САМАРСКИЙ ордена ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ им. АКАДЕМИКА С. П. КОРОЛЕВА

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ. ИНТЕГРИРУЮЩИЙ МНОЖИТЕЛЬ

Методические указания

САМАРА 1991

Составитель **В. М. Безменов**

УДК 517.912

Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель: Метод. указания /Самар. авиац. ин-т; Сост. В. М. Безменов. Самара, 1991. 28 с.

Содержатся контрольные вопросы и упражнения по теме, а также упражнения для устного решения и индивидуальные задания. В краткой форме излагается теоретический материал, необходимый для изучения данной темы и для выполнения индивидуального задания. Приводятся образцы решения типичных задач. Индивидуальные задания выбираются студентами из тридцати различных вариантов по указанию преподавателя.

Предназначены для студентов 2 курса специальности 01.02. Выполнены на кафедре прикладной математики.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ

Дифференциальное уравнение I-го порядка, записанное в дифференциальной форме

$$p(x,y)dx + q(x,y)dy = 0 \qquad (I)$$

называется уравнением в полных дифференциалах, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции $u(x,y)$, т.е.

$$p(x,y)dx + q(x,y)dy = du(x,y).$$

Необходимым и достаточным условием того, чтобы уравнение (I) было в односвязной области уравнением в полных дифференциалах, является

$$\frac{\partial p(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial q(x,y)}{\partial x}. \qquad (2)$$

Общий интеграл уравнения (I) имеет вид

$$u(x,y) = C. \qquad (3)$$

Функция $u(x,y)$ находится по одной из формул:

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} p(x,y)dx + \int q(x_0,y)dy \qquad (4а)$$

или

$$u(x,y) = \int_{y_0}^{y} q(x,y)dy + \int p(x,y_0)dx, \qquad (4б)$$

где x_0, y_0 - любые значения переменных x, y из области задания уравнения (I).

Полезно заметить, что если выполняется условие (2), то уравнение

$$(\varphi(x)+p(x,y))dx+(\psi(y)+q(x,y))dy=0 \tag{Ia}$$

также является уравнением в полных дифференциалах.

Общий интеграл этого уравнения:

$$\int\varphi(x)dx+\int\psi(y)dy+u(x,y)=C. \tag{3a}$$

Замечания: I. Уравнение (I) может быть записано в виде

$$q(x,y)y'+p(x,y)=0$$

или

$$y'=-\frac{p(x,y)}{q(x,y)}.$$

2. Приступая к решению уравнения (I), прежде всего надо проверить выполнение условия (2).

3. В тех случаях, когда соотношение (4) можно разрешить относительно y или x, ответ желательно записывать именно в таком виде.

4. Выбор формул (4а) или (4б) и значений x_0 и y_0 при отыскании функции $u(x,y)$ определяется из соображения наибольшей простоты вычисления интегралов, находящихся в правых частях этих формул.

5. Проверка правильности решения:

уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=0$$

должно совпадать с исходным уравнением (I).

П р и м е р I. Проинтегрировать уравнение

$$y'=-\frac{3x(x+2y^2)}{2y(3x^2+2y^2)}.$$

Решение: $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 12xy = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Ответ: $x^3 + y^4 + 3x^2y^2 = C$.

Пример 2. Решить задачу Коши:

$$y(y - \sin x)\,dx + (2xy + \cos x)\,dy = 0; \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Решение:

$\dfrac{\partial P}{\partial y} = 2y - \sin x = \dfrac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow xy^2 + y\cos x = C; \ C = 1.$

Ответ: $xy^2 + y\cos x = 1$.

