МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра дифференциальных уравнений и теории управления

О.В. Видилина, Е.В. Щетинина

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В АНАЛИЗЕ

Методические указания

Самара
Издательство «Универс групп»
2010

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Самарского государственного университета

УДК 517.9
ББК 22.161.6

Рецензент

доктор физико–математических наук, профессор О.П. Филатов

Видилина, О.В., Щетинина, Е.В.

Асимпототические методы в анализе : методические указания / О.В. Видилина, Е.В. Щетинина. – Самара : Изд-во «Универс групп», 2010. – 31 с.

В методических указаниях к спецкурсу «Асимптотические методы» содержатся лекции по асимптотическим методам и их применению для качественного исследования некоторых задач анализа, а также приводятся примеры решения конкретных задач. Предназначено для студентов механико-математических факультетов университетов по направлениям «математика» и «прикладная математика», может быть полезно аспирантам и специалистам в области математического моделирования и прикладной математики.

УДК 517.9
ББК 22.161.6

Оглавление

Введение

Асимптотические методы являются одним из наиболее мощных средств современной прикладной математики для решения различных задач. Методы малого параметра (или асимптотические методы) широко применяются в механике, физике и других науках, оперирующих дифференциальными уравнениями. Большинство этих методов возникли именно при решении конкретных задач механики и физики, а затем уже были развиты и обобщены. В настоящее время, в эпоху быстрого развития вычислительной техники, методы малого параметра не утрачивают своего значения. Они служат для выяснения качественных особенностей задач, для получения асимптотик и анализа особых точек, для построения «тестовых решений», а в ряде случаев служат для разработки вычислительных методов. Более того, в большинстве задач использовать напрямую численные методы не представляется возможным, так как наличие малого параметра усложняет компьютерные вычисления и может вести к накоплению ошибок при большом количестве итераций. В таких случаях целесообразно использовать асимптотические методы или комбинации из аналитических и численных преобразований.

Глава 1
Основные понятия

1.1 Регулярные и сингулярные возмущения

Математика изучает процессы, происходящие в реальном мире, с помощью математических моделей этих процессов. Любая математическая модель является приближенной, не адекватной полностью тому процессу, который она описывает. Конечно, при составлении математической модели стремятся к тому, чтобы она отражала все наиболее существенные стороны процесса. Однако, с другой стороны, математическая модель должна быть достаточно простой для исследования, должна давать возможность извлечь из нее доступными средствами необходимую информацию о процессе. Поэтому какие-то факторы, влияние которых на процесс представляется малым, неизбежно приходиться не учитывать, и они оказываются не представленными в математической модели.

Естественно поставить вопрос о роли этих неучтенных факторов. Чтобы ответить на этот вопрос, нужно составить более сложную (расширенную) модель, учитывающую те малые факторы, которые в первоначальной (упрощенной) модели не были представлены, и затем исследовать вопрос о близости решений, полученных из упрощенной и расширенной модели.

Учет малых факторов приводит, как правило, к тому, что в расширенной модели по сравнению с первоначальной появляются дополнительные члены с малым параметром множителями, которые и характеризуют малость этих факторов. Указанные малые множители называют *малыми параметрами*. Члены уравнения, содержащие малые параметры, называют *возмущение*, исходное уравнение, не содержащее этих членов, — *невозмущенным* (или вырожденным), а расширенное уравнение (расширенная модель) — *возмущенным* уравнением или уравнением с возмущениями.

Возмущения, встречающиеся в различных задачах, можно условно разделить на два класса: *регулярные возмущения* и *сингулярные возмущения.* Дадим формальное определение. Рассмотрим два уравнения

$$(A_0): \qquad L_0u = f_0;$$

$$(A_\varepsilon): \qquad L_0u + \varepsilon L_1u = f_0 + \varepsilon f_1.$$

Здесь L_0 и L_1 — заданные операторы, f_0 и f_1 — заданные функции, ε — малый числовой параметр (в дальнейшем будем считать, если не оговорено особо, что $\varepsilon > 0$), u — искомая функция от x (x может быть как одномерной, так и многомерной переменной). Уравнение (A_0) можно трактовать как упрощенную модель некоторого процесса, а уравнение (A_ε) — как расширенную модель. Члены εL_1u и εf_1 представляют собой возмущение. Если уравнения (A_0) и (A_ε) являются дифференциальными, то добавим также начальные или граничные условия, которые могут содержать малый параметр. Пусть эти уравнения (в совокупности с начальными или граничными условиями) рассматриваются в области D, т.е. $u = u(x)$, $x \in D$. Решение задачи (A_0) обозначим через $u_0(x)$, а задачи (A_ε) — через $u_\varepsilon(x)$.

Основной вопрос теории возмущений состоит в следующем: будет ли разность $u_\varepsilon(x) - u_0(x)$ стремиться в нулю при $\varepsilon \to 0$? В определенной степени вопрос зависит от выбора нормы. В дальнейшем под нормой вектора $u(x) = \mathrm{col}(u_1(x), \ldots, u_n(x))$ в каждой точке x будем понимать евклидову норму $\|u(x)\| = \sqrt{u_1^2(x) + \ldots + u_n^2(x)}$, в частности, если $u(x)$ — скалярная функция, то $\|u(x)\| = |u(x)|$.

