Министерство высшего и среднего специального образования
РСФСР

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени

авиационный институт имени академика С.П.Королева

БИЛИНЕЙНЫЕ И КВАДРАТИЧНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ

Утверждено редакционно-издательским
советом института
в качестве методических указаний
для студентов

Куйбышев 1985

УДК 517 (076)

Методические указания содержат краткие теоретические сведения, решения типовых задач и расчетные задания (50 вариантов) по важному разделу линейной алгебры - билинейным и квадратичным функционалам.

Предназначены для студентов КуАИ. Могут быть полезны студентам других втузов для самостоятельной работы, а также преподавателям при составлении контрольных, самостоятельных работ и индивидуальных заданий.

Составители: О.С.И в а н о в а, В.М.Ч е р н о в

Рецензенты: В.Г.Гумеров, И.В.Демин

I. БИЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ

I.I. Теоретические сведения

Определение I. Функция $f(x, y)$ двух векторных аргументов $\bar{x}$, y ($x, y \in V$) со значениями в поле вещественных чисел $\mathbb{R}$ называется билинейным функционалом (БФ), если выполняются следующие условия

БФI. $\left.\begin{aligned} &f(x_1 + x_2, y) = f(x_1, y) + f(x_2, y) \\ &f(x, y_1 + y_2) = f(x, y_1) + f(x, y_2) \end{aligned}\right\}$ (аддитивность)

БФ2. $\left.\begin{aligned} &f(\lambda x, y) = \lambda f(x, y) \\ &f(x, \lambda y) = \lambda (x, y) \end{aligned}\right\}$ (однородность)

для любых $x_1, x_2, y_1, y_2, x, y \in V$; $\lambda \in \mathbb{R}$.

Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – базис векторного пространства V, $x, y \in V$. $x = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$ $y = \beta_1 e_1 + \ldots + \beta_n e_n$.
Тогда последовательное применение аксиом БФI и БФ2 приводит к равенству

$$f(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \beta_j f(e_i, e_j). \qquad (I)$$

Правая часть соотношения (I) позволяет вычислять значения БФ $f(x,y)$ для любой пары аргументов x, $y \in V$, если заданы всевозможные значения БФ для пар базисных векторов – $f(e_i, e_j)$. Положим $b_{ij} = f(e_i, e_j)$ и рассмотрим матрицу

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Пусть далее

$$x = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix},$$

t – значок транспонирования. Непосредственным матричным умножением легко проверить тождество

$$x^t B y = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \beta_j b_{ij} = f(x, y), \qquad (2)$$

которое в сравнении с (I) позволяет перевести теорию БФ на более наглядный и простой язык матричной алгебры. Так как $b_{ij} = f(e_i, e_j)$, то формулы (I) и (2) неявным образом зависят от выбора базиса $e_1, \ldots, e_n$ (который в векторном пространстве может быть выбран достаточно произвольно). Поэтому матрица $B = (b_{ij})$ называется матрицей БФ в данном базисе.

2. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ. ОРТОГОНАЛИЗАЦИЯ

2.I. Теоретические сведения

Частным случаем билинейного функционала является скалярное произведение.

О п р е д е л е н и е. БФ называется скалярным произведением (СП), если

СПI. $f(x,y)=f(y,x)$ (симметричность)

СП2. $f(x,x)\geqslant 0$ (причем $f(x,x)=0$ тогда и только тогда, когда $x=\theta$ – (положительная определенность СП)

З а м е ч а н и е I. В обозначении БФ $f(x,y)$, являющегося СП, значок f функции обычно опускают, оставляя лишь скобки, аргументы и запятую (,).

З а м е ч а н и е 2. Популярное школьное определение скалярного произведения – произведение длин векторов на косинус угла между ними – является явно недостаточным. Оно охватывает лишь очень частный случай пространства геометрических векторов-стрелок, причем выполнимость требований билинейности, симметричности и положительной определенности необходимо доказать.

