом интерполяции найти коэффициенты характеристического многочлена матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0,9 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0 & 8 \\ 0 & 0,3 & 0 & I \end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. $\|A\| = \max\limits_{i} \sum\limits_{j=1}^{4} |a_{ij}| =$

$= \max(I,4;\ 0,9;\ 8,3;\ I,3) = 8,3.$

Примем за λ_K (К = 0,I,2,3,4) массив чисел $\{0,I,2,3,4\}$, тогда интерполяционный многочлен (3) примет вид

$$f(\lambda) = f(\lambda_0) - \frac{\Delta f_0}{1!}\lambda + \frac{\Delta^2 f_0}{2!}\lambda(\lambda-1) +$$

$$+ \frac{\Delta^3 f_0}{3!}\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) + \frac{\Delta^4 f_0}{4!}\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3), \qquad (6)$$

где $\Delta^K f_0$ – конечные разности функции $f(\lambda) = \det(A - \lambda E)$.

Вычисление определителей.

$$f(\lambda_0) = \det A = \begin{vmatrix} 0,9 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 0,5 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0,3 & 0 & 8 \\ 0 & 0,3 & 0 & I \end{vmatrix} = 0,756.$$

$$f(\lambda_1) = \det(A - 1 \cdot E) = \begin{vmatrix} -0,I & 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & -0,5 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0,3 & -I & 8 \\ 0 & 0,3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -0,096.$$

$$f(\lambda_2) = \det(A - 2E) = \begin{vmatrix} -I,I & 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & -I,5 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0,3 & -2 & 8 \\ 0 & 0,3 & 0 & -I \end{vmatrix} = 2,II2.$$

$$f(\lambda_3) = \det(A-3E) = \begin{vmatrix} -2{,}1 & 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & -2{,}5 & 0{,}4 & 0 \\ 0 & 0{,}3 & -3 & 8 \\ 0 & 0{,}3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 28{,}98.$$

$$f(\lambda_4) = \det(A-4E) = \begin{vmatrix} -3{,}1 & 0 & 0 & 0{,}5 \\ 0 & -3{,}5 & 0{,}4 & 0 \\ 0 & 0{,}3 & -4 & 8 \\ 0 & 0{,}3 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 126{,}18.$$

Построение характеристического многочлена. Составим таблицу конечных разностей.

λ_i	$f(\lambda_i)$	Δf_i	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$	$\Delta^4 f_i$
0	0,756	-0,852	3,060	21,600	24,072
1	-0,096	2,208	24,660	45,672	
2	2,112	26,868	70,332		
3	28,980	97,200			
4	126,180				

По формулам (6) запишем

$$f(\lambda) = \det(A-\lambda E) = 0{,}756 - 0{,}852\lambda + \frac{3{,}060\cdot\lambda(\lambda-1)}{2} + \frac{21{,}600}{3!}\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) + \frac{24{,}072}{4!}\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3). \qquad (7)$$

Многочлен, определяемый по формуле (7), является характеристическим многочленом матрицы A. Для вычисления значений $f(\lambda)$ формулу (7) удобнее переписать в виде

$$f(\lambda) = 0{,}756 + \lambda\left(-0{,}852 + \frac{(\lambda-1)}{2}\left(3{,}060 + \frac{(\lambda-2)}{3}\left(21{,}600 + \frac{(\lambda-3)}{4}24{,}072\right)\right)\right).$$

Из (7) видно, что коэффициент при λ^4 равен 1,003, т.е. с точностью, с которой производились расчеты, он совпадает с коэффициентом при λ^4 в характеристическом многочлене $f(\lambda)$.

Литература к заданию 1: [1], [3], [4], [7].

Задание 2. Метод элементарных преобразований

Необходимые расчетные формулы. Метод элементарных преобразований используется при приведении произвольной матрицы к трехдиагональному виду и состоит из двух ходов. Первым ходом матрица приводится к верхней почти треугольной форме, а вторым – к трехдиагональной форме. Каждый ход состоит из последовательности элементарных преобразований подобия: преобразования первого хода обращают в ноль столбцы в нижней части матрицы, а преобразования второго хода – строки в верхней части матрицы.

Первый ход. На q-м шаге для преобразования подобия используется матрица

$$N = \begin{bmatrix} E_q & 0 \\ 0 & N_q \end{bmatrix} \begin{matrix} \}q \\ \}n-q \end{matrix}, \text{ где } N_q \equiv N_q(v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ v_{q+2} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ v_{q+3} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_n & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Обратная матрица $N^{-1}(v) = N(-v)$. За счет выбора

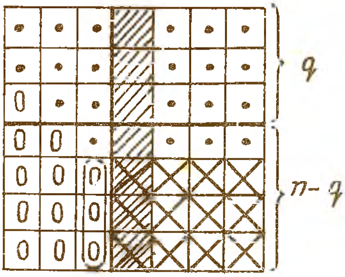
$$v_i = \frac{a_{iq}}{a_{q+1,q}}, \qquad i = q+2, \dots, n \qquad (2)$$

элементы q-го столбца, начиная с $(q+2)$-й строки, обращаются в ноль, а остальные элементы матрицы $A = (a_{ij})_n$ преобразуются по следующим формулам (для простоты записи индекс шага q у всех элементов матрицы опустим):

$$a_{i,q+1} = a_{i,q+1} + \sum_{j=q+2}^{n} a_{ij} v_j, \qquad i = 1, 2, \dots, n; \qquad (3)$$

$$a_{ij} = a_{ij} - a_{q+1,j} v_i \qquad \begin{matrix} i = q+2, \dots, n, \\ j = q+1, \dots, n. \end{matrix} \qquad (4)$$

В формуле (4) используются элементы $(q+1)$-го столбца, начиная с $(q+2)$-й строки, которые были пересчитаны по формуле (3). Можно изобразить схематически q-й шаг первого хода:



• – элементы остались без изменений; /// – элементы изменяются по формуле (3); ✗ – элементы пересчитываются по формуле (4); элементы, аннулированные на q-м шаге, обведены.

Преобразования (2), (3), (4) повторяются в первом ходе при $q = 1, 2, \dots, n-2$, где n – порядок матрицы A.

<u>Второй ход</u>. На q-м шаге для преобразования подобия используется матрица

$$M = \left[\begin{array}{c|c} E_q & 0 \\ \hline 0 & M_q \end{array}\right] \begin{matrix} \}\, q \\ \}\, n-q \end{matrix}, \text{ где } M_q = \begin{bmatrix} 1 & -v_{q+2} & -v_{q+3} & \dots & -v_n \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \qquad (5)$$

причем $M^{-1}(v) = M(-v)$. При этом следует учесть, что если для верхней почти треугольной матрицы применяется преобразование подобия при помощи матрицы (5), то результирующая матрица остается верхней почти треугольной, т.е. нули, полученные на первом ходе, сохраняются при преобразованиях второго хода. Формулы второго хода имеют вид

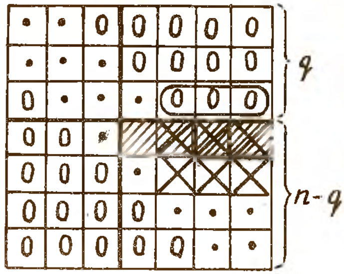
$$v_j = \frac{a_{q,j}}{a_{q,q+1}}, \qquad j = q+2, \dots, n; \qquad (6)$$

$$a_{q+1,j} = a_{q+1,j} + \sum_{i=q+2}^{n} a_{ij} v_i, \qquad j = q+1, \dots, n; \qquad (7)$$

$$a_{ij} = a_{ij} - v_j a_{i,q+1}, \qquad i = q+1, q+2, \quad j = q+2, \dots, n. \qquad (8)$$

В силу выбора $v_j \ (j = q+2, \dots, n)$ элементы q-й строки, начиная с (q+2)-го столбца, аннулируются. Элементы (q+1)-й строки, начиная с (q+1)-го столбца, пересчитываются по формуле (7), так как используются нулевые элементы, полученные при первом ходе. По формуле (8) пересчитываются только две строки: (q+1)-я и (q+2)-я, так как элементы $a_{i,q+1}$ ($i = q+3, \dots, n$) равны нулю.