В ряде случаев уравнение (1) легко интегрируется методом выделения полных дифференциалов, когда оно преобразуется, например, к такому виду:

$$dv(x,y) + dw(x,y) = 0. \tag{5}$$

Общий интеграл уравнения (5):

$$v(x,y) + w(x,y) = C. \tag{6}$$

При практическом применении данного метода используются известные формулы дифференцирования:

А. Для некоторых функций одной переменной:

$$du^2 = 2u\,du; \quad d\frac{1}{u} = -\frac{du}{u^2}; \quad d\sqrt{u} = \frac{du}{2\sqrt{u}},$$

$$d\sin u = \cos u\,du; \quad d\cos u = -\sin u\,du; \quad d\,\mathrm{tg}\,u = \frac{du}{\cos^2 u}, \tag{7}$$

$$d\arcsin u = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}; \quad d\,\mathrm{arctg}\,u = \frac{du}{1+u^2}; \quad d\ln u = \frac{du}{u}.$$

Б. Для некоторых функций двух переменных:

$$d(x+y)=dx+dy;\quad d(xy)=ydx+xdy;$$

$$d\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{xdy-ydx}{x^2};\quad d\sqrt{x^2+y^2}=\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$d\arcsin\frac{y}{x}=\frac{xdy-ydx}{x\sqrt{x^2-y^2}};\quad d\,\mathrm{arctg}\frac{y}{x}=\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2},$$

$$d(ye^x)=e^x(dy+ydx);\quad d(y\ln x)=\ln x\,dy+\frac{y}{x}dx, \tag{8}$$

$$d(y\sin x)=\sin x\,dy+y\cos x\,dx;\quad d(y\,\mathrm{tg}\,x)=\mathrm{tg}\,x\,dy+$$

$$+\frac{y}{\cos^2 x}dx.$$

__Замечание__. Если при интегрировании уравнения (I) используется метод выделения полных дифференциалов, то в таком случае нет надобности в предварительной проверке выполнения необходимого и достаточного условия (2).

П р и м е р 3. Проинтегрировать уравнение

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{y}{x^2+y^2}\right)dx+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x}{x^2+y^2}\right)dy=0.$$

Решение: $d\sqrt{x^2+y^2}+d\,\mathrm{arctg}\frac{x}{y}=0.$

Ответ: $\sqrt{x^2+y^2}+\mathrm{arctg}\frac{x}{y}=C.$

ИНТЕГРИРУЮЩИЙ МНОЖИТЕЛЬ

Рассматривается уравнение

$$p(x,y)dx+q(x,y)dy=0, \tag{9}$$

и при этом $\dfrac{\partial p(x,y)}{\partial y} \neq \dfrac{\partial q(x,y)}{\partial x}$.

Интегрирующий множитель уравнения (9) по определению есть функция $\mu(x,y)$ такая, что

$$\mu(x,y)\,p(x,y)\,dx + \mu(x,y)\,q(x,y)\,dy = du(x,y),$$

где $u(x,y)$ – некоторая дифференцируемая функция.

Общий интеграл уравнения (9)

$$u(x,y) = C. \tag{10}$$

<u>Теорема I.</u> Если уравнение (9) имеет общий интеграл, то оно имеет интегрирующий множитель.

<u>Теорема 2.</u> Всякий интегрирующий множитель $\mu(x,y)$ уравнения (9) дается формулой

$$\mu(x,y) = \mu_0(x,y)\,\varphi(u), \tag{11}$$

где $\mu_0(x,y)$ – некоторый интегрирующий множитель уравнения (9);
$\varphi(u)$ – произвольная дифференцируемая функция;
$u(x,y)$ – функция, составляющая общий интеграл уравнения (9).

Для интегрирующего множителя уравнения (9) имеем

$$q(x,y)\frac{\partial \ln \mu}{\partial x} - p(x,y)\frac{\partial \ln \mu}{\partial y} = \frac{\partial p(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial q(x,y)}{\partial x}, \tag{12}$$

Решить уравнение (12) удается лишь в некоторых частных случаях.