Сформулируем определения регулярно возмущенной и сингулярно возмущенной задачи.

Определение 1.1 *Задача (A_ε) называется регулярно возмущенной, если*

$$\sup_{x \in D} \|u_\varepsilon(x) - u_0(x)\| \to 0 \quad \varepsilon \to 0.$$

В противном случае задача (A_ε) называется сингулярно возмущенной.

Из определения следует, что в случае регулярно возмущенной задачи решение $u_0(x)$ задачи (A_0) при малых ε будет близко к решению $u_\varepsilon(x)$ задачи (A_ε) во всей области D (равномерно по x). Если же задача (A_ε) — сингулярно возмущенная, то $u_0(x)$ при малых ε не будет близко к решению $u_\varepsilon(x)$ по крайнем мере в какой-то части области D.

Проиллюстрируем введенное определение на примерах.

Пример 1.2

Рассмотри уравнение

$$(A_\varepsilon): \quad x^2 - (4-\varepsilon)x + (3+2\varepsilon) = 0.$$

Это квадратное уравнение. Решения этого уравнения можно найти с помощью формул определения корней квадратного уравнения:

$$x_1 = 2 - \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\sqrt{4-16\varepsilon+\varepsilon^2}, \quad x_2 = 2 - \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{1}{2}\sqrt{4-16\varepsilon+\varepsilon^2}.$$

Соответствующая задача (A_0) имеет вид

$$(A_0): \quad x^2 - 4x + 3 = 0,$$

корни которой равны

$$x_1 = 3, \qquad x_2 = 1.$$

Нетрудно убедиться, что решения возмущенной задачи (A_ε) стремятся к решению невозмущенной задачи при $\varepsilon \to 0$. Значит, согласно определению, задача (A_ε) является регулярно возмущенной.

Пример 1.3

Рассмотри уравнение

$$(A_\varepsilon): \quad \varepsilon x^2 + x + 1 = 0.$$

Это квадратное уравнение. Решения этого уравнения можно найти с помощью формул определения корней квадратного уравнения:

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon}, \qquad x_2 = \frac{-1-\sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon}.$$

Соответствующая задача (A_0) имеет вид

$$(A_0): \quad x+1=0.$$

Невозмущенное уравнение является алгебраическим уравнением первого порядка. Таким образом, возмущенная задача (A_ε) и невозмущенная задача (A_0) являются задачами разных типов. Уравнение (A_0) имеет единственный корень $x = -1$. Нетрудно убедиться, что решения возмущенной задачи (A_ε) не стремятся к решению невозмущенной задачи при $\varepsilon \to 0$. Значит, согласно определению, задача (A_ε) является сингулярно возмущенной.

Пример 1.4

Рассмотрим задачу Коши для скалярного дифференциального уравнения

$$(A_\varepsilon): \quad \frac{du}{dx} = -u + \varepsilon x, \quad 0 \le x \le 1, \quad u(0) = 1.$$

Решение этой задачи элементарно определяется в явном виде

$$u_\varepsilon(x) = (1+\varepsilon)e^{-x} + \varepsilon(x-1).$$

Соответствующая задача (A_0) имеет вид

$$(A_0): \quad \frac{du}{dx} = -u, \quad 0 \le x \le 1, \quad u(0) = 1.$$

Отсюда

$$u_0(x) = e^{-x}.$$

Следовательно, при $\varepsilon \to 0$

$$\sup_{x\in[0,1]} \|u_\varepsilon(x) - u_0(x)\| = \varepsilon \max_{x\in[0,1]} \left(e^{-1} + x - 1\right) = \varepsilon e^{-1} \to 0,$$

и, значит, согласно определению, задача (A_ε) является регулярно возмущенной.

Пример 1.5

Рассмотрим задачу Коши

$$(A_\varepsilon): \quad \varepsilon\frac{du}{dx} = -u + x, \quad 0 \le x \le 1, \quad u(0) = 1.$$

Решение имеет вид

$$u_\varepsilon(x) = (1+\varepsilon)e^{-x/\varepsilon} + x - \varepsilon.$$

Уравнение (A_0), получающееся из (A_ε) при $\varepsilon = 0$, является в данном случае не дифференциальным, а алгебраическим:

$$(A_0): \quad 0 = -u + x,$$

и поэтому начального или дополнительного условия для решения задавать не нужно. Имеем

$$u_0(x) = x,$$

и, следовательно,

$$\sup_{x\in[0,1]} \|u_\varepsilon(x) - u_0(x)\| = \max_{x\in[0,1]} \left|(1+\varepsilon)e^{-x/\varepsilon} - \varepsilon\right| = 1.$$

Таким образом, $\sup_{x\in[0,1]} \|u_\varepsilon(x) - u_0(x)\|$ не стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$, а значит, согласно определению, задача (A_ε) является сингулярно возмущенной.