Можно изобразить схематически q-й шаг второго хода:



• – элементы остались без изменения; /// – элементы изменяются по формуле (7); X – элементы вычисляются по формуле (8); элементы, аннулированные на q-м шаге, обведены.

Как и в первом ходе, преобразования (6), (7), (8) повторяются при $q = 1, 2, \ldots, n-2$.

Замечание I. Если на q-м шаге элемент $a_{q+1,q}$ окажется мал, тогда значения $U_i\ (i = q+2, \ldots, n)$ будут велики, погрешность возрастет и расчеты по формулам (2), (3), (4) могут оказаться неустойчивыми. Чтобы сделать метод устойчивым, выбирают главный (наибольший по модулю) элемент аннулируемого столбца

$$|a_{rq}| = \max_i |a_{i,q}|, \quad i = q+2, \ldots, n$$

и перестановкой (q+ I)-й и r-й строк делают его ведущим. Формально перестановку строк можно записать как умножение матрицы A слева на матрицу перестановок.

$$P = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 & \cdots & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ q+1 \\ \\ r \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} \quad & \quad & q+1 & \quad & r & \quad & \quad \end{array} & \end{array}$$

Но перестановка строк меняет собственные значения матрицы. Чтобы собственные значения не менялись, надо сделать преобразование подобия $P^{-1}AP$. Но $P^{-1} = P$, а умножение справа на матрицу P равносильно перестановке (q +I)-го и r -го столбцов матрицы.

Замечание 2. Если на q -м шаге второго хода элемент $a_{q,q+1}$ окажется мал, то расчет по формулам (6), (7), (8) становится неустойчивым, однако применять перестановку строк и столбцов уже нельзя, так как нарушится структура матрицы (она перестанет быть верхней почти треугольной).

Для уменьшения ошибок округления нужно вести расчеты второго хода с двойной точностью или переставить какие-либо столбцы и строки в исходной матрице и начать расчеты с самого начала.

Замечание 3. Вычисление собственных значений трехдиагональных матриц производится каким-либо известным способом определения корней трансцендентных уравнений (например методом парабол), так как значения характеристического многочлена трехдиагональных матриц могут быть подсчитаны за $5n$ операций (для произвольных матриц – примерно за $\frac{2}{3}n^3$ операции.

Построить характеристический многочлен трехдиагональной матрицы значительно легче, чем произвольной.

Замечание 4. Собственные векторы матрицы могут быть найдены методом обратных итераций или обратных итераций со сдвигом.

Порядок выполнения работы

1. Составить подробную блок-схему метода.
2. Составить и отладить программу на ЭВМ.
3. Провести расчеты (приведение матрицы к трехдиагональной форме).
4. Оформить отчет.

ПРИМЕР. Методом элементарных преобразований привести матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}255123 & 0{,}822450 & -0{,}064280 & 0{,}184773 \\ 0{,}822450 & 0{,}181031 & -0{,}140328 & -0{,}048661 \\ -0{,}064280 & -0{,}140328 & -0{,}220208 & 0{,}695908 \\ 0{,}184773 & -0{,}048661 & 0{,}695908 & 0{,}104195 \end{bmatrix}$$

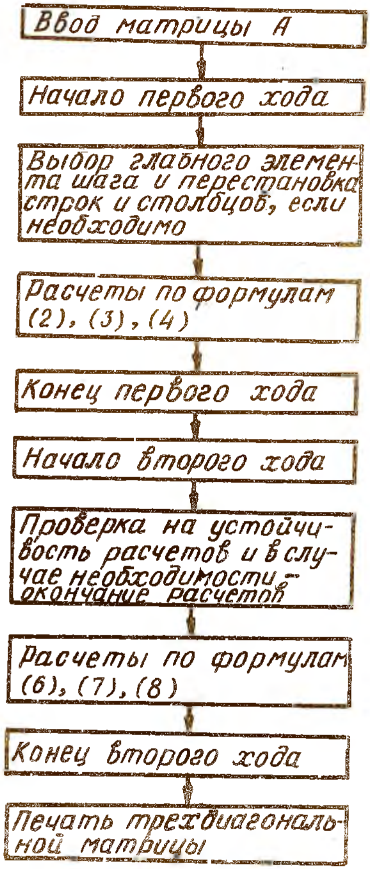
к трехдиагональной форме.

Решение. Первый ход.

I шаг: Вычислим v_i $(i = 3{,}4)$ по формуле (2):

$$v_3 = \frac{-0{,}064280}{0{,}822450} = -0{,}078157\,;$$

Укрупненная блок – схема метода.



$$v_4 = \frac{0{,}184773}{0{,}822450} = 0{,}224662;$$

Пересчитаем 2-й столбец по формуле (3):

$$a_{12} = 0{,}822450 + (-0{,}064280)(-0{,}078157) + 0{,}184773 \cdot 0{,}224662 = 0{,}868985;$$

$$a_{22} = 0{,}181031 + (-0{,}140328)(-0{,}078157) + (-0{,}048661)(0{,}224662) = 0{,}181066;$$

a_{32} = -0,I40328 + (-0,220208)(-0,078I57) + 0,695908 ·0,224662 =
= 0,033227 ;

a_{42} = -0,04866I + 0,695908·(-0,078I57) + 0,I04I05·0,224662 =
= - 0,079642 ;

пересчитаем элементы $a_{32}, a_{33}, a_{34}, a_{42}$,
a_{43}, a_{44} по формуле (4):

a_{32} = 0,033227 - (-0,078I57)·0,I8I066 = 0,047378 ;

a_{33} = -0,220208 -(-0,078I57)·(-0,I40328) = -0,23II76;

a_{34} = 0,695908 - (-0,078I57)(-0,04866I) = 0,692I05 ;

a_{42} = -0,079642 - 0,224662·0,I8I066 = -0,I2032I;

a_{43} = 0,695908 - 0,224662·(-0,I40328) = 0,727434 ;

a_{44} = 0,I04I95 - 0,224662·(-0,04866I) = 0,I05I27 .

На этом I-й шаг первого хода заканчивается. Результаты вычислений записываем в таблицу.