Если известно, что интегрирующий множитель уравнения (9) есть некоторая функция от $t = t(x,y)$, где $t(x,y)$ – функция заданного вида, тогда для $\mu(t)$ имеем

$$\frac{d \ln \mu}{dt} = \frac{\dfrac{\partial p}{\partial y} - \dfrac{\partial q}{\partial x}}{q\dfrac{\partial t}{\partial x} - p\dfrac{\partial t}{\partial y}}. \tag{13}$$

Замечание. Правая часть уравнения (13) зависит только от переменной t.

Частные случаи:

а) $\mu=\mu(x)$: $$\frac{d\ln\mu}{dx}=\frac{1}{q}\left(\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial q}{\partial x}\right); \qquad (13а)$$

б) $\mu=\mu(y)$: $$\frac{d\ln\mu}{dy}=\frac{1}{p}\left(\frac{\partial q}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial y}\right). \qquad (13б)$$

На практике интегрирующий множитель уравнения (9) часто находится просто подбором, при котором либо руководствуются тем, что должно быть выполнено условие

$$\frac{\partial(\mu p)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu q)}{\partial x},$$

либо стараются выделить полные дифференциалы.

Пример 4. Проинтегрировать уравнение

$$(3x\sin y+1)dx+(x^2\cos y+\frac{y}{x})dy=0.$$

Решение: $\mu=x$.

Ответ: $x^2+y^2+2x^3\sin y=c$.

Пример 5. Решить задачу с начальным условием

$$y'=\frac{2xy}{x^2-y}; \quad y(2)=1.$$

Решение: $2xy\,dx+(y-x^2)dy=0$; $\mu=\frac{1}{y^2}$ $\Rightarrow$

$$\frac{x^2}{y}+\ln y=c, \quad c=4.$$

Ответ: $x^2=y(4-\ln y)$.

П р и м е р 6. Проинтегрировать уравнение

$$\left(4x+\frac{2}{x}y^2\right)dx+\left(\frac{x^2}{y}+3y\right)dy=0.$$

Решение: $(4x^2y+2y^3)dx+(x^3+3xy^3)dy=0;\ \mu=x.$

Ответ: $x^2y(x^2+y^2)=C.$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какое дифференциальное уравнение называется уравнением в полных дифференциалах?

2. Известно, что выражение $p(x,y)dx+q(x,y)dy$ является дифференциалом некоторой функции $u(x,y)$. Как найти эту функцию?

3. Записать необходимое и достаточное условие того, что уравнение $p(x,y)dx+q(x,y)dy=0$ является уравнением в полных дифференциалах.

4. При интегрировании некоторого дифференциального уравнения 1-го порядка получен его общий интеграл $u(x,y)=C$. Как проверить, правильно ли решена задача?

5. Что называется интегрирующим множителем дифференциального уравнения?

6. Какие дифференциальные уравнения 1-го порядка имеют интегрирующий множитель?

7. Какова структура интегрирующего множителя дифференциального уравнения?

8. Как получить уравнение для интегрирующего множителя $\mu(x,y)$ дифференциального уравнения $p(x,y)dx+q(x,y)dy=0$?

УПРАЖНЕНИЯ И ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Проверить выполнение необходимого и достаточного условия (2) и проинтегрировать уравнение

$$\frac{y^2+x}{(x+y)^2}dx+\frac{x^2+2x+y}{(x+y)^2}dy=0.$$

2. Проинтегрировать уравнение методом выделения полных дифференциалов

$$\left(\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y}-\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}+1\right)dx+\left(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}-\frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y}+\frac{1}{y^2}\right)dy=0.$$

3. Найти интегрирующий множитель и проинтегрировать уравнение

$$(3y^2-x)dx+(2y^3-6xy)dy=0.$$

4. Найти интегрирующий множитель $\mu(x,y)$ уравнения $p(x,y)dx+q(x,y)dy=0$, если известен его общий интеграл $u(x,y)=C$.

5. Получить уравнения для интегрирующего множителя заданного вида: а) $\mu=\mu(x+y)$; б) $\mu=\mu(xy)$; в) $\mu=\mu(x^2+y^2)$.