1.2 Асимптотические последовательности и асимптотические ряды. Сравнение сходящихся и асимптотических рядов

Введем понятия асимптотической последовательности.

Определение 1.6 *Последовательность*

$$\delta_0(\varepsilon), \delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon), \ldots$$

называется асимптотической, если выполняется соотношение

$$\delta_n(\varepsilon) = o(\delta_{n-1}(\varepsilon))$$

при $\varepsilon \to 0$.

Простейшими примерами асимптотических последовательностей являются:

$$1,\, \varepsilon,\, \varepsilon^2,\, \varepsilon^3,\, \ldots,$$

$$1,\, \sin\varepsilon,\, \sin\varepsilon^2,\, \sin\varepsilon^3,\, \ldots,$$

$$1,\, \varepsilon^{\frac{1}{2}},\, \varepsilon,\, \varepsilon^{\frac{3}{2}},\, \ldots,$$

$$1, (\log\varepsilon)^{-1}, (\log\varepsilon)^{-2}, (\log\varepsilon)^{-3}, \ldots.$$

Очевидно, что количество асимптотических последовательностей неограничено.

Введем понятие асимптотического разложения. Рассмотрим функцию $u(x,\varepsilon)$ и некоторую сумму $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x)\delta_n(\varepsilon)$, где $a_n(x)$ не зависит от ε, а $\delta_n(\varepsilon)$ есть асимптотическая последовательность.

Определение 1.7 *Сумма*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)\delta_n(\varepsilon)$$

называется асимптотическим разложением функции $u(x,\varepsilon)$, *если выполняется соотношение*

$$u(x,\varepsilon)=\sum_{n=0}^{N}a_n(x)\delta_n(\varepsilon)+O(\delta_{N+1}(\varepsilon)),\qquad \varepsilon\to 0.$$

В этом случае мы пишем

$$u(x,\varepsilon)\sim\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x)\delta_n(\varepsilon).$$

Из того факта, что количество асимптотических последовательностей неограничено, следует, что и некоторое асимптотическое разложение функции не является единственным. В большинстве случаев, если не оговаривается особо, мы будем определять и исследовать асимптотические разложения по асимптотической последовательности

$$1,\ \varepsilon,\ \varepsilon^2,\ \varepsilon^3,\ \ldots.$$

В этом случае говорят, что мы исследуем ряд по степеням ε.

Обратим внимание на важный момент: асимптотический ряд может и не сходиться к функции u и даже может быть расходящимся. Приведем пример асимптотического ряда, который расходится.

Пример 1.8

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\varepsilon\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x^2}-\frac{1}{x}.\tag{1.1}$$

Будем искать его решение в виде асимптотического ряда по степеням ε:

$$y(x,\varepsilon)=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n y_n(x).$$

Подставляя этот ряд в уравнение (1.1), получим

$$\varepsilon\left(y_0'+\varepsilon y_1'+\cdots\right)=-\frac{1}{x^2}\left(y_0+\varepsilon y_1+\cdots\right)-\frac{1}{x}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε в обеих частях равенства, приходим к уравнениям:

$$0 = -\frac{y_1}{x^2} - \frac{1}{x}, \quad y_0' = -\frac{y_1}{x^2}, \quad \ldots, \quad y_{n-1}' = -\frac{y_n}{x^2}, \quad \ldots,$$

откуда последовательно находим коэффициенты искомого ряда:

$$y_0 = -x,\ y_1 = x^2,\ y_2 = -(2!)x^3,\ y_n = (-1)^{n+1}(n!)x^{n+1}, \ldots.$$

Таким образом, мы построили ряд

$$Y(x,\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1}\varepsilon^n (n!)x^{n+1}, \tag{1.2}$$

который, очевидно, расходится при всех $\varepsilon > 0$ во всех точках x, кроме точки $x = 0$.

Покажем, что этот расходящийся ряд является асимптотических рядом для некоторого решения уравнения (1.1). Будем рассматривать уравнение (1.1) на промежутке $0 < x \leq a$. Общее решение уравнения имеет вид

$$y(x,\varepsilon;C) = Ce^{1/\varepsilon x} - \left(\int\limits_0^x \frac{1}{\varepsilon t} e^{-1/\varepsilon t}\,dt\right) e^{1/\varepsilon x}.$$

Здесь C - произвольная постоянная. Рассмотрим частное решение уравнения при $C = 0$:

$$y(x,\varepsilon;0) = -\left(\int\limits_0^x \frac{1}{\varepsilon t} e^{-1/\varepsilon t}\,dt\right) e^{1/\varepsilon x}.$$

Интегрируя трижды по частям, получим

$$y(x,\varepsilon;0) = \left(\int\limits_0^x \frac{1}{\varepsilon t} e^{-1/\varepsilon t}\,dt\right) e^{1/\varepsilon x} =$$

$$= -x + \left(\int_0^x \varepsilon t^2 \, d(e^{-1/\varepsilon t}) \right) e^{1/\varepsilon x} =$$

$$= -x + \varepsilon x^2 - \left(\int_0^x 2\varepsilon t^2 e^{-1/\varepsilon t} \, dt \right) e^{1/\varepsilon x} =$$

$$= -x + \varepsilon x^2 - 2\varepsilon^2 x^3 + \varepsilon^2 \left(\int_0^x 6t^2 e^{-1/\varepsilon t} \, dt \right) e^{1/\varepsilon x}.$$