Номер хода	Номер шага	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	V_i
ис-ходная	матрица	0,255I23 0,822450 -0,064280 0,I84773	0,822450 0,I8I03I -0,I40328 -0,04866I	-0,064280 -0,I40328 -0,220208 0,695908	0,I84773 -0,04866I 0,695908 0,I04I95	
I	I	0,255I23 0,822450 0,000000 0,000000	0,868955 0,I8I066 0,033227 -0,079642	-0,064280 -0,I40328 -0,220208 0,695908	0,I84773 -0,04866I 0,695908 0,I04I95	 V_3 =0,078I57 V_4 =0,224662
		0,255I23 0,822450 0,000000 0,000000	0,868985 0,I8I066 0,047378 -0,I2032I	-0,064280 -0,I40328 -0,23II76 0,727434	0,I84773 -0,04866I 0,692I05 0,I05I27	
	2	0,255I23 0,822450 0,000000 0,000000	0,868985 0,I8I066 0,047378 0,000000	-0,533527 -0,0I6749 -I,988835 0,435059	0,I84773 -0,04866I 0,692I05 0,I05I27	 V_4=-2,539575

Окончание таблицы

		0,255I23 0,822450 0 0	0,868985 0,I8I066 0,047378 0	-0,533527 -0,0I6749 -I,988835 -4,6I576I	0,I84773 -0,04866I 0,692I05 I,872787	
2	I	0,255I23 0,822450 0 0	0,868982 0,I5I978 0,047378 0	0 0,222874 -I,988835 -4,6I576I	0 -0,075378 0,692I05 I,872787	v_3=-0,6I3966 v_4=0,2I263I
		0,255I23 0,822450 0 0	0,868982 0,I5I978 0,047378 0	0 0,3I6I83 -I,959746 -4,6I576I	0 -0,I07693 0,68203I I,872787	
	2	0,255I23 0,822450 0 0	0,868982 0,I5I978 0,047378 0	0 0,3I6I83 -0,387609 -4,6I576I	0 0 0,044I56 I,872787	v_4=-0,340603
		0,255I23 0,822450 0, 0	0,868982 0,I5I978 0,047378 0	0 0,3I6I83 -0,387609 -4,6I576I	0 0 -0,087865 0,300649	

При преобразовании подобия след матрицы не изменяется: след исходной матрицы $Sp\,A$ = 0,320I4I, след трехдиагональной матрицы – -0,320I4I. Можно надеяться, что преобразования сделаны верно.

Литература к заданию: [I] , [9] .

Лабораторная работа 2

ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ОТЫСКАНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ МАТРИЦ

Задание I.

Итерационный метод вращений

Необходимые расчетные формулы. Метод вращений рассмотрим для симметричных вещественных матриц $A = (a_{ij})_n$. Подберем такую ортогональную матрицу U , чтобы $U^T A U = \Lambda$.

Здесь

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \tilde{\lambda}_1 & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \tilde{\lambda}_2 & \dots & \lambda_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \dots & \tilde{\lambda}_n \end{bmatrix} .$$

Причем элементы $\tilde{\lambda}_i$ (i =1,2,...,n) близки к собственным значениям λ_i (i = 1,2,...,n) при $|\lambda_{kl}| < \varepsilon$, где ε – достаточно малое число. Обычно матрица U получается как произведение последовательности ортогональных матриц, приводящее матрицу A к матрице Λ .

Рассмотрим один шаг метода вращений.

Алгоритм метода вращений. В качестве ортогональной матрицы выберем

$$U_{kl} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ \dots & & \cos\varphi & \dots & -\sin\varphi & \dots & \\ & & & 1 \; \ddots \; 1 & & & \\ \dots & & \sin\varphi & & \cos\varphi & \dots & \\ & & & & & 1 \; \ddots & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \\ k\text{-я} \\ \\ l\text{-я} \\ \\ \end{array} \\ \qquad\qquad k\text{-й} \qquad\qquad l\text{-й} \end{array} . \qquad (1)$$

Матрица $B = AU_{kl}$ имеет следующие элементы:

$$b_{ij} = a_{ij}, \quad i = 1,2,\dots,n, \quad j \neq k,l;$$

$$b_{ik} = a_{ik}\cos\varphi + a_{il}\sin\varphi; \tag{2}$$

$$b_{il} = a_{ik}(-\sin\varphi) + a_{il}\cos\varphi, \quad i = 1,2,\dots,n.$$

Умножим матрицу B слева на матрицу V^T_{kl}, получим $C = V^T_{kl} B$. Элементы матрицы C определим по формулам:

$$\begin{cases} c_{ji} = b_{ji}, & i = 1,2,\dots,n, \quad j \neq k,l. \\ c_{ki} = b_{ki}\cos\varphi + b_{li}\sin\varphi & i = 1,2,\dots,n. \\ c_{li} = b_{ki}(-\sin\varphi) + b_{li}\cos\varphi \end{cases} \tag{3}$$

Угол φ выберем так, чтобы $c_{kl} = 0$.

Нетрудно показать, что

$$tg2\varphi = \frac{2a_{kl}}{a_{kk} - a_{ll}}, \quad |\varphi| < \frac{\pi}{4}.$$

Но при реализации на ЭВМ итерационного метода вращения удобнее сразу вычислять $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ по следующим формулам:

$$\cos\varphi = \left(\frac{1}{2}\left(1 + \frac{|y|}{(x^2+y^2)^{1/2}}\right)\right)^{1/2}; \tag{4}$$

$$\sin\varphi = \frac{sign(xy)|x|}{2\cos\varphi(x^2+y^2)^{1/2}}, \tag{5}$$

где $x = 2a_{kl}$; $y = a_{kk} - a_{ll}$.

З а м е ч а н и е. Если $y = 0$, то $\cos\varphi = \sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Если $y \neq 0$, то $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ вычисляем по формулам [4], [5].

Вычислив элементы матрицы С, закончим один шаг метода вращений. К вновь полученной матрице применим тот же алгоритм.

<u>Выбор матрицы вращения.</u> При ручном счете k и l выбирают равными номеру строки и столбца максимального по модулю внедиагонального элемента матрицы А.

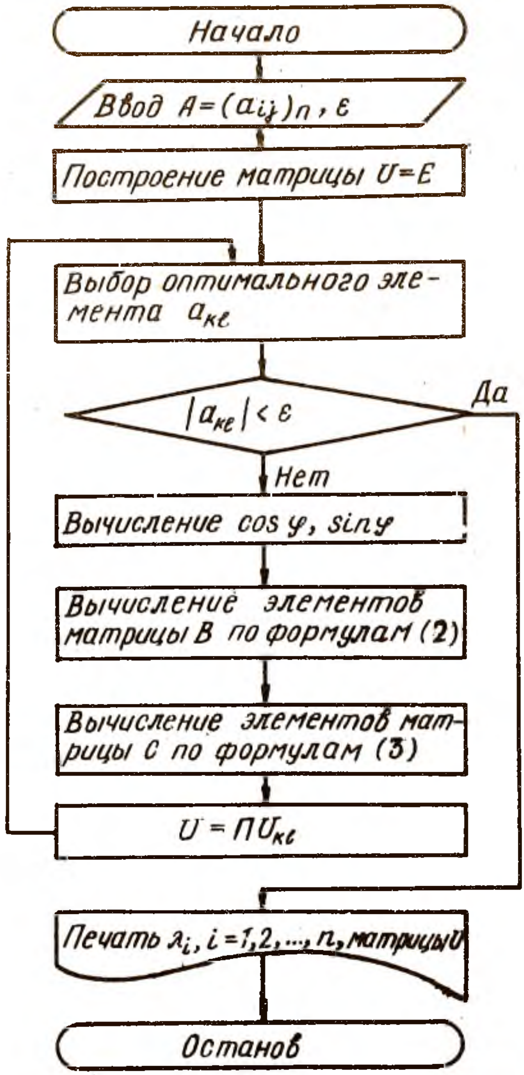
При реализации метода на ЭВМ наиболее выгодным оказался метод с выбором оптимального элемента. Выбор максимального по модулю элемента матрицы А требует больших затрат машинного времени, поэтому удобнее обращать в ноль так называемый оптимальный элемент. Для этого составим суммы квадратов внедиагональных элементов строк:

$$\sigma_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij}^2, \quad i = 1,2,\dots,n.$$

Выберем из них наибольшую сумму и в этой строке найдем наибольший по модулю внедиагональный элемент, который и будет оптимальным.

