АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ имени С. П. КОРОЛЕВА

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЗАДАЧАХ АВИАЦИОННОЙ ТЕМАТИКИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

КУЙБЫШЕВ 1981

УДК 517.9 : 629.7

Методические указания написаны в соответствии с темой «Обыкновенные дифференциальные уравнения I и II порядков», предусмотренной программой по курсу высшей математики для технических вузов. Основная масса задач подобрана в соответствии с тематикой специальных дисциплин (аэродинамика летательных аппаратов, конструкция летательных аппаратов и их двигателей, управление летательными аппаратами). Краткое изложение основных определений сопровождается разбором типовых примеров с подробным решением.

Настоящие методические указания предназначены для студентов Куйбышевского авиационного института.

# 1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ I ПОРЯДКА

К дифференциальным уравнениям I порядка относятся уравнения общего вида

$$F(x, y, y') = 0, \qquad (1)$$

а также уравнения, разрешённые относительно $y'$

$$y' = f(x, y) \qquad (2)$$

и в форме

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0. \qquad (3)$$

Для нахождения решения дифференциальное уравнение интегрируют и получают функцию $y = \varphi(x, C)$ или уравнение $\Phi(x, y, C) = 0$, где $C$ — произвольная постоянная. Функция называется общим решением уравнения, приведенное уравнение — его общим интегралом.

Для нахождения частного решения $y = \varphi(x, C_0)$ или частного интеграла $\Phi(x, y, C_0) = 0$ уравнений (1) $\div$ (3) задаются начальным условием $y(x_0) = y_0$, где $x_0$, $y_0$ — заданные числа. Эта задача называется задачей Коши.

В курсе рассматриваются дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными, однородные, линейные, в полных дифференциалах.

## УРАВНЕНИЯ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

1.1. Скорость подъема реактивного самолета меняется с высотой по закону

$$V = \frac{11000 - H}{1000},$$

Определить зависимость набранной высоты $H(t)$ от времени подъема $t$, если $H|_{t=0} = H_0$ $(H_0 < 11000)$.

Найти время подъема на высоту $H_1 = 8000$ м, если $H_0 = 0$.

Указания к решению: Составим дифференциальное уравнение

$$\frac{dH}{dt} = \frac{11000 - H}{1000}. \tag{4}$$

Данное уравнение относится к классу уравнений с разделяющимися переменными, так как оно может быть представлено в виде

$$f_1(x) f_2(y)\, dx + \varphi_1(x) \varphi_2(y)\, dy = 0. \tag{5}$$

В общем случае, принимая $f_2(y) \neq 0$, $\varphi_1(x) \neq 0$, обе части уравнения (5) делят на $f_2(y)\varphi_1(x)$ и получают равенство

$$\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}\, dx + \frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}\, dy = 0,$$

в котором переменные разделены.

Общий интеграл имеет вид

$$\int \frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}\, dx + \int \frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}\, dy = C.$$

При этом следует иметь в виду, что возможны решения вида $\varphi_1(x) = 0, f_2(y) = 0$, исключенные ранее при делении.

В уравнении (4) после разделения переменных получаем

$$\frac{dH}{11000 - H} = 0{,}001\, dt.$$

Проинтегрируем уравнение

$$\int \frac{dH}{11000 - H} = 0{,}001 \int dt.$$

Общий интеграл примет вид $\ln C - \ln|11000 - H| = 0{,}001\, t$ или $\ln\left|\frac{11000 - H}{C}\right| = -0{,}001\, t$, отсюда $\frac{11000 - H}{C} = e^{-0{,}001t}$, и окончательно можно записать общее решение

$$H = 11000 - Ce^{-0{,}001t}.$$

Для решения задачи Коши уточним значение произвольной постоянной. При $t = 0$ $H = H_0$, отсюда $H_0 = 11000 - C$ и $C = 11000 - H_0$. Тогда $H = 11000 - (11000 - H_0) e^{-0{,}001t}$. Это частное решение уравнения (4), являющееся ответом на первый вопрос задачи.

Чтобы определить время подъема $t_1$ с высоты $H_0 = 0$ на заданную высоту $H_1$, воспользуемся последней зависимостью. Для этого из уравнения $H_1 = 11000 - (11000 - H_0)\, e^{-0{,}001\,t}$ выразим $t_1$ в виде $e^{-0{,}001 t_1} = \frac{3}{11}$ или $t_1 = -1000 \ln \frac{3}{11}$ с.

1.2. Термодинамический процесс, протекающий без теплообмена с окружающей средой, называется адиабатическим. Состояние параметров газа (давления $p$ и плотности $\rho$) при нем описывается уравнением $\rho\, dp - \kappa p d\rho = 0$, где $\kappa$ — показатель адиабаты. Найти зависимость, связывающую $p$, $\rho$ и называемую уравнением адиабаты, если процесс истечения газа из резервуара через трубопровод считать идеализированным (без трения и теплообмена со стенкой).

Ответ: $\frac{p}{\rho^{\kappa}} = C$.

1.3. При течении компонента через центробежный насос, установленный в тракте жидкостного ракетного двигателя, потери давления в лопатках $\Delta p$ связаны с расходом жидкости $G$ уравнением $d\Delta p - \frac{2\Delta p}{G} dG = 0$. Найти зависимость $\Delta p\ (G)$.

Ответ: $\Delta p = CG^2$.

1.4. Для ракеты с постоянной тягой скорость полета и высота подъема связаны дифференциальным уравнением

$$V\frac{dV}{dH} = \frac{g}{k} - \frac{g}{\left(1 + \frac{H}{R}\right)^2},$$

где $R$ — радиус планеты; $\kappa$, $g$ — постоянные. Найти зависимость $V = V\ (H)$ при начальном условии $V\ (0) = 0$.