Так как $e^{-1/\varepsilon t + 1/\varepsilon x} \leq 1$ при всех $0 < t \leq x$, то последнее слагаемое в полученном равенстве можно оценить:

$$\left| \varepsilon^2 \left(\int_0^x 6t^2 e^{-1/\varepsilon t} \, dt \right) e^{1/\varepsilon x} \right| \leq \varepsilon^2 \int_0^x 6t^2 dt = 2\varepsilon^2 x^3 \leq 2\varepsilon^2 a^3.$$

Таким образом,

$$y(x, \varepsilon; 0) = -x + \varepsilon x^2 + O(\varepsilon^2).$$

Продолжая интегрировать по частям, придем к равенству

$$y(x, \varepsilon; 0) = \sum_{n=0}^{N} (-1)^{n+1} (n!) \varepsilon^n x^{n+1} + O(\varepsilon^{N+1}).$$

Это равенство показывает, что расходящийся ряд (1.2) является асимптотическим рядом при $\varepsilon \to 0$ для решения $y(x, \varepsilon; 0)$ уравнения (1.1) на промежутке $0 < x \leq a$.

Глава 2

Приближенное решение уравнений

2.1 Асимптотические приближения в невырожденном случае

Простейшим примером применения асимптотических методов является задача определения корней алгебраических уравнений. Рассмотрим следующий пример.

Пример 2.1

Решить уравнение:

$$x^2 - 3,99x + 3,02 = 0. \tag{2.1}$$

Для того, чтобы приближенно решить уравнение с помощью асимптотических методов, необходимо выполнить следующие действия:

1. Заметим, что $-3,99 = -4 + 0,01$ и $3,02 = 3 + 0,02$. Также исходное уравнение «близко» к уравнению

$$x^2 - 4x + 3 = 0, \tag{2.2}$$

корни которого можно найти явно ($x^{(1)} = 1, x^{(2)} = 3$). Уравнение (2.2) является *порождающим* (вырожденным или невозмущенным) уравнением.

2. Следующим шагом мы вместо исходного уравнения введем в рассмотрение семейство задач, зависящих от малого параметра ε:

$$x^2 - (4 - \varepsilon)x + (3 + 2\varepsilon) = 0. \tag{2.3}$$

При $\varepsilon = 0,01$ мы получаем исходную задачу. Однако при изменении ε мы получаем семейство уравнений. Полагая $\varepsilon = 0$, получаем уравнение (2.2). Уравнение (2.3) — это пример *возмущенного семейства уравнений.*

3. Будем искать решения возмущенного уравнения (2.1) в виде ряда по степеням ε :

$$x^{(i)} = x_0^{(i)} + \varepsilon x_1^{(i)} + \varepsilon^2 x_2^{(i)} + \cdots, \quad i = 1, 2.$$

Подставляем эти разложения в уравнение (2.1) :

$$\left(x_0^{(i)} + \varepsilon x_1^{(i)} + \varepsilon^2 x_2^{(i)} + \cdots\right)^2 -$$

$$-(4-\varepsilon)\left(x_0^{(i)} + \varepsilon x_1^{(i)} + \varepsilon^2 x_2^{(i)} + \cdots\right) + (3 + 2\varepsilon) = 0.$$

Выписывая коэффициенты при каждой степени ε и приравнивая их к нулю, получаем систему уравнений для нахождения коэффициентов разложения. При нулевой степени ε имеем:

$$(x_0^{(i)})^2 - 4x_0^{(i)} + 3 = 0,$$

которое совпадает с порождающим уравнением (2.2). Корни этого уравнения равны $x_0^{(1)} = 1, x_0^{(2)} = 3$. Найденные корни являются приближениями для точных решений. Чтобы определить дальнейшие коэффициенты разложения выберем один из найденных корней. Например, возьмем $x_0^{(1)} = 1$.

Найдем коэффициенты при первой степени ε :

$$2x_0^{(1)}x_1^{(1)} - 4x_1^{(1)} + x_0^{(1)} + 2 = 0.$$

Если $x_0^{(1)} = 1$, то $x_1^{(1)} = 3/2$.

Аналогично определяем коэффициенты при ε^2 :

$$x_2^{(1)} = \frac{15}{8}.$$

Таким образом, мы получили, что одно из приближенных решений уравнения (2.3) имеет вид

$$x_1 = 1 + \varepsilon\frac{3}{2} + \varepsilon^2\frac{15}{8} + \cdots.$$

Подставляя в эту формулу $\varepsilon = 0,01$, находим приближенное решение уравнения (2.2)

$$x_1 \approx 1.015187500.$$

Коэффициенты разложения для второго корня читателю предлагается найти самостоятельно.