Определение собственных векторов. Поскольку собственные векторы диагональной матрицы $e_i = \begin{pmatrix} \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}$, то собственными векторами матрицы A будут столбцы матрицы $U = \prod U_{kl}$.

Блок-схема метода.



Порядок выполнения работы

1. Составить подробные блок - схемы :
   а) выбора оптимального элемента a_{kl};
   б) вычисления элементов матрицы B ;
   в) вычисления элементов матрицы C ;
   г) $U = \Pi U_{kl}$.
2. Написать и отладить программу.
3. Провести расчеты на ЭВМ.
4. Оформить отчет.

ПРИМЕР. Найти методом вращений собственные числа и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 25 & 38 & 15 & 16 \\ 38 & 49 & -18 & 0 \\ 15 & -18 & 19 & 21 \\ 16 & 0 & 21 & -3 \end{pmatrix}$$

с точностью до трех верных значащих цифр.

Р е ш е н и е. При ручных расчетах элемент a_{kl} , подлежащий обращению в ноль на данном шаге, выбирается максимальным среди всех внедиагональных элементов матрицы A. Результаты вычислений записываем в таблицу. Следует помнить, что симметричность матрицы при ортогональном преобразовании сохраняется, поэтому производим расчеты по формулам:

$$b_{ik} = a_{ik}\cos\varphi + a_{il}\sin\varphi; \qquad i = 1,2,3,4$$

$$b_{il} = a_{ik}(-\sin\varphi) + a_{il}\cos\varphi,$$

т.е. пересчитываем элементы k-го и l-го столбцов и полагаем

$$c_{ki} = b_{ik}; \qquad i = 1,2,3,4, \quad i \neq k, \quad i \neq l$$

$$c_{li} = b_{il}.$$

Элементы c_{kk} , c_{ll} пересчитываем по формулам:

$$c_{kk} = b_{kk}\cos\varphi + b_{lk}\sin\varphi,$$

$$c_{ll} = b_{kl}(-\sin\varphi) + b_{ll}\cos\varphi$$

и полагаем

$$c_{kl} = c_{lk} = 0.$$

Т а б л и ц а

Номер шага	Элементы матрицы				Произведение матриц преобразований				$\cos\varphi$	$\sin\varphi$	$\cos^2\varphi+\sin^2\varphi$	K, ℓ
	a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	a_{i4}	u_{i1}	u_{i2}	u_{i3}	u_{i4}				
I	2				3				4	5	6	7
0	-25	$\boxed{38}$	I5	I6	I	0	0	0	0,92I3	-0,3888	I,0000	K=I
	38	49	-I8	0	0	I	0	0				ℓ=2
	I5	-I8	I9	2I	0	0	I	0				
	I6	0	2I	-5	0	0	0	I				
I	-4I,038	0	20,8I9	I4,74I	0,92I3	0,3888	0	0	0,8649	0,50I9	I,0000	K=3
	0	65,038	-I0,75I	6,22I	-0,3888	0,92I3	0	0				ℓ=2
	20,8I9	-I0,75I	I9	$\boxed{2I}$	0	0	I	0				
	I4,74I	6,22I	2I	-5	0	0	0	I				
2	-4I,038	0	$\boxed{25,405}$	2,300	0,92I3	0,3888	0	0	0,9534	-0,30I8	I,0000	K=I
	0	65,038	-6,I7I	I0,777	-0,3888	0,92I3	0	0				ℓ=3
	25,405	-6,I7I	3I,I87	0	0	0	0,8649I	-0,50I9				
	2,300	I0,777	0	-I7,I87	0	0	0,50I9	0,8649				
3	-49,079	I,864	0	2,I93	0,8764	0,3888	0,2780	0	0,99I8	0,I278	I,0000	K=2
	I,864	65,038	-5,888	$\boxed{10,777}$	-0,3707	0,92I3	-0,II73	0				ℓ=4
	0	-5,888	39,228	0,694	-0,26I0	0	0,8246	-0,50I9				
	2,I23	I0,777	0,694	-I7,I87	-0,I5I5	0	0,4785	0,8649				
4	-49,079	2,I29	0	I,937	0,8784	0,3856	0,2780	-0,0497	0,980I	-0,I987	I,0000	K=2
	2,I29	66,427	$\boxed{-5,751}$	0	-0,3707	0,9I38	-0,II73	-0,II79				ℓ=3
	0	-5,75I	39,228	I,44I	-0,26I0	-0,0642	0,8246	-0,4978				
	I,937	0	I,44I	-I8,576	-0,I5I5	0,II06	0,4785	0,8578				

Окончание таблицы

I		2			3				4	5	6	7
5	-49,079 2,086 0,423 I,937	$\boxed{2,086}$ 67,593 0 -0,286	0,423 0 38,062 I,4I2	I,937 -0,286 I,4I2 -I8,576	0,8784 -0,3707 -0,26I0 -0,I5I5	0,3227 0,9I88 -0,2267 0,0I33	0,349I 0,0666 0,7954 0,49I0	-0,0497 -0,II79 -0,4978 0,8578	0,9998	-0,0I79	I,0000	K=I ℓ=2
6	-49,II6 0 0,423 I,942	0 67,630 0,008 -0,252	0,423 0,008 38,062 I,4I2	$\boxed{I,942}$ -0,252 I,4I2 -I8,576	0,8725 -0,387I -0,2569 -0,I5I7	0,3384 0,9I2I -0,23I4 0,0I06	0,349I 0,0666 0,7954 0,49I0	-0,0497 -0,II78 -0,4978 0,8578	0,9990	-0,0632	I,0000	K=I ℓ=2
7	-49,239 0,0I6 0,333 0	0,0I6 67,630 0,008 -0,25I	0,333 0,008 38,062 I,436	0 -0,25I $\boxed{I,436}$ -I8,453	0,8739 -0,3789 -0,2249 -0,2036	0,3384 0,9I2I -0,23I4 -0,0I06	0,349I 0,0664 0,7954 0,49I0	0,0055 -0,I420 -0,5I3I 0,8465	0,9997	0,0254	I,0000	K=3 ℓ=4
8	-49,239 0,0I6 0,333 -0,009	0,0I6 67,630 0,00I -0,25I	$\boxed{0,333}$ 0,00I 38,098 0	-0,009 -0,25I 0 -I8,489	0,8739 -0,3789 -0,2249 -0,2056	0,3384 0,9I2I -0,23I4 0,0I06	0,349I 0,063I0 0,782I 0,5I23	-0,0033 -0,I436 -0,533I 0,8378	0,9999	-0,0038	I,0000	K=I ℓ=3
9	-49,240 0,0I59 0 -0,009	0,0I6 67,630 0,00I -0,25I	0 0,00I 38,I00 0,000	-0,009 $\boxed{-0,25I}$ 0,000 -I8,489	0,8725 -0,379I -0,2279 -0,2075	0,3384 0,9I2I -0,23I4 0,0I06	0,3525 0,06I5 0,78I3 0,5II5	-0,0033 -0,I436 -0,533I 0,8358	0,9999	-0,0029	I,0000	K=2 ℓ=3
I0	-49,240 0,0I6 0,000 -0,008	0,0I6 67,63I 0,00I 0	0,000 0,00I 38,I00 0,000	0,008 0 0,000 -I8,490	0,8725 -0,379I -0,2279 -0,2075	0,3384 [illegible] -0,2298 -0,008I	0,3525 [illegible] 0,78I5 0,5II5	-0,0023 -0,I4I0 -0,5338 [illegible]				