Практически, если задана матрица БФ, проверка симметричности и положительной определенности сводится к проверке симметричности (т.е. $B=B^t$) матрицы БФ и установления выполнимости требования положительной определенности с помощью критерия Сильвестра:

$$b_{11}>0,\quad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}>0,\ \ldots,\ \begin{vmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix}>0.$$

Наиболее простой вид СП имеет в так называемых ортонормированных базисах $e_1,\ldots,e_n$, т.е. когда

$$(e_i,e_j)=\begin{cases} 0, & i\neq j \\ 1, & i=j \end{cases}$$

В этом случае матрица БФ – скалярного произведения просто единичная матрица E и если $x=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, $y=(\beta_1,\ldots,\beta_n)$, то

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i .$$

Имея некоторый базис $e_1,\ldots,e_n$ можно его преобразованием по методу Грама-Шмидта получить ортогональный базис $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$.

2.2. Метод Грама-Шмидта

Положим

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_1 &= e_1, \\
\mathcal{E}_2 &= e_2 - \lambda_{21}\mathcal{E}_1, \\
\mathcal{E}_3 &= e_3 - \lambda_{32}\mathcal{E}_2 - \lambda_{31}\mathcal{E}_1, \\
&\dots\dots\dots \\
\mathcal{E}_n &= e_1 - \lambda_{n,n-1}\mathcal{E}_{n-1} - \dots - \lambda_{n1}\mathcal{E}_1 ,
\end{aligned} \qquad (I)$$

где коэффициенты $\lambda_{k\ell}$ находятся по формулам

$$\lambda_{k\ell} = \frac{(e_k, e_\ell)}{(\mathcal{E}_\ell, \mathcal{E}_\ell)}$$

Метод Грама-Шмидта позволяет, естественно, ортогонализировать и меньшее, чем размерность пространства, число линейно независимых векторов. В этом случае построение ортогонального базиса будет включать в себя и нахождение дополнительных векторов $\mathcal{E}_{k+1}, \mathcal{E}_{k+2}, \dots, \mathcal{E}_n$, ортогональных к уже полученным по методу Грама-Шмидта из данных векторов $e_1, \dots, e_k$ ортогональных векторов $e_1, \dots, e_k$. Эти дополнительные векторы могут быть найдены следующим методом. Будем искать $\mathcal{E}_{k+1} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Этот вектор должен быть ортогональным к уже найденным векторам $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_k$, т.е.

$$\begin{cases} (\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_{k+1}) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ (\mathcal{E}_k, \mathcal{E}_{k+1}) = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Находя любое частное решение $\alpha_1^0, \dots, \alpha_n^0$ этой системы мы полагаем $\mathcal{E}_{k+1} = (\alpha_1^0, \dots, \alpha_n^0)$, т.е. мы пополнили имеющуюся систему ортогональных векторов $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_k$ еще одним, ортогональным, в силу (2), к ним вектором $\mathcal{E}_{k+1}$. Применяя вышеописанный метод к векторам $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_k, \mathcal{E}_{k+1}$, получим еще один вектор $\mathcal{E}_{k+2}$, ортогональный к $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_{k+1}$ и т.д. до тех пор, пока не получим базис $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$.

Из полученного ортогонального базиса $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$ можно легко получить ортонормированный базис $\mathcal{E}_1', \dots, \mathcal{E}_n'$, полагая

$$\mathcal{E}_1' = \frac{\mathcal{E}_1}{|\mathcal{E}_1|}, \dots, \mathcal{E}_n' = \frac{\mathcal{E}_n}{|\mathcal{E}_n|}$$

2.3. Типовая задача

Имея систему векторов, построить ортонормированный базис пространства.