Замечание. Очевидно, что переход от порождающего уравнения (2.2) к исходному уравнению (2.1) не единственный. В качестве возмущенного семейства мы можем выбрать, например, такие:

$$x^2 - (4 - \frac{1}{2}\varepsilon)x + (3 + \varepsilon) = 0, \qquad \varepsilon = 0,02,$$

$$x^2 - (4 - \frac{1}{10}\varepsilon)x + (3 + 2\varepsilon^2) = 0, \qquad \varepsilon = 0,1$$

и еще множество других. Таким образом, вопрос о рациональном выборе малого параметра и соответствующего возмущенного семейства является достаточно сложным и важным.

Рассмотрим общий случай. Пусть требуется найти приближенное решение уравнения

$$f(x, \varepsilon) = 0 \tag{2.4}$$

в виде $x = x(\varepsilon)$. Здесь f — некоторая достаточно гладкая функция переменных x, ε. Условия существование корней x этого уравнения описаны в теореме о неявной функции (см., например [3]).

Предположим уравнение

$$f(x, 0) = 0 \tag{2.5}$$

имеет решение $x = x^0$.

Будем искать приближенное решение уравнения (2.4) в виде

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon x_2 + \ldots, \tag{2.6}$$

где $x_0, x_1, x_2, \ldots$ — некоторые числа. Подставим разложение (2.6) в уравнение (2.4):

$$f(x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon x_2 + \ldots, \varepsilon) = 0.$$

В предыдущем примере функция f была многочленом от x, поэтому подставляя в нее разложение (2.6), мы получали многочлены относительно ε. В общем случае зависимость f от x и ε может быть произвольной. Чтобы получить степенную функцию относительно ε разложим функцию f в ряд по степеням ε в окрестности $\varepsilon = 0$.

$$f(x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon x_2 + \ldots, \varepsilon) =$$

$$= f(x_0, 0) + \varepsilon \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, 0) x_1 + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f(x_0, 0) \right) +$$

$$+ \frac{1}{2} \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} x_1^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial \varepsilon} f(x_0, 0) x_1 + \right.$$

$$\left. + 2 \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, 0) x_2 + \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} f(x_0, 0) \right) + \ldots.$$

Подставляя полученное разложение в левую часть уравнения (2.4) и приравнивая коэффициенты при каждой степени ε к нулю, получаем уравнения для определения коэффициентов разложения. Следовательно:

$$f(x_0, 0) = 0;$$

$$x_1 = -\frac{\frac{\partial}{\partial \varepsilon} f(x_0, 0)}{\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, 0)};$$

$$x_2 = -\frac{1}{2 \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, 0)} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} x_1^2 + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial \varepsilon} f(x_0, 0) x_1 + \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} f(x_0, 0) \right);$$

и так далее. Очевидно, что коэффициенты разложения можно определить только если

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, 0) \neq 0.$$

Это же условие является ключевым в теореме о неявной функции.

Таким образом, если к условиям теоремы о неявной функции добавить условие гладкости функции f из левой части уравнения, мы можем найти приближенное решение уравнения (2.4) с любой наперед заданной степенью точности.

Для того, чтобы оценить погрешность найденного приближенного решения, рассмотрим разность между найденным решением и точным решением. Чтобы оценить эту разность необходимо при разложении функции f в ряд Тейлора воспользоваться оценкой на остаточный член разложения в любой форме. Нетрудно показать, что оценка погрешности найденного решения не превосходит оценки остаточного члена, умноженной на некоторую константу.

Упражнения.

Найти приближенные решения уравнений:

1. $x^2 + (10 + \varepsilon)x + (21 + 2\varepsilon) = 0$,
2. $x^2 + (6 + \varepsilon)x + (9 + 2\varepsilon) = 0$,
3. $(x - 2)^2(x - 3) + \varepsilon = 0$.

2.2 Решение уравнений в вырожденном случае

В данном параграфе мы рассмотрим несколько примеров, в которых нарушаются условия теоремы о неявной функции. Будут описаны методы, с помощью которых будут построены приближенные решения для этих уравнений.

Опишем *метод построения асимптотического разложения с помощью весовых функций.*

Пример 2.2

Рассмотрим уравнение из Упражнения 3 предыдущего параграфа:

$$(x - 2)^2(x - 3) + \varepsilon = 0. \tag{2.7}$$

Порождающее уравнение имеет корни $x^{(1)} = 3, x^{(2)} = x^{(3)} = 2$. Так как корень $x^{(1)} = 3$ простой, то $\partial f(3,0)/\partial x \neq 0$, и приближенное решение, находящееся в окрестности 3 может быть найдено с помощью метода, изложенного в предыдущем параграфе. Корень $x^{(2)} = x^{(3)} = 2$ является кратным, поэтому $\partial f(2,0)/\partial x = 0$, и теория предыдущего параграфа неприменима.