Максимальный элемент после IO-го шага: $a_{12} = 0{,}0159 < 0{,}02$. Собственные числа матрицы совпадают с элементами главной диагонали с точностью до трех значащих цифр:

$\lambda_1 = -49{,}2$, $\lambda_2 = 67{,}6$, $\lambda_3 = 38{,}1$, $\lambda_4 = -18{,}5$.

Собственные векторы совпадают со столбцами матрицы произведений:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 0{,}873 \\ -0{,}379 \\ -0{,}228 \\ -0{,}208 \end{pmatrix}; \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0{,}338 \\ 0{,}912 \\ -0{,}230 \\ 0{,}008 \end{pmatrix}; \quad x_3 = \begin{pmatrix} 0{,}352 \\ 0{,}062 \\ 0{,}781 \\ 0{,}512 \end{pmatrix}; \quad x_4 = \begin{pmatrix} -0{,}002 \\ -0{,}141 \\ 0{,}534 \\ 0{,}834 \end{pmatrix}.$$

Литература к заданию I: [I] , [2], [3] , [6] , [9] .

Задание 2. Степенной метод

Необходимые расчетные формулы. Пусть дана матрица $A = (a_{ij})_n$, имеющая полную систему собственных векторов e_i , $i = 1, 2, \ldots, n$, причем соответствующие им собственные значения таковы, что $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$. Для произвольного вектора x_0 построим последовательность векторов

$$x_{p+1} = A x_p, \qquad p = 0, 1, 2 \ldots ,$$

каждый из которых можно разложить по базису из собственных векторов:

$$x_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,0} e_i, \ldots, \quad x_p = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,p} e_i, \ldots . \qquad (1)$$

Выберем произвольный декартов базис $b_1, b_2, \ldots, b_n$ и разложим векторы e_i , $i = 1, 2, \ldots, n$ и x_p в этом базисе:

$$e_i = \sum_{j=1}^{n} \xi_{ji} b_j \; , \; i = 1, 2, \ldots, n \; ; \qquad x_p = \sum_{i=1}^{n} \beta_{i,p} b_i \, , \quad p = 0, 1, 2, \ldots . \qquad (2)$$

Используя определение собственных векторов и собственных чисел матрицы из формул (I) и (2) получаем

$$\beta_{i,p} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{j0} \lambda_j^p \xi_{ji} \, , \qquad i = 1, 2, \ldots n \, .$$

Найдем отношение соответствующих координат векторов x_p и x_{p+1} при $\alpha_{1,0} \neq 0$:

$$\frac{\beta_{i,p+1}}{\beta_{i,p}} = \frac{\alpha_{10} \lambda_1^{p+1} \xi_{1i} \left(1 + O\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{p+1}\right)\right)}{\alpha_{10} \lambda_1^{p} \xi_{1i} \left(1 + O\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{p}\right)\right)} = \lambda_1 + O\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{p}\right), \qquad (3)$$

$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

Из формулы (3) следует, что наибольшее по модулю собственное значение матрицы A можно найти с точностью до $O\left(\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^p\right)$.

При практических расчетах это означает, что отношения всех соответствующих координат векторов x_p и x_{p+1} должны совпадать с заданной точностью.

Замечание I. Если $|\lambda_1| > 1$, то $\|x_p\| \to \infty$ при $p \to \infty$. Поэтому при достаточно большом p произойдет переполнение разрядности чисел и остановка ЭВМ. Если $|\lambda_1| < 1$, то $\|x\| \to 0$ при $p \to \infty$ и вследствие конечности порядков чисел в машине может оказаться, что начиная с некоторого p, $x_p \approx \theta$. Чтобы избежать переполнения или исчезновения порядков чисел, полезно время от времени умножать векторы x_p на подходящий множитель.

Замечание 2. Если $\alpha_{1,0} = 0$, то формально итерации сходятся к следующему по модулю собственному значению. Однако из-за ошибки округления вычислений $\alpha_{1,0}$ не может быть точным нулем, а при малом значении $\alpha_{1,0}$ процесс по-прежнему сходится к первому собственному значению, только за большее число шагов.

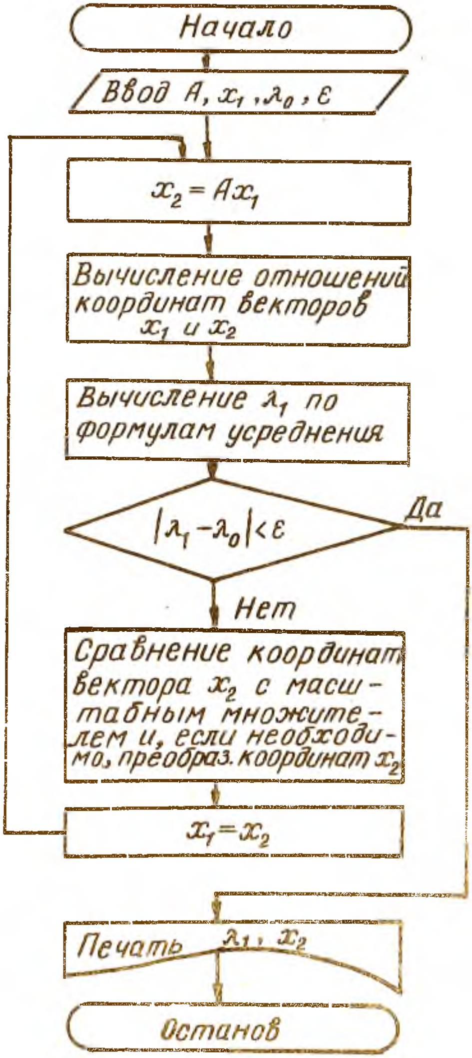
Замечание 3. Если $|\lambda_1| \approx |\lambda_2|$, то сходимость очень медленная. Если же $\lambda_1 \neq \lambda_2$, а $|\lambda_1| = |\lambda_2|$, то процесс расходится.

При реализации метода на ЭВМ находят все отношения из формулы (3), а затем усредняют их каким-либо способом, в частности за p-е приближение λ_1 можно взять величину

$$\lambda_1^{(p)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_{i,p+1}}{\beta_{i,p}}}{n}.$$

Собственный вектор e_1 полагают приближенно равным x_{p+1}.