6. Найти интегрирующий множитель:

а) уравнения с разделяющимися переменными;

б) уравнения вида $y'=f(ax+by)$;

в) однородного уравнения $y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$;

г) линейного неоднородного уравнения;

д) уравнения Бернулли.

7. Дифференциальное уравнение $p(x,y)dx+q(x,y)dy=0$ имеет интегрирующий множитель $\mu=e^x$. Найти соотношение между коэффициентами $p(x,y)$ и $q(x,y)$.

8. Привести пример дифференциального уравнения, которое имело бы интегрирующие множители $\mu_1(x)$ и $\mu_2(y)$.

9. Известны два существенно различных интегрирующих множителя $\mu_1(x,y)$ и $\mu_2(x,y)$ дифференциального уравнения $p(x,y)dx+q(x,y)dy=0$. Найти общий интеграл этого уравнения.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ УСТНОГО РЕШЕНИЯ

Варианты для устного решения содержат: уравнения в полных дифференциалах; уравнения, для которых легко подбирается интегрирующий множитель, а также уравнения, наиболее просто интегрируемые методом выделения полных дифференциалов.

Вариант I

1. $(1+y^2\sin 2x)dx=2y\cos^2 x\,dy$;

2. $y^2dx=xydx-x^2dy$;

3. $(1-\frac{1}{x^2})dx+(e^{-y}+x+\frac{1}{x})dy=0$;

4. $\frac{dx}{2y(3x^2+2y^2)}+\frac{dy}{3x(2y^2+x)}=0$.

Вариант 2

I. $(2y^3-3xy^2-x^3)y'=3x^2y-2x^3+y^3$;

2. $y(y-\sin x)dx+(2xy+\cos x)dy=0$;

3. $\frac{dx}{e^x\cos y+y}+\frac{dy}{e^x\sin y+x}=0$;

4. $(x^2-y)dx+xdy=0$.

Вариант 3

I. $(\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}-1)dx=\frac{ydy}{\sqrt{x^2-y^2}}$;

2. $(3x-4y)xydx+(x^3-4x^2y+12y^3)dy=0$.

3. $2x\cos^2 y=(x^2\sin 2y-2y)y'$;

4. $2xyy'=x+y^2$.

Вариант 4

1. $y' = \dfrac{5x + y - 2}{3y - x - 4}$;

2. $2xy\ln y + (x^2 + y)y' = 0$;

3. $\left(\dfrac{y}{\cos^2 xy} + \sin x\right)dx + \left(\dfrac{x}{\cos^2 xy} + \sin y\right)dy = 0$;

4. $\dfrac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} + \dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} = 0$.

Вариант 5

1. $4x - 3y + (2y - 3x)y' = 0$;

2. $(y^2 \sin x - \ln y)dx = \left(\dfrac{x}{y} + 2y\cos x\right)dy$;

3. $y\,dx = (x + y^2)dy$;

4. $y\cos x + (2y - \sin x)y' = 0$.

Вариант 6

1. $(2y + xy^3)dx + (x + x^2y^2)dy = 0$;

2. $\sin y\,dx + x\cos y\,dx = y\,dx + x\,dy$;

3. $x(2x^2 + y^2) + y(x^2 + 2y^2)y' = 0$;

4. $\dfrac{dx}{(1+x)\cos y-\sin x}+\dfrac{dy}{\sin y+(1-y)\cos x}=0.$

Вариант 7

1. $y^2(x\,dy-y\,dx)=x^2(\sin x\,dy-y\cos x\,dx);$

2. $x+\sin y+(x\cos y+\sin y)y'=0;$

3. $\dfrac{dx}{(3x^2-y^2)y}+\dfrac{dy}{(3y^2+x^2)x}=0;$

4. $(\ln y+2x-1)y'=2y.$

Вариант 8

1. $x\cos 2y+1=x^2\sin 2y\,y';$

2. $(x\,dx+y\,dy)(x^2+y^2)=x\,dy-y\,dx;$

3. $x^2(y\,dx-x\,dy)+y^2(x\,dy-y\,dx)=0;$

4. $5xy+4y^2-8x^2+(y^2+8yx+\frac{5}{2}x^2)y'=0.$

Вариант 9

1. $x(dx+dy)=y(dy-dx);$

2. $\dfrac{dx}{ctg\,x + x\sec^2 y} = \dfrac{dy}{y\,\mathrm{cosec}^2 x - tg\,y}$;