Будем искать решения уравнения (2.7), находящиеся вблизи кратного корня, в виде асимптотического ряда по некоторой последовательности $\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon), \ldots$, а именно

$$x = 2 + x_1\delta_1(\varepsilon) + x_2\delta_2(\varepsilon) + \ldots,$$

где $x_1, x_2, \ldots$ — некоторые числа. Первый элемент асимптотической последовательности удобнее взять равным $\delta_0(\varepsilon) = 1$, так как мы знаем нулевое приближение решения. Требуется определить коэффициенты разложения $x_1, x_2, \ldots$ и последовательность $\delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon), \ldots$. Чтобы иметь возможность определить все неизвестные величины, наложим некоторые дополнительные условия на последовательность $\delta_i(\varepsilon)$: будем предполагать, что последовательность асимптотическая. Определим x_1 и $\delta_1(\varepsilon)$. Для этого подставим приближенное решение

$$x = 2 + x_1\delta_1(\varepsilon)$$

в исходное уравнение, получаем (для краткости будем писать просто δ_1):

$$(x_1\delta_1)^3 - (x_1\delta_1)^2 + \varepsilon = 0.$$

Так как функция $\delta_1 < 1$, то $\delta_1^3 \ll \delta_1^2$. Пренебрегая первым слагаемым в виду его малости (соответствующие добавки будут учтены при определении дальнейших коэффициентов разложения), получаем

$$-(x_1\delta_1)^2 + \varepsilon = 0.$$

Оставшиеся слагаемые должны быть одного порядка. Предположим, что это не так. Если *доминантное* первое слагаемое, то тогда $x_1 = 0$, и мы не получаем улучшения для приближенного решения. Если доминантное второе слагаемое, то тогда получаем, что $\varepsilon = 0$, что противоречит условиям задачи. Единственно возможный вариант — это принять, что δ_1^2 такого же порядка, как ε.

Предположим,

$$\delta_1 = \varepsilon^{\frac{1}{2}},$$

тогда

$$x_1 = \pm 1.$$

Получаем

$$x^{(1)} = 2 + \varepsilon^{\frac{1}{2}},$$

$$x^{(2)} = 2 - \varepsilon^{\frac{1}{2}}.$$

Для того, чтобы определить дальнейшие коэффициенты разложения, подставим в уравнение приближенное решение вида

$$x = 2 + x_1\delta_1(\varepsilon) + x_2\delta_2(\varepsilon).$$

Получаем

$$-2x_2(\varepsilon^{1/2}\delta_2) - x_2^2\delta_2^2 + \varepsilon^{3/2} +$$
$$+3x_2(\varepsilon\delta_2) + 3x_2^2(\varepsilon^{1/2}\delta_2^2) + x_2^3\delta_2^3 = 0.$$

Так как δ_2 является членом асимптотической последовательности, то $\delta_2^3 \ll \delta_2^2$, $\varepsilon\delta_2 \ll \varepsilon^{1/2}\delta_2$, $\varepsilon^{1/2}\delta_2^2 \ll \delta_2^2$. Отбрасывая малые слагаемые, получаем уравнение:

$$-2x_2(\varepsilon^{1/2}\delta_2) - x_2^2\delta_2^2 + \varepsilon^{3/2} = 0.$$

Будем считать, что два слагаемых здесь одного порядка, а третье — существенно меньше. Перебирая возможные варианты, мы должны выбрать такую пару x_2, δ_2, чтобы последовательность δ_i была асимптотической, а $x_2 \neq 0$. Получаем, что $\delta_2 \sim \varepsilon$.

Тогда выбираем

$$\delta_2 = \varepsilon, \qquad x_2 = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, приближенные решения имеют вид

$$x^{(1)} = 2 + \varepsilon^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\varepsilon,$$

$$x^{(2)} = 2 - \varepsilon^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Как видно из этого примера, этот метод построения асимптотических разложений с помощью весовых функций является достаточно сложным для вычислений и требует большой аккуратности. Разновидностью этого метода является *метод перенормировки.*

Пример 2.3

Решить приближенно уравнение:

$$(x-1)^3 + \varepsilon x = 0.$$

Вырожденное уравнение имеет единственный корень $x = 1$ кратности 3. Сначала с помощью метода весовых функций определим первую весовую функцию δ_1

$$x = 1 + x_1\delta_1.$$

Подставляя это приближение в исходное уравнение и опуская недоминантные слагаемые, получаем

$$\delta_1 = \varepsilon^{1/3}, \qquad x_1 = -1.$$

Сделаем замену переменных

$$x = 1 + \mu y,$$

или

$$y = \frac{x-1}{\mu}$$

где $\mu = \varepsilon^{1/3}$. В новых переменных получаем уравнение

$$y^3 + 1 + \mu y = 0.$$

Вырожденное уравнение имеет три различных (комплексных) корня. Таким образом, к этой задаче применим метод из параграфа 2.1. Получаем для одного из корней:

$$y^{(1)} = -1 + \frac{1}{3}\mu + \frac{2}{9}\mu^2.$$

С помощью обратной замены $x = 1 + \varepsilon^{1/3} y$, найдем решения исходного уравнения:

$$x^{(1)} = 1 - \varepsilon^{1/3} + \frac{1}{3}\varepsilon^{2/3} + \frac{2}{9}\varepsilon + O(\varepsilon^{4/3}).$$

Остальные корни предлагаем определить читателю.