Блок - схема


Начало
Ввод $A, x_1, \lambda_0, \varepsilon$
$x_2 = Ax_1$
Вычисление отношений координат векторов x_1 и x_2
Вычисление λ_1 по формулам усреднения
$|\lambda_1 - \lambda_0| < \varepsilon$
Да
Нет
Сравнение координат вектора x_2 с масштабным множителем и, если необходимо, преобраз. координат x_2
$x_1 = x_2$
Печать λ_1, x_2
Останов

Порядок выполнения работы

1. Составить подробные блок-схемы:
   а) вычисления вектора x_2 ;
   б) вычисления отношения координат векторов x_1 и x_2 ;
   в) вычисления λ_1 по формулам усреднения;
   г) сравнения координат вектора x_2 с масштабным множителем и, если необходимо, преобразования координат x_2.
2. Написать и отладить программу.
3. Провести расчеты на ЭВМ.
4. Оформить отчет.

ПРИМЕР. Определить степенным методом наибольшее по модулю собственное значение матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 1,6 & 2,3 & 1,2 \\ 2,3 & 0,6 & 1,5 \\ 1,2 & 1,5 & 3,8 \end{pmatrix}$$

с точностью до 10^{-2}.

Решение. За начальный вектор примем вектор $x_0 = (1,1,1)^T$.

$$x_1 = Ax_0 = \begin{pmatrix} 1,6 & 2,3 & 1,2 \\ 2,3 & 0,6 & 1,5 \\ 1,2 & 1,5 & 3,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5,1 \\ 4,4 \\ 6,5 \end{pmatrix};$$

$$\frac{\beta_{11}}{\beta_{10}} = \frac{5,1}{1}; \quad \frac{\beta_{21}}{\beta_{20}} = \frac{4,4}{1}; \quad \frac{\beta_{31}}{\beta_{30}} = \frac{6,5}{1} = 6,5;$$

$$\lambda_1^{(1)} = \frac{5,1+4,4+6,5}{3} = \frac{16}{3} = 5,333;$$

$$x_2 = Ax_1 = \begin{pmatrix} 26,08 \\ 24,12 \\ 37,42 \end{pmatrix};$$

$$\frac{\beta_{12}}{\beta_{11}} = \frac{26,08}{5,1} = 5,11; \quad \frac{\beta_{22}}{\beta_{21}} = \frac{24,12}{4,4} = 5,48; \quad \frac{\beta_{32}}{\beta_{31}} = \frac{37,42}{6,5} = 5,76;$$

$$\lambda_1^{(2)} = \frac{5,11+5,48+5,76}{3} = \frac{16,35}{3} = 5,45;$$

$$\left|\lambda_1^{(1)} - \lambda_1^{(2)}\right| = 0,117 > 0,01.$$

Результаты вычисления запишем в таблицу

A	I,6 2,3 I,2	2,3 0,6 I,5	I,2 I,5 3,8	$\frac{\beta_{1,p+1}}{\beta_{1,p}}$	$\frac{\beta_{2,p+1}}{\beta_{2,p}}$	$\frac{\beta_{3,p+1}}{\beta_{3,p}}$	$\lambda_1^{(p)}$	$\varepsilon^{(p+1)} = \lvert\lambda_1^{(p+1)}-\lambda_1^{(p)}\rvert$
x_0	I	I	I	5,I	4,4	6,5	5,333	
x_1	5,I	4,4	6,5	5,II	5,48	5,76	5,45	0,II7
x_2	26,08	24,I2	37,42	5,45	5,4I	5,60	5,487	0,037
x_3	I42,I08	I30,586	209,672	5,484	5,5II	5,548	5,5I4	0,027
	Умножим вектор x_3 на масштабный множитель M = I0^{-2}							
$\bar{x}_3$	I,42II	I,3059	2,0967					
$\bar{x}_4$	7,7933	7,I97I	II,63I6	5,5I5I	5,5I48	5,532I	5,5207	0,0067
$\bar{x}_5$	42,9804	39,6902	64,3476	5,5205	5,5225	5,5267	5,5232	0,0025

Литература к заданию 2: [I], [3], [4], [5], [8].

<u>Задание 3.</u> М е т о д   с к а л я р н ы х   п р о и з в е д е н и й

<u>Необходимые расчетные формулы.</u> Метод скалярных произведений применяется для отыскания максимального по модулю собственного значения матрицы $A=(a_{ij})_n$. Для простоты рассуждений предположим наличие полной системы собственных векторов e_i : $Ae_i = \lambda_i e_i$,

i = I,2,...,n . Пусть $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$.

Зададимся некоторым вектором x_0 и будем последовательно вычислять векторы $x_{p+1} = Ax_p$, p = 0,I,2,... . Тогда (p +I)-е приближение λ_1 определяется по формуле

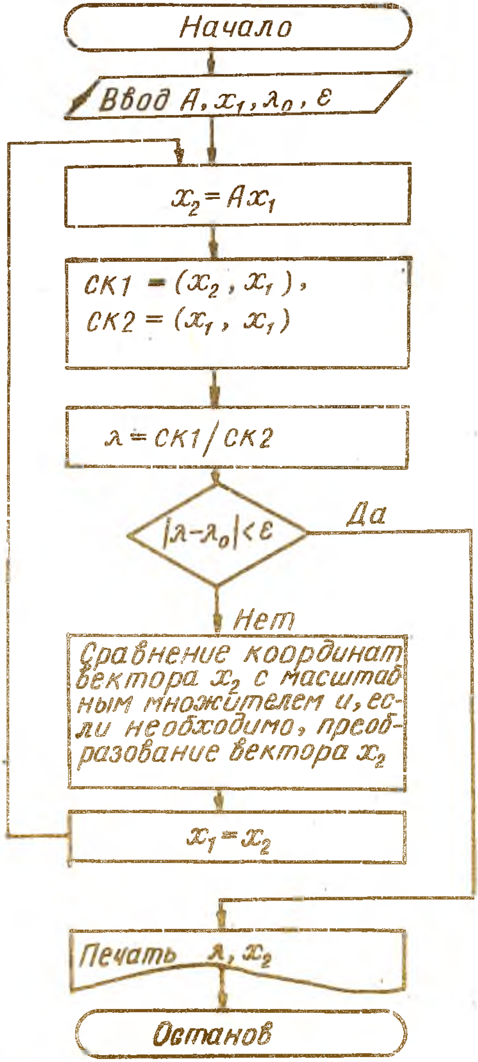
$$\lambda_1^{(p+1)} = \frac{(x_{p+1},\ x_p)}{(x_p,\ x_p)}, \qquad p = 0,1,2,\ldots$$

Справедлива следующая оценка приближения:

$$|\lambda_1^{(p+1)} - \lambda_1| = O\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^p\right).$$

Взяв достаточно большое p, мы можем получить приближение к λ_I с любой степенью точности. Собственный вектор e_I, соответствующий λ_I, с заданной точностью совпадает с вектором x_{p+I}. При вычислении векторов x_p, $p=0,I,2,\dots$ учесть замечание I задания 2.

Блок - схема метода.



Порядок выполнения работы

I. Составить подробные блок-схемы:

а) вычисления скалярных произведений $CK1 = (x_1, x_2)$ и $CK2 = (x_1, x_1)$;

б) сравнения координат вектора x_2 с масштабным множителем;

в) преобразования вектора x_2.

2. Написать и отладить программу.
3. Провести расчеты на ЭВМ.
4. Оформить отчет.