I) (1,2,2,-1), (1,1,-5,3), (3,2,8,-7);

2) (I,2,2,-I), (I,I,-5,3), (0,I,7,-4);
3) (I,I,-I,-2), (5,8,-2,-3), (3,9,3,8);
4) (I,I,-I,-2), (5,8,-2,-3), (2,-I,-5,-II);
5) (2,I,3,-I), (7,4,3,-3), (I,I,-6,0);
6) (2,I,3,-I), (7,4,3,-3), (5,7,7,8);
7) (I,2,I,3), (4,2,I,2), (2,4,2,I6);
8) (I,2,I,3), (4,2,I,2), (I,-4,-2,-I7);
9) (I,2,2,-I), (I,I,-5,3), (3,2,8,-7);
I0) (I,2,2,-I), (I,I,-5,3), (0,I,7,-4);
II) (I,I,-I,-2), (5,8,-2,-3), (3,9,3,8);
I2) (I,I,-I,-2), (5,8,-2,-3), (2,-I,-5,-II);
I3) (2,I,3,-I), (7,4,3,-3), (I,I,-6,0);
I4) (2,I,3,-I), (7,4,3,-3), (5,7,7,8);
I5) (I,2,I,3), (4,2,I,2), (2,4,2,I6);
I6) (I,2,I,3), (4,2,I,2), (I,-4,-2,-I7);
I7) (I,2,2,-I), (I,I,-5,3), (3,2,8,-7);
I8) (I,2,2,-I), (I,I,-5,3), (0,I,7,-4);
I9) (I,I,-I,-2), (5,8,-2,-3), (3,9,3,8);
20) (I,I,-I,-2), (5,8,-2,-3), (2,-I,-5,-II);
2I) (2,I,3,-I), (7,4,3,-3), (I,I,-6,0);
22) (2,I,3,-I), (7,4,3,-3), (5,7,7,8);
23) (I,2,I,3), (4,2,I,2), (2,4,2,I6);
24) (I,2,I,3), (4,2,I,2), (I,-4,-2,-I7);
25) (I,2,2,-I), (I,I,-5,3), (3,2,8,-7);
26) (I,2,2,-I), (I,I,-5,3), (0,I,7,-4);
27) (I,I,-I,-2), (5,8,-2,-3), (3,9,3,8);
28) (I,I,-I,-2), (5,8,-2,-3), (2,-I,-5,-II);
29) (2,I,3,-I), (7,4,3,-3); (I,I,-6,0);
30) (2,I,3,-I), (7,4,3,-3), (5,7,7,8);
3I) (I,2,I,3), (4,2,I,2), (2,4,2,I6);
32) (I,2,I,3), (4,2,I,2), (I,-4,-2,-I7);
33) (I,2,2,-I), (I,I,-5,3), (3,2,8,-7);
34) (I,2,2,-I), (I,I,-5,3), (0,I,7,-4);
35) (I,I,-I,-2), (5,8,-2,-3), (3,9,3,8);
36) (I,I,-I,-2), (5,8,-2,-3), (2,-I,-5,-II);
37) (2,I,3,-I), (7,4,3,-3), (I,I,-6,0);
38) (2,I,3,-I), (7,4,3,-3), (5,7,7,8);
39) (I,2,I,3), (4,2,I,2), (2,4,2,I6);
40) (I,2,I,3), (4,2,I,2), (I,-4,-2,-I7);
4I) (I,2,2,-I), (I,I,-5,3), (3,2,8,-7);

42) (I,2,2,-I), (I,I,-5,3), (0,I,7,-4);
43) (I,I,-I,-2), (5,8,-2,-3), (3,9,3,8);
44) (I,I,-I,-2), (5,8,-2,-3), (2,-I,-5,-II);
45) (2,I,3,-I), (7,4,3,-3), (I,I,-6,0);
46) (2,I,3,-I), (7,4,3,-3), (5,7,7,8);
47) (I,2,I,3), (4,2,I,2), (2,4,2,I6);
48) (I,2,I,3), (4,2,I,2), (I,-4,-2,-I7);
49) (I,2,2,-I), (I,I,-5,3), (3,2,8,-7);
50) (I,2,2,-I), (I,I,-5,3), (0,I,7,-4).