3. $y' = \dfrac{x+y-2}{y-x-4}$;

4. $(x^2 - \sin^2 y)dx + x\sin 2y\,dy = 0.$

Вариант 10

1. $dx + 2y\,dy = \sqrt{x+y^2}\,(x\,dy + y\,dx)$;

2. $(\sin y + y\sin x + \frac{1}{x})dx + (x\cos y - \cos x + \frac{1}{y})dy = 0$;

3. $y' = \dfrac{y - 3xy^2}{y^2 + 2y + x}$;

4. $(3 + x - 2y)y' = 1 - 2x - y.$

Вариант 11

1. $(ye^{-x} + \sin y)dx + (xe^{-x} + \cos y)dy = 0$;

2. $x(2x^2 + y^2) + y(x^2 + 2y^2)y' = 0$;

3. $3x^2(1 + \ln y)dx = (2y - \frac{x^3}{y})dy$;

4. $(y\,dx + x\,dy)\sin(x+y) + xy\cos(x+y)(dx+dy) = 0.$

Вариант 12

1. $2y(x+y^2)y' = x-y^2;$

2. $(x^2\cos x - y)dx + xdy = 0;$

3. $(x+\sin x+\sin y)dx + \cos y\,dy = 0;$

4. $\dfrac{dx}{1-xe^{-y}} + \dfrac{dy}{e^{-y}} = 0.$

Вариант 13

1. $(2x-\ln y)y\,dx = (x+y-1)dy;$

2. $y' = \dfrac{\sin y + (1-y)\cos x}{\sin x - (1+x)\cos y};$

3. $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{y^3-x};$

4. $\dfrac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{xdy-ydx}{x^2} = 0.$

Вариант 14

1. $y^2dx + (xy-1)dy = 0;$

2. $\dfrac{dx}{\sin y - \sin x - 2x^3y} = \dfrac{dy}{y\cos x + 2xy^2};$

3. $y' = \dfrac{3x^2+2y}{3-2x}$;

4. $xdy - ydx = ydy$.

Вариант 15

1. $x(3y+2x)y' + 3(y+x)^2 = 0$;

2. $\dfrac{dy}{(9xy^2-2)x} = \dfrac{dx}{(4y^2-6x^3)y}$;

3. $xy + \sin y + \left(\dfrac{x^2}{2} + x\cos y\right)y' = 0$;

4. $(x^2+y^2+x)dy = ydx$.

Вариант 16

1. $(2xe^{x} - y)dx + dy = 0$;

2. $(3x^2 - 4xy - 3y^2)dy + (3x^2 + 6xy - 2y^2)dx = 0$;

3. $y\sqrt{1-y^2}\,dx + (x\sqrt{1-y^2} + y)dy = 0$;

4. $y' = \dfrac{3x^2y + \sin x}{\cos y - x^3}$.

Вариант 17

1. $(yx^3-2x)y'=y-x^2y^2$;

2. $\frac{y}{x}dx+(y^3+\ln x)dy=0$;

3. $(\sin xy+xy\cos xy)dx+x^2\cos xy\,dy=0$;

4. $\frac{dy}{5x^2-2xy^2+1}=\frac{dx}{(2x^2-3y)y}$.