ПРИМЕР. Методом скалярных произведений найти с точностью до 10^{-2} наибольшее собственное значение матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

и соответствующий ему собственный вектор

Р е ш е н и е. Пусть $x_0^T = (1,1,1)$.

Вычислим

$$x_1 = Ax_0 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$\lambda_1^{(0)} = \frac{(x_1, x_0)}{(x_0, x_0)} = \frac{11}{3} = 3{,}667;$$

$$x_2 = Ax_1 = \begin{pmatrix} 24 \\ 15 \\ 6 \end{pmatrix}; \quad \lambda_1^{(1)} = \frac{(x_2, x_1)}{(x_1, x_1)} = \frac{192}{45} = 4{,}267.$$

Результаты вычислений запишем в таблицу.

A	4 1 0	1 2 1	0 1 1	$CK1 = (x_2, x_1)$	$CK2 = (x_1, x_1)$	$\lambda_1^{(p)}$	$\varepsilon^{(p)} = \lvert\lambda_1^{(p)} - \lambda_1^{(p-1)}\rvert$
x_0	1	1	1				
x_1	5	4	2	11	3	3,667	
x_2	24	15	6	192	45	4,267	0,6
x_3	111	60	21	3690	837	4,409	0,142
x_4	504	252	81	72762	16362	4,447	0,038

	Умножим координаты вектора x_4 на масштабный множитель $M = 10^{-2}$						
$\bar{x}_4$	5,04	2,52	0,81				
$\bar{x}_5$	22,68	10,89	3,33	144,4473	32,4081	4,457	0,01
$\bar{x}_6$	101,61	47,79	14,22	2872,30	544,063	4,459	0,002

Разность $|\lambda_1^{(4)} - \lambda_1^{(5)}| = 0{,}002 < 0{,}01$, поэтому можно принять, что $\lambda_1 \approx 4{,}46$ с точностью до сотых долей. Соответствующий собственный вектор примем равным вектору x_6, все координаты которого поделены на 10^2:

$$e_1 \approx \begin{pmatrix} 1{,}02 \\ 0{,}48 \\ 0{,}14 \end{pmatrix}$$

Проверка полученного результата. По определению собственных чисел и собственных векторов

$$Ae_1 = \lambda_1 e_1$$

вычислим Ae_1 и $\lambda_1 e_1$:

$$Ae_1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1{,}02 \\ 0{,}48 \\ 0{,}14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}56 \\ 2{,}12 \\ 0{,}62 \end{pmatrix};$$

$$\lambda_1 e_1 = \begin{pmatrix} 4{,}55 \\ 2{,}14 \\ 0{,}62 \end{pmatrix}.$$

С заданной точностью Ae_1 совпадает с $\lambda_1 e_1$.

Литература к заданию 3: [1], [2], [3], [4], [5].

Лабораторная работа 3

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ

ЗАДАНИЕ. Определение отдельных собственных векторов методом обратной итерации со сдвигом

Необходимые расчетные формулы. По определению собственных значений для матрицы $A = (a_{ij})_{n \times n}$ можно записать

$$Ax = \lambda x, \qquad (1)$$

где λ - собственное значение; x - соответствующий собственный вектор. Пусть матрица А является невырожденной, тогда существует A^{-1}. Умножим обе части формулы (1) на A^{-1} слева, получим:

$$x = \lambda A^{-1} x .$$

Если $\lambda \neq 0$, то $\quad A^{-1}x = \frac{1}{\lambda} x . \qquad (2)$

Из формул (1) и (2) следует, что собственные значения матриц А и A^{-1} взаимно обратны.

Рассмотрим степенной итерационный процесс для определения наибольшего по модулю собственного значения и соответствующего собственного вектора матрицы A^{-1} :

$$x^{(s+1)} = A^{-1} x^{(s)}, \quad s = 0,1,2,... \qquad (3)$$

Приближения $\lambda_n^{(s)}$ к наименьшему по модулю собственному значению λ_n матрицы А будем определять по формуле

$$(s = 0,1,2,...),$$

где $x^{(s)} = (x_1^{(s)}, x_2^{(s)}, ..., x_n^{(s)})^T$, а приближением собственного вектора, соответствующего λ_n, на каждом шаге является вектор $x^{(s+1)}$.

Это последнее обстоятельство используется для определения собственных векторов матриц.

Пусть нам известно некоторое, но обязательно наименьшее собственное значение $\tilde{\lambda}_i$ матрицы A. Так называемая сдвинутая матрица ($A-\tilde{\lambda}_i E$) будет иметь собственные значения $\lambda - \tilde{\lambda}_i$. Действительно, по определению собственных значений имеем формулу (I) для матрицы A. Вычтем из обеих частей формулы (I) $\tilde{\lambda}_i x$, получим

$$(A-\tilde{\lambda}_i)x = (\lambda - \tilde{\lambda}_i)x.$$

Тогда у сдвинутой матрицы интересующее нас собственное значение $\lambda_i - \tilde{\lambda}_i$ будет намного меньше по модулю, чем остальные. Запишем степенной итерационный процесс для определения $\lambda_i - \tilde{\lambda}_i$, исходя из формулы (3):

$$x^{(s+1)} = (A-\tilde{\lambda}_i E)^{-1} x^{(s)} \quad (s=0,1,2,\dots) \tag{4}$$

или, умножив слева обе части равенства (4) на ($A-\tilde{\lambda}_i E$), получим

$$(A-\tilde{\lambda}_i E)x^{(s+1)} = x^{(s)} \quad (s=0,1,2,\dots). \tag{5}$$

Формула (5) есть формула обратных итераций для определения собственного вектора, соответствующего собственному значению λ_i матрицы A. Так как на каждом шаге приходится нормировать вектор $x^{(s)}$, то окончательные расчетные формулы для определения собственного вектора имеют вид:

$$(A-\tilde{\lambda}_i E)y^{(s)} = x^{(s)} \quad (s=0,1,2,\dots), \tag{6}$$

где $x^{(0)}$ – произвольный вектор;

$$\lambda_i^{(s)} - \tilde{\lambda}_i \approx \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{x_k^{(s)}}{y_k^{(s)}}}{n} \quad (s=0,1,2,\dots); \tag{7}$$

$$x^{(s+1)} = \frac{y^{(s)}}{\|y^{(s)}\|} \quad (s=0,1,2\dots), \tag{8}$$

где $x^{(s)} = (x_1^{(s)}, x_2^{(s)}, \dots, x_n^{(s)})^T$, $y^{(s)} = (y_1^{(s)}, y_2^{(s)}, \dots, y_n^{(s)})^T$

Замечание I. Если начальное приближение выбрано удачно, то итерационный процесс сходится быстро и поэтому можно непосредственно решать систему (6) на каждом шаге. В противном случае выгоднее обратить матрицу $(A - \tilde{\lambda}_i E)$.

Замечание 2. Если сдвиг постоянный, то итерации сходятся линейно. Можно получить квадратичную сходимость, если уточнять сдвиг в ходе расчета следующим образом:

$$\left(A - \lambda_i^{(s)} E\right) y^{(s)} = x^{(s)} \quad (s = 0,1,2,\dots);$$

$$\lambda_i^{(s+1)} = \lambda_i^{(s)} + \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^{(s)}}{y_k^{(s)}}\right) / n, \quad (s = 0,1,2,\dots);$$

$$x^{(s+1)} = \frac{y^{(s)}}{\| y^{(s)} \|} \quad (s = 0,1,2,\dots).$$

Замечание 3. Переменный сдвиг нельзя начинать с первой итерации. Надо сначала получить грубую сходимость итераций с постоянным сдвигом.