Пример 2.4

Решить приближенно уравнение

$$\varepsilon x^2 + x + 1 = 0.$$

Это сингулярно возмущенное уравнение. Вырожденное уравнение $x + 1 = 0$ имеет единственное решение $x = -1$. Так как

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, \varepsilon)(x = -1, \varepsilon = 0) = 1 \neq 0,$$

то $x = -1$ является приближением для некоторого корня уравнения. Коэффициенты разложения могут быть вычислены обычным образом (см. параграф 2.1):

$$x = -1 - \varepsilon - 2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3).$$

Проверка правильности коэффициентов коэффициентов предоставляется читателю.

Второй корень уравнения существует только при $\varepsilon \neq 0$, следовательно, найти его с помощью методов предыдущего параграфа не представляется возможным. Будем искать приближенное решение в виде асимптотического ряда по некоторой асимптотической последовательности $\delta_i(\varepsilon)$. Найдем нулевое приближение в виде:

$$x = x_0 \delta_0.$$

В данном примере мы уже не можем брать $\delta_0 = 1$, так как неизвестно нулевое приближение решения. Подставляя это выражение, получаем:

$$\varepsilon x_0^2 \delta_0^2 + x_0 \delta_0 + 1 = 0.$$

Возможны 3 варианта выбора весовой функции δ_0: $\delta_0 = \varepsilon^{-1}$, $\delta_0 = \varepsilon^{-1/2}$ и $\delta_0 = 1$. Второй случай должен быть опущен, так как это ведет к тому, что второе слагаемое становится доминантным, а первое и третье — существенно меньше. Третий случай тоже должен быть опущен, так как при таком выборе δ_0 мы получаем только один корень уравнения. Следовательно, выбираем $\delta_0 = \varepsilon^{-1}$. Тогда $x_0 = -1$.

Введем новую переменную

$$y = \varepsilon x.$$

В новых координатах уравнение примет вид:

$$y^2 + y + \varepsilon = 0.$$

Соответствующее вырожденное уравнение имеет вид:

$$y^2 + y = 0,$$

оно имеет два различных корня $y^{(1)} = 0, y^{(2)} = -1$. Таким образом, мы можем применить метод из параграфа 2.1 и вычислить коэффициенты асимптотического разложения приближенного решения уравнения:

$$y^{(1)} = 0 - \varepsilon - \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3),$$

$$y^{(2)} = -1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3).$$

Переходя к старым координатам, получаем

$$x^{(1)} = -1 - \varepsilon + O(\varepsilon),$$

$$x^{(2)} = -\frac{1}{\varepsilon} + 1 + \varepsilon + O(\varepsilon^2).$$

Корень $x^{(1)}$ совпадает с тем, который был найден ранее.

Упражнения.

Решить приближенно уравнения

1. $(x-1)^3 + \varepsilon x = 0$;
2. $x^3 + \varepsilon x + 2\varepsilon^2 = 0$;
3. $(x-1)^4 - 2\varepsilon(x-1)^2 - \varepsilon^2(x-1)^2 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon^3 + \varepsilon^4 = 0$;
4. $\varepsilon x^3 + x^2 - 4 = 0$.

Глава 3

Вычисление интегралов

Данная глава будет посвящена методам приближенной оценки интегралов, являющихся решениями обыкновенных дифференциальных уравнений и не выражающихся в элементарных функциях. Мы рассмотрим такие методы, как разложение подынтегральной функции, интегрирование по частям. Все эти методы будут продемонстрированы на специальных примерах. Более подробно об этих и других методах см., например, [2].

3.1 Разложение подынтегральной функции

Пример 3.1

Оценить величину интеграла

$$I(\varepsilon) = \int\limits_0^1 \sin \varepsilon x^2 \, dx \tag{3.1}$$

при малых ε. Разложение подынтегральной функции в ряд Тейлора дает

$$\sin \varepsilon x^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (\varepsilon x^2)^{2n-1}}{(2n-1)!} = \varepsilon x^2 - \frac{1}{6}\varepsilon^3 x^6 + \frac{1}{120}\varepsilon^5 x^{10} + O(\varepsilon^7). \tag{3.2}$$

Применяя к полученному ряду признак Даламбера, имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-(\varepsilon x^2)^2}{(2n-1)(2n-2)} = 0.$$

Следовательно, ряд (3.2) сходится при любых значениях εx^2. Поскольку $|x| < 1$, а ε мало, то остаточный член в формуле (3.2) есть величина порядка ε^7 для всех значений x из промежутка интегрирования. Подставляя ряд (3.2) в исходный интеграл и интегрируя почленно, получаем

$$I(\varepsilon) = \frac{(-1)^{n+1}\varepsilon^{2n-1}}{(2n-1)!}\int_0^1 x^{4n-2}\,dx =$$

$$= \frac{(-1)^{n+1}\varepsilon^{2n-1}}{(2n-1)!(4n-1)} = \frac{1}{3}\varepsilon - \frac{1}{42}\varepsilon^3 + \frac{1}{1320}\varepsilon^5 + O(\varepsilon^7).$$

Пример 3.2

Рассмотрим интеграл

$$I(x) = \int_0^x t^{-3/4}e^{-t}\,dt, \tag{3.3}$$

при малых x. Разложим экспоненту, входящую в подынтегральную функцию, в ряд Тейлора

$$e^{-t} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^n}{n!} = 1 - t + \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{24}t^4 + O(t^5). \tag{3.4}$$

Используя признак Даламбера, имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{-t}{n} = 0$$

для любых t. Следовательно, ряд (3.4) сходится при всех значениях t. Кроме того, если считать t малым, порядок ошибки в разложении (3.4) будет равномерным по t.