2.4. Пример решения типовой задачи

Дополнить систему векторов до ортонормированного базиса
$e_1 = (I,I,0,0)$, $e_2 = (I,0,I,0)$, $e_3 = (0,I,I,I)$

I) Так как

$$R_g \begin{pmatrix} I & I & 0 & 0 \\ I & 0 & I & 0 \\ 0 & I & I & I \end{pmatrix} = 3,$$

то данная система векторов линейно независима.

2) Положим

$$\mathcal{E}_1 = e_1 = (1,1,0,0)$$

$$\mathcal{E}_2 = e_2 - \lambda_{21}\mathcal{E}_1 ,$$

где $\lambda_{21} = \dfrac{(e_2, \mathcal{E}_1)}{(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_1)} = \dfrac{1\cdot 1 + 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 0\cdot 0}{1^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2} = \dfrac{1}{2}$,

отсюда

$$\mathcal{E}_2 = (1,0,1,0) - \frac{1}{2}(1,1,0,0) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0\right).$$

Для удобства вычислений будем вместо вектора $\mathcal{E}_2$ рассматривать вектор $\mathcal{E}_2' = 2\mathcal{E}_2 = (1,-1,2,0)$.

Положим

$$\mathcal{E}_3 = e_3 - \lambda_{31}\mathcal{E}_1 - \lambda_{32}\mathcal{E}_2' ,$$

$$\lambda_{31} = \frac{(e_3, \mathcal{E}_1)}{(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_1)} = \frac{1}{2} \qquad \lambda_{32} = \frac{(e_3, \mathcal{E}_2')}{(\mathcal{E}_2', \mathcal{E}_2')} = \frac{1}{6} .$$

Тогда

$$\mathcal{E}_3 = (0,I,I,I) - \frac{I}{2}(I,I,0,0) - \frac{I}{6}(I,-I,2,0) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{I}{3}, I\right)$$

и как и ранее $\mathcal{E}_3' = 3\mathcal{E}_3 = (-2,2,I,3)$.

Система векторов $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2'$, $\mathcal{E}_3'$ ортогональна. Дополним ее до базиса. Четвертый вектор $\mathcal{E}_4 = (\alpha_1 , \alpha_2 , \alpha_3 , \alpha_4)$ из условия его ортогональности уже найденным векторам $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_3$,

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_4) = \alpha_1 + \alpha_2 = 0,$$
$$(\varepsilon_2', \varepsilon_4) = \alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0.$$
$$(\varepsilon_3', \varepsilon_4) = -2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + 3\alpha_4 = 0.$$

Любое ненулевое решение этой системы может быть взято в качестве четвертого вектора ортогонального базиса.

3. КВАДРАТИЧНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ

3.I. Теоретические сведения

О п р е д е л е н и е. Квадратичным функционалом называется числовая функция $Q(x)$ векторного аргумента $x \in V$, получающаяся из билинейного функционала $B(x,y)$ при $y = x$

$$Q(x) = B(x, x). \tag{I}$$

В этом случае формула (I) п.I.I приобретает вид

$$B(x,x) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j B_{ij}. \tag{2}$$

Правая часть соотношения (2) называется квадратичной формой. По данному билинейному функционалу можно согласно (I) построить единственный квадратичный функционал. Но данный квадратичный функционал может быть получен по (I) из различных БФ. Например,

$$B_1(x,y) = x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + 2x_2 y_1 + x_2 y_2,$$
$$B_2(x,y) = x_1 y_1 + x_1 y_2 + 3x_2 y_1 + x_2 y_2,$$

а

$$Q(x) = B_1(x,x) = x_1^2 + 4x_1 x_2 + x_2^2 = B_2(x,x) = Q_2(x_1).$$

Поэтому всегда считают, что квадратичный функционал порождается симметричным БФ, что позволяет установить взаимооднозначное соответствие между квадратичными и симметричными БФ по формуле (I), и если квадратичный функционал задан в виде (2), то легко можно найти симметричную матрицу порождающего его билинейного функционала. Она называется матрицей квадратичной формы в данном базисе.