Вариант 18

1. $xy^2dx+y^3dy=ydx-xdy$;

2. $(x\sin y+y)dx+(x^2\cos y+x\ln x)dy=0$;

3. $\frac{dy}{y^2-x}=\frac{dx}{2y(x+1)}$;

4. $\sin y-y\sin x+\frac{1}{x}=(\frac{1}{y}-\cos x-x\cos y)y'$.

Вариант 19

1. $ydx+xdy=y^2(xdy-ydx)$;

2. $\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}+y=(\frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}-x-\frac{1}{y^2})y'$,

3. $(10xy-8y+1)dx=(8x-5x^2-3)dy$;

4. $(e^y+\sin x)dx+\cos x\,dy=0$.

Вариант 20

1. $(\sin x+y)y'+y\cos x=x^2$;

2. $\dfrac{dx}{x+2y}+\dfrac{dy}{2x+y}=0$;

3. $xy^2dx+x^2ydy=xdy-ydx$.

4. $(xy-x^2)y'=2x^2+3xy-y^2$.

Вариант 21

1. $y(x+y)dx+(xy+1)dy=0$;

2. $e^{-y}dx=(2y+xe^{-y})dy$;

3. $y'=\dfrac{(3y^2-x^2)x}{(y^2-3x^2)y}$;

4. $\dfrac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{x}{y^2}dy-\dfrac{dx}{y}$.

Вариант 22

1. $ydx+(1+e^{-x}y)dy=0$;

2. $(\cos x - x\sin x)y\,dx + (x\cos x - 2y)dy = 0;$

3. $(3x^2+y^2)y + (3y^2+x^2)xy' = 0;$

4. $y\,dx + x\,dy + x^2(y\,dx - x\,dy) = 0.$

В а р и а н т 23

I. $x^2(y-x)y' = x^2y - 1;$

2. $(x^2+y^2+y)dx = x\,dy;$

3. $y' = \dfrac{3x^2e^y}{x^3e^y-1};$

4. $(x^2+y^2+4)y\,dx + (x^2+y^2-4)x\,dy = 0.$

В а р и а н т 24

I. $(2xy^2 - 3y^3)dx + (1-3xy^2)dy = 0;$

2. $\dfrac{dx}{x^2+6xy+3} + \dfrac{dy}{3y^2+2xy+2x} = 0;$

3. $(x^2+y)dx - x\,dy = 0;$

4. $(xe^y + e^x)y' + ye^x + e^y = 0.$

В а р и а н т 25

I. $x\,dy - y\,dx = y^2\ln x\,dx;$

2. $(y^2-xy)dx+(3xy-x^2)dy=0$;

3. $\left(\frac{x}{y}-1\right)e^{\frac{x}{y}}y'=2x+e^{\frac{x}{y}}$;

4. $(3y^2-x)x\,dx=(1-3x^2y+6y^2)dy$.

Вариант 26

I. $\dfrac{dx}{1+x\cos y}+\dfrac{dy}{x^2+\sin y}=0$;

2. $(x-y+4)y'=2-x-y$;

3. $(y^2-\sin x)dx+xy\,dy=0$;

4. $\dfrac{2y\,dy-dx}{\sqrt{y^2-x}}=\dfrac{y\,dx-x\,dy}{y^3}$.

Вариант 27

I. $y\,dy=(x\,dy+y\,dx)\sqrt{1+y^2}$;

2. $(e^y+2xy)+x(e^y+x)y'=0$;

3. $y(y-4x)dx=2(x^2+y^2-xy)dy$;

4. $y'=\dfrac{x^2y^2}{1-x^3y}$.