Подставляя ряд (3.4) в интеграл (3.3) и интегрируя почленно, получаем

$$I(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^x t^{n-3/4}\,dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1/4}}{n!(n+1/4)} =$$

$$= 4x^{1/4} - \frac{4}{5}x^{5/4} + \frac{2}{9}x^{9/4} - \frac{2}{39}x^{13/4} + O(x^{17/4}).$$

3.2 Интегрирование по частям

Оценить значение интеграла при малых ε для $0 < x \le a$:

$$I(x,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^x t^{-1}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon x} - \frac{1}{\varepsilon t}\right)dt.$$

Метод интегрировании по частям основан на равенстве

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Обычно разбиение на множители при интегрировании по частям осуществляется таким образом, чтобы выражение для dv можно было проинтегрировать. Кроме того, множители следует выбирать таким образом, чтобы последовательные разложения интеграла являлись бы величинами более высокого порядка малости по малому параметру ε. Интегрируя по частям, получим

$$I(x,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^x t^{-1}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon x} - \frac{1}{\varepsilon t}\right)dt = \int\limits_0^x t d\left(\exp\left(\frac{1}{\varepsilon x} - \frac{1}{\varepsilon t}\right)\right) =$$

$$= t\exp\left(\frac{1}{\varepsilon x} - \frac{1}{\varepsilon t}\right)\Bigg|_0^x - \int\limits_0^x \exp\left(\frac{1}{\varepsilon x} - \frac{1}{\varepsilon t}\right)dt =$$

$$= x - \int\limits_0^x \varepsilon t^2\, d\left(\exp\left(\frac{1}{\varepsilon x} - \frac{1}{\varepsilon t}\right)\right) =$$

$$= x - \varepsilon x^2 + \int\limits_0^x 2\varepsilon t^2\exp\left(\frac{1}{\varepsilon x} - \frac{1}{\varepsilon t}\right)dt =$$

$$= x - \varepsilon x^2 + 2\varepsilon^2 x^3 - \varepsilon^2\int\limits_0^x 6t^2\exp\left(\frac{1}{\varepsilon x} - \frac{1}{\varepsilon t}\right)dt.$$

Так как $e^{-1/\varepsilon t+1/\varepsilon x} \le 1$ при всех $0 < t \le x$, то последнее слагаемое в полученном равенстве можно оценить

$$\left|\varepsilon^2 \left(\int\limits_0^x 6t^2 \exp\left(\frac{1}{\varepsilon x} - \frac{1}{\varepsilon t}\right) dt\right)\right| \le \varepsilon^2 \int\limits_0^x 6t^2 dt = 2\varepsilon^2 x^3 \le 2\varepsilon^2 a^3.$$

Таким образом,

$$I(x,\varepsilon) = x - \varepsilon x^2 + O(\varepsilon^2).$$

Продолжая интегрировать по частям, придем к равенству

$$I(x,\varepsilon) = \sum_{n=0}^{N} (-1)^{n+1} (n!) \varepsilon^n x^{n+1} + O(\varepsilon^{N+1}).$$

Таким образом, мы можем вычислить интеграл с необходимой степенью точности при малых ε на промежутке $0 < x \le a$.

Упражнения.

1. Показать, что при $x \to \infty$

$$\int\limits_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dx \sim e^{-x} \left(\frac{1}{x} - \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \frac{3!}{x^4}\right).$$

2. Оценить величину интеграла при $x \to 0$:

$$\int\limits_0^x t^{3/4} e^{-t}\, dt$$

3. Исследовать неполную гамма-функцию при больших x:

$$I(x) = \int\limits_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt.$$

Указание. В качестве малого параметра следует рассматривать величину x^{-1}.

4. Исследовать интеграл при больших x:

$$I(x) = \int\limits_{x}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,dt.$$

Указание. В качестве малого параметра следует рассматривать величину x^{-1}.

Литература

1. Найфэ А.Х. *Методы возмущений.* – М.: Мир, 1976. 455 с.

2. Олвер Ф. *Введение в асимптотические методы и специальные функции.* – М.: Наука, 1978. 376 с.

3. Фихтенгольц Г.М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления.* Т.1. – М.: ОГИЗ, Гостехиздат, 1948. 860 с.

4. Эрдеи А. *Асимптотические разложения.* -– М.: Физматгиз, 1962. 127 с.