3.2. Метод Лагранжа

Метод Лагранжа применяется для нахождения такого базиса, в котором матрица квадратичного функционала имеет наиболее простой - диагональный - вид. Метод основан на многократном применении двух преобразований Лагранжа - основного и вспомогательного.

Основное преобразование применяется, если в квадратичной форме не все коэффициенты при квадратах переменных нулевые, оно основано на элементарном тождестве

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2=\sum_{i,j=1}^{n}a_ia_j=\sum_{i=1}^{n}a_i^2+2\sum_{\substack{i=1\\ i<j}}^{n}a_ia_j.$$

Например:

$$\underline{x_1^2}+x_2^2+3x_3^2+\underline{2x_1x_2}+\underline{2x_1x_3}=$$

$$=\left[(\underbrace{x_1+x_2+x_3}_{y_1})^2-2x_2x_3-x_3^2-x_2^2\right]+x_2^2+3x_3^2=$$

$$=y_1^2+2x_3^2-2x_2x_3=y_1^2+2\left[x_3^2-2\cdot\frac{1}{2}x_2x_3\right]=$$

$$=y_1^2+2\left[(\underbrace{x_3-\frac{1}{2}x_2}_{y_2})^2+\underbrace{\frac{1}{4}x_2^2}_{y_3}\right]=y_1^2+2y_2^2-\frac{1}{2}y_3^2.$$

Вспомогательное преобразование Лагранжа применяется в случае, когда все коэффициенты при квадратах переменных в квадратичной форме равны нулю и оно может быть реализовано в двух равноправных формах.

I вариант

$$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\text{(положим } x_1=x_1',\ x_2=x_1'-x_2'\text{)}=$$

$$=x_1'^2-x_2'^2+x_1'x_3-x_2'x_3+x_3x_1'+x_3x_2'=x_1'^2-x_2'^2+x_1'x_3$$

и далее возможно применение основного преобразования Лагранжа.

2 вариант

$$x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=\text{(положим } x_1=x_1'+x_2\text{)}=$$

$$=x_1'x_2+x_2^2+2x_2x_3+x_3x_1'$$

и снова возможно применение основного преобразования Лагранжа.

Приведя методом Лагранжа квадратичную форму к виду линейной комбинации квадратов переменных $y_1,\ldots,y_n$ и записав выражения новых переменных через старые

$$\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_{11}&\ldots&\alpha_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ \alpha_{n1}&\ldots&\alpha_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},$$

мы можем найти и матрицу перехода C к новому базису

$$C = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}^{-1}$$

и сам новый базис. Заметим, что новый базис, как впрочем и вид квадратичной формы относительно новых переменных $y_1, \dots, y_n$, определены неоднозначно. Но каким бы методом не была приведена квадратичная форма к виду линейной комбинации квадратов переменных с помощью линейного преобразования переменных, числа ненулевых положительных и отрицательных коэффициентов в этой линейной комбинации квадратов будут всегда одними и теми же (закон инерции квадратичных форм).

3.3. Задача для самостоятельного решения

Преобразовать квадратичную форму по методу Лагранжа и найти матрицу перехода к новому базису

1. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 + 4x_3^2$
2. $4x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 3x_2^2 + 4x_3^2$
3. $4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_3^2$
4. $4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 - 2x_3^2$
5. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$
6. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3 + x_3^2$
7. $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 3x_2^2 - 6x_2x_3 - 2x_3^2$
8. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2$
9. $x_1^2 + 4x_1x_3 - x_2^2 - 2x_2x_3 + 4x_3^2$
10. $x_1^2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_3 + x_3^2$
11. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2^2 + 12x_2x_3 + 4x_3^2$
12. $4x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 5x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$
13. $4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2^2 + 8x_2x_3 + x_3^2$
14. $4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 5x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$
15. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 5x_2^2 + 12x_2x_3 + 7x_3^2$