Вариант 28

I. $y'=\dfrac{2x-y+1}{x-2y+1}$;

2. $(e^{x}+y+\sin y)dx+(e^{y}+x+x\cos y)dy=0;$

3. $y'x^2y^2+xy^3=1;$

4. $(x+y)dx+(2x^2y-x)dy=0.$

Вариант 29

1. $2xy(dx+dy)+y^2dx+x^2dy=0;$

2. $(3x^2-2x-y)dx+(2y-x+3y^2)dy=0;$

3. $y'=\dfrac{2x\cos^2 y}{x^2\sin 2y-2y};$

4. $(2xy+x^2y+\dfrac{y^3}{3})dx+(x^2+y^2)dy=0.$

Вариант 30

1. $(x^2+y^2+1)dy+xydx=0;$

2. $x\cos(x+y)(dx+dy)+\sin(x+y)dx=0;$

3. $(2+3xy)x=(3y^2-x^3)y';$

4. $(1+e^{\frac{x}{y}})dx=(\dfrac{x}{y}-1)e^{\frac{x}{y}}dy.$

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ

В каждом варианте индивидуального задания имеется два уравнения, для интегрирования которых следует найти их интегрирующие множители. Интегрирующий множитель одного из уравнений зависит только от одной переменной x или y, а другого уравнения - от обеих переменных x, y и имеет один из следующих видов:

$$x^{\alpha}y^{\beta};\ (x^2\pm y^2)^{\alpha};\ (x\pm y^2)^{\alpha};\ (y\pm x^2)^{\alpha},$$

где α и β - некоторые целые числа.

Вариант I

1. $2y(y^2+3x^2)y'=2x(3y^2+x^2)$;

2. $((1-x^2y^2)\sin x+2xy^2)dx+2x^2y\,dy=0.$

Вариант 2

1. $(2x^2y^3-1)y\,dx=(1-4x^2y^3)x\,dy$;

2. $(1+y-2y^2)\sin(x-y)dy+y\cos(x-y)(dx-dy)=0.$

Вариант 3

1. $(y^2+3\ln x)xy'=y$;

2. $x\,dy=(2\sqrt{y}\cos x-2y)dx.$

Вариант 4

1. $(2x^2y+x)y'=x^2y^3-2xy^2-y$;

2. $((x^3y-2)\cos y-\sin 2y+x^3)y'+3x^2y=0.$

В а р и а н т 5

1. $(y+x^2)dy+(x-xy)dx=0;$

2. $2x(1+x^2y-y^3)dx+(x^4-x^2y^2-2y)dy=0.$

В а р и а н т 6

1. $(2x^2y+2y+5)dx+2x(x^2+1)dy=0;$

2. $2xdy+ydx+xy^2(xdy+ydx)=0.$

В а р и а н т 7

1. $2x(x^2+y-1)dx+(x^2y^2+y^3-1)dy=0;$

2. $(4xy-3)y'=1-y^2.$

В а р и а н т 8

1. $(\sin x+x\cos x)\cos(xy)=(y+xy')\sin(xy);$

2. $(5y^2-4x^2y-x^2)dy=2x(y^2+2y-3x^2)dx.$

В а р и а н т 9

1. $x(\ln y+\ln x-1)y'=2y;$

2. $((1-2x^2)\cos y-2xy^2)dx+(2y-x\sin y)dy=0.$

В а р и а н т 10

1. $y'=\dfrac{3y^2+x}{2y(y^2+3x)};$

2. $(2-y)(x+1)dx+(y+x^2+2x)dy=0$.

Вариант II

I. $2x(y+2)dx=(x^2+y^2+4y)dy$;

2. $x(xy+2)y'=x^2y^3-xy^2-2y$.

Вариант I2

I. $(x^3+x^2y^2+1)dx+2y(x+y^2+1)dy=0$;

2. $(e^{2x}-y^2)dx+ydy=0$.

Вариант I3

I. $(x+\sin y+2\sqrt{x})dx+2\sqrt{x}\cos y\,dy=0$;

2. $xy'=2(2x^2y^2\ln x-y)$.

Вариант I4

I. $ydx+x(1-\frac{x}{1+y^2})dy=0$;

2. $xy'=(1-\sin x\sin y)\operatorname{tg} y$.

Вариант I5

1. $(2x^3y+2xy^2-1)y'=2x-x^2y^2-y^3$;

2. $y'=\dfrac{x}{3\cos y-x^2\operatorname{ctg} y}$.