Порядок выполнения работы

I. Составить подробную блок-схему вычисления $\tilde{\lambda}_i$ по формуле (7) и нормирования вектора $x^{(s)}$ по формуле (8).
2. Составить и отладить подпрограмму решения системы (6), в которой матрица исходной системы приводилась к треугольному виду только один раз.
3. Составить и отладить программу метода обратной итерации со сдвигом.
4. Провести расчеты на ЭВМ.
5. Оформить отчет.

ПРИМЕР. Найти собственный вектор матрицы

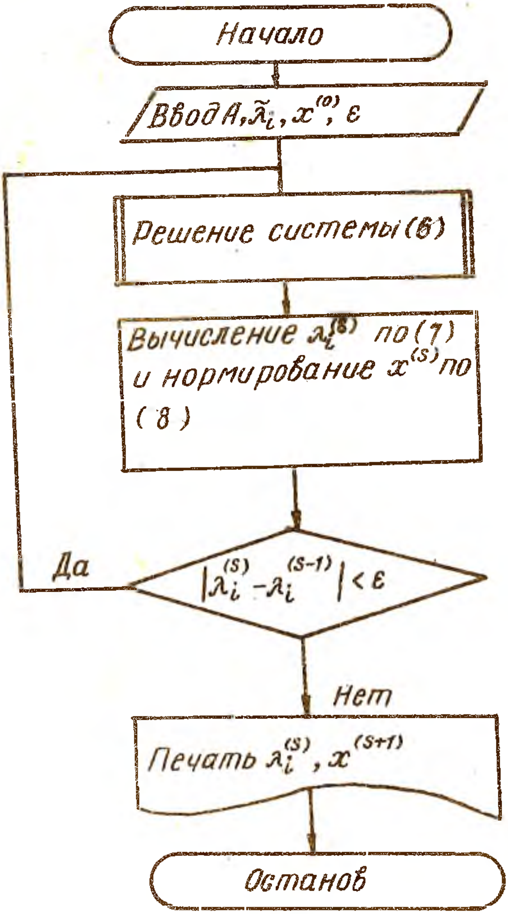
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix},$$

соответствующий собственному значению λ_1, приближенное значение которого $\tilde{\lambda}_1 = -4{,}28$.

Решение. Составим матрицу

$$A - \tilde{\lambda}_1 E = \begin{bmatrix} 6{,}28 & -1 & 3 \\ -2 & 8{,}28 & 5 \\ 3 & 2 & 3{,}28 \end{bmatrix}.$$

Блок - схема метода



Выберем начальный вектор $x^{(0)} = (1,1,1)^T$. Матрицу системы (8) нужно привести к треугольному виду, сохранив все вспомогательные коэффициенты. В результате получим матрицу

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ c_{21}^{(1)} & b_{22}^{(1)} & b_{23}^{(1)} \\ c_{31}^{(1)} & c_{32}^{(2)} & b_{33}^{(2)} \end{pmatrix},$$

где $b_{ii} = a_{ii} - \tilde{\lambda}_1$, $b_{ij} = a_{ij}$, если $j \neq i$;

$$C_{kj}^{(j)} = \frac{b_{kj}^{(j-1)}}{b_{jj}^{(j-1)}}, \quad j = 1,2,\dots,n-1, \quad k = j+1,\dots,n ;$$

$$b_{pl}^{(p-1)} = b_{pl}^{(p-2)} + \sum_{r=1}^{p-1} C_{pr}^{(r)} b_{rl}^{(r-1)}, \quad p = 1,2,\dots,n-1, \quad l = p,\dots,n .$$

Для нашей задачи получим таблицу приведения матрицы системы к треугольному виду.

Таблица I

Номер шага	Номер уравнения	Коэффициенты системы и вспомогательные коэффициенты		
I	I	6,28	-I	3
	2	-2	8,28	5
	3	3	2	3,28
2	2	0,3I85	7,96I5	5,9555
	3	-0,4777	2,4777	I,8469
3	3	-0,4777	-0,3II2	-0,00645

Для расчетов нам понадобятся коэффициенты I-го уравнения из I-го шага, 2-го уравнения из 2-го шага и 3-го уравнения из 3-го шага.

Расчеты по формулам (6), (7), (8) оформим в виде таблицы 2,

где $$\beta_k^{(s)} = x_k^{(s)} + \sum_{r=1}^{k-1} \beta_r^{(s)} C_{kr}^{(r)}, \quad k = 1,2,\dots,n, \quad s = 0,1,2,\dots$$

$$y_k^{(s)} = \left(\beta_k^{(s)} - \sum_{r=k+1}^{n} b_{kr}^{(k-1)} x_r^{(s)}\right) \Big/ b_{kk}^{(k-1)}, \quad k = 1,2,\dots,n, \quad s = 0,1,2,\dots$$

Таблица 2

s	$x_k^{(s)}$	$\beta_k^{(s)}$	$y_k^{(s)}$	$x_k^{(s)}/y_k^{(s)}$	$\lambda_1^{(s)} - \tilde{\lambda}_1$
0	I	I	I0,549	0,09480	0,03774
	I	I,3I85	I3,I548	0,07602	
	I	0,II20	-I7,3643	0,05759	
I	0,6075	0,6075	-I46,65	-0,004I43	0,004II8
	0,7576	0,95II	-I83,84	-0,004I2I	
	-I	-I,5862	245,92	-0,00409I	

2	0,5964 0,7476 -I	0,5964 0,9376 -I,5767	-I45,78 -I82,74 244,45	-0,00409I -0,00409I -0,00409I	0,00409I
3	0,5964 0,7476 -I				

Так как отношения $x_K^{(s)}/y_K^{(s)}$, K =I,2,3 совпадают на 2-м и 3-м шаге с точностью до 10^{-6}, то расчеты прекращаем. За собственный вектор x_I можно принять вектор $x_1 = (0,596;\ 0,748;\ -I)^T$. Одновременно мы уточнили собственное значение λ_1 :

$$\lambda_1 = \tilde{\lambda}_1 + (\lambda_1^{(s)} - \tilde{\lambda}_1) = -4,28 - 0,00409I = -4,284.$$

Литература к заданию: [I], [9].

Литература

I. Калиткин Н.Н. Численные методы.-М: Наука, I978.
2. Бахвалов Н.С. Численные методы.-М: Наука, I973.
3. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырский П.И. Вычислительные методы.-М: Наука,т.I, I976.
4. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики.-М.: Наука, I966.
5. Воробьева Г.Н., Данилова А.Н. Практикум по численным методам.-М.: Высшая школа, I979.
6. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры.-М.: Наука, I977.
7. Березин И.С., Жидков Н.Т. Методы вычислений.-М.: Физматгиз, т.2, I962.
8. Ефимов А.В., Золотарев Ю.Г., Терпигорева В.М. Математический анализ (специальные разделы).-М.: Высшая школа, т.2, I980.
9. Уилконсон Дж.Х. Алгебраическая проблема собственных значений. - М.: Наука, I970.

С О Д Е Р Ж А Н И Е