16. $x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3+8x_2^2+16x_2x_3+7x_3^2$

17. $x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+5x_2^2+10x_2x_3+4x_3^2$

18. $x_1^2+4x_1x_2+2x_1x_3+5x_2^2+6x_2x_3+x_3^2$

19. $x_1^2+4x_1x_3+x_2^2+2x_2x_3+4x_3^2$

20. $x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+2x_3^2$

21. $x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3+2x_3^2$

22. $4x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3-3x_2^2+2x_3^2$

23. $4x_1^2+8x_1x_2+4x_1x_3+x_3^2$

24. $4x_1^2+8x_1x_2+4x_1x_3+3x_2^2-4x_3^2$

25. $x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3+3x_2^2+4x_2x_3-x_3^2$

26. $x_1^2+4x_1x_2+4x_1x_3-x_3^2$

27. $x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3-3x_2^2-6x_2x_3-4x_3^2$

28. $x_1^2+4x_1x_2+2x_1x_3+3x_2^2+2x_2x_3-x_3^2$

29. $x_1^2+4x_1x_3-x_2^2-2x_2x_3+2x_3^2$

30. $x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3-x_3^2$

31. $x_1^2+2x_1x_3+2x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+3x_3^2$

32. $4x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3$

33. $2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+8x_1x_2+8x_1x_3-8x_2x_3$

34. $2x_1^2+9x_2^2+2x_3^2-4x_1x_2+4x_2x_3$

35. $-4x_1^2-4x_2^2+2x_3^2-4x_1x_2+8x_1x_3-8x_2x_3$

36. $4x_1^2+4x_2^2+x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3+4x_2x_3$

37. $-x_1^2-x_2^2-3x_3^2-2x_1x_2-6x_1x_3+6x_2x_3$

38. $x_1^2-7x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-2x_1x_3-4x_2x_3$

39. $3x_1^2-7x_2^2+3x_3^2+8x_1x_2$ [illegible]

40. $-(1/2)x_1^2+5x_2^2-(1/2)x_3^2-4x_1x_2$ [illegible]

41. $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$

42. $-2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3$

43. $-4x_1^2 + x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$

44. $(3/2)x_1^2 - 5x_2^2 + (3/2)x_3^2 + 4x_1x_2 - x_1x_3 - 4x_2x_3$

45. $5x_1^2 + 13x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_2x_3$

46. $-2x_1^2 + 5x_2^3 - 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3$

47. $-3x_1^2 + 9x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 8x_1x_3 + 4x_2x_3$

48. $x_1^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - x_3^2$

49. $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_3^2$

50. $2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_3^2$

Литература

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.–М.:Наука, 1980.

2. Линейная алгебра и основы математического анализа. Сборник задач по математике для втузов/ Под ред. А.В.Ефимова, Б.П.Демидовича.–М.:Наука, 1981.

3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра.–М.:Наука, 1984.

Составители: Ольга Сергеевна И в а н о в а,
Владимир Михайлович Ч е р н о в

БИЛИНЕЙНЫЕ И КВАДРАТИЧНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ

Редактор Л.И.Б а л ы к о в а
Техн.редактор Н.М.К а л е н ю к
Корректор Т.И.П а й к и н а

Подписано в печать 13.11.85 г. Формат 60х84 1/16.
Бумага оберточная белая. Печать оперативная.
Усл.п.л. 0,93. Уч.-изд.л. 0,9. Т.1000 экз.
Заказ 7668 Бесплатно.

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени авиационный институт имени академика С.П.Королева, г.Куйбышев, ул.Молодогвардейская, 151.

Обл. тип. им.В.П.Мяги, г.Куйбышев, ул.Венцека, 60.