Вариант 16

1. $(x^2+2x^2y^2+2y)y'+2xy=0;$

2. $y(x+y^3)dx=x(y^3-x)dy.$

Вариант 17

1. $(1+x^2)dy+(1+xy)dx=0;$

2. $(x+4xy+5y^2)y'+3x+2y+y^2=0.$

Вариант 18

1. $2yy'(\sin x+xy^2-x)=y^2+\cos x;$

2. $(3xy+x+y)ydx+(4xy+x+2y)xdy=0.$

Вариант 19

1. $(2y^3-6xy)y'=x-3y^2;$

2. $y\sqrt{1-y^2}\,dx+(x\sqrt{1-y^2}+y)dy=0.$

Вариант 20

1. $(x^2+y^2+x)dx+ydy=0;$

2. $(1+x^2)(2xdx+\cos ydy)=2x\sin ydx.$

Вариант 21

1. $2(x-y^2-2y)y'=1+y;$

2. $(2x+x^2y^2)dy+(y+xy^3)dx=0.$

Вариант 22

1. $y'=\dfrac{5x^2-4xy-y}{3y-2x-x^2}$;

2. $y(1-y^2)dx+(x+y-xy^2)dy=0.$

Вариант 23

1. $x(x-1)(y'-1)=y$;

2. $2yy'+x-y^2=1.$

Вариант 24

1. $((xy+2)\cos x+y)dx+x\,dy=0$;

2. $y\,dx=(1+x^2y)dy.$

Вариант 25

1. $\sqrt{x^2+y^2}\left(dy-\dfrac{y}{x}dx\right)=dx$;

2. $((2x^2+1)\sin y+2xy^2)dx+(x\cos y+2y)dy=0.$

Вариант 26

1. $(2x^2+x+1)\sin(x+y)dx+x\cos(x+y)(dx+dy)=0$;

2. $(x^2y+2)y^2dx+(xy^2-3)x^2dy=0.$

Вариант 27

1. $y' = \dfrac{2(x^5+2x^3y-xy^2)}{x^4-2x^2y-y^2}$;

2. $xy'\,ctg\,y = 1+3x^2\sin y$.

Вариант 28

1. $((2-x^2y)\sin y+\sin 2y+x^2)y'+2xy=0$;

2. $y\,dx-(x^2+y^2+x)\,dy=0$.

Вариант 29

1. $(y-2x)\,dx-(2y+x)\,dy=0$;

2. $(x^2+\cos y-2\sqrt{y}\sin y)y'+4x\sqrt{y}=0$.

Вариант 30

1. $y\,dx+(\sin x-3y^2\cos x)\cos x\,dy=0$;

2. $xy'=y(x^2+3\ln y)$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. М.:Наука, 1989.

2. Краснов М.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Высш.шк., 1983.

3. Ф и л и п п о в А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1973.

4. К р а с н о в М.Л., К и с е л е в А.И., М а к а р е н к о Г.И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Высш.шк., 1978.

5. Б е р м а н Г.Н. Сборник задач по математическому анализу. М.: Наука, 1985.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ. ИНТЕГРИРУЮЩИЙ МНОЖИТЕЛЬ

Составитель Б е з м е н о в Виталий Михайлович

Редактор Н.Д.Ч а й н и к о в а
Техн.редактор Г.А.У с а ч е в а

Подписано в печать 16.09.91. Формат 60x84 1/16.
Бумага оберточная. Печать оперативная. Усл.печ.л. 1,6.
Усл.кр.-отт. 1,7. Уч.-изд.л. 1,5. Тираж 100 экз.
Заказ № 193. Бесплатно.

Самарский ордена Трудового Красного Знамени авиационный институт имени академика С.П.Королева.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

Участок оперативной полиграфии Самарского авиационного института. 443001 Самара, ул. Ульяновская, 18.