Ответ: $V^2 = 2gH\left(\frac{1}{k} - \frac{R}{R+H}\right)$.

1.5. При падении тел с малых высот приближенно принимают, что сопротивление воздуха пропорционально скорости движения (с коэффициентом $\kappa$). Составить уравнение для определения зависимости скорости движения тела $V$ от времени $t$.

Найти закон $V = V\ (t)$ при нулевой начальной скорости, а также скорость падения тела при $t_1 = 1$ с, $t_2 = 10$ с.

В расчетах принять массу тела $m = 0{,}02$ кг, коэффициент пропорциональности $\kappa = 32 \cdot 10^{-6}$ кг/с, $g = 9{,}8$ м/с$^2$;

Ответ: $V = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$; $V\ (1) = 9{,}8$ м/с;

$V\ (10) = 97{,}2$ м/с.

1.6. Связь абсолютной высоты полета $H$ с величиной атмосферного давления $p$ выражается уравнением $\frac{dp}{dH} = \frac{p}{Rf(p)}$. Найти зависимость $H = H(p)$, если для летательных аппаратов разного типа $f_1(p) = p$, $f_2(p) = p - a$, $f_3(p) = a - \sqrt{p}$. В задаче $R$ — газовая постоянная, $a$ — константа.

Ответ: $H_1 = C - Rp, H_2 = R(a \ln Cp - p)$;

$$H_3 = p(\ln \frac{C}{p} + 2\sqrt{p}).$$

1.7. Уравнение, описывающее распределение давления воздуха $p$ с изменением высоты $H$, имеет вид: $Tp' = ap$, где $T$—температура среды; $a$ — коэффициент пропорциональности. Определить зависимость $p = p(H)$ при начальном условии $p(0) = p_0$.

Найти температуру среды за бортом самолета, совершающего полет на высоте 10000 м, если $p_0 = 101{,}3 \cdot 10^3$ н/м$^2$; $p(10000) = 26{,}5 \cdot 10^3$ н/м$^2$; $a = 0{,}03$ К/м.

Ответ: $p = p_0 e^{\frac{aH}{T}}$, $T = 223$ К.

1.8. Самолет касается посадочной полосы со скоростью $V = 230$ км/ч. Составить дифференциальное уравнение, связывающее скорость $V$ и ускорение $a$ при движении, если принять движение равнозамедленным с постоянным ускорением.

Каково время пробега самолета до полной остановки в случае $a = 2$ м/с$^2$?

Ответ: $V' = -a$, $t = 32$ с.

1.9. Упрощенное уравнение движения компонента по гидравлической магистрали жидкостного ракетного двигателя записывается в виде $b_1 G' + b_2 G^2 = \Delta p(t)$, где $b_1$, $b_2$ — постоянные, характеризующие влияние конструкционных свойств тракта на течение; $G = G(t)$ — массовый секундный расход компонента; $\Delta p(t)$ — разность между давлениями в начальном сечении трубопровода и в камере сгорания. Найти общий интеграл уравнения, если $\Delta p(t) = \Delta p\, 1(t)$, здесь $1(t)$ — ступенчатая (Хевисайда) функция,

$$1(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0; \\ 1, & t > 0. \end{cases}$$

Ответ: $t + C = \frac{b_1}{2\sqrt{b_2}\sqrt{\Delta p}} \ln \left| \frac{\sqrt{\Delta p} + \sqrt{b_2}\, G}{\sqrt{\Delta p} - \sqrt{b_2}\, G} \right|$.

1.10. В теории газовых двигателей решается уравнение $xy' = y(\ln y - \ln x)$. Найти его решение.

Указания к решению: Это однородное уравнение I порядка, так как оно может быть представлено в виде $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ (правая часть есть функция от отношения переменных $x$ и $y$), здесь $y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}$.

Введем подстановку $\frac{y}{x} = u, y = ux, y' = u'x + u,$ (6)
получим $u'x + u = \ln u$. Это уравнение вида (5).

Разделим переменные $\frac{du}{u(\ln u - 1)} = \frac{dx}{x}$ и проинтегрируем $\ln|\ln u - 1| = \ln x + \ln C$.
Отсюда $\ln u - 1 = Cx$. Введем обратную замену переменной $u = \frac{y}{x}$ $\frac{y}{x} = e^{Cx+1}$ или окончательно $y = xe^{Cx+1}$.

1.11. Дифференциальное уравнение движения самолета при пассивном методе полета на радиостанцию в определенных метеорологических условиях имеет вид $(x^2 + y^2)\,dx - xy\,dy = 0$, где $x, y$—координаты местоположения самолета относительно радиостанции. Найти общее решение уравнения.

Указания к решению: В случае записи исходного уравнения в виде (3) разумно в подстановке (6) принять $dy = xdu + udx$.

Ответ: $y^2 = x^2(2\ln x - C)$.

1.12. При исследовании профильного сопротивления лопасти вертолета рассматривается уравнение $y' = e^{y/x} + y/x$. Найти общий интеграл уравнения.

Ответ: $\ln Cx = -e^{-y/x}$.

1.13. Траектория движения летательного аппарата может быть задана уравнениями:

а) $xy \cos \frac{y}{x} = y \cos \frac{y}{x} - x$;

б) $xy' = y(1 + \ln y/x), y|_{x=1} = e^{-0.5}$,

где $x$, $y$—координаты местоположения аппарата относительно станции слежения. Найти общий интеграл (а) и частное решение (б) уравнения.

Ответ: а) $\sin y/x + \ln x = C$;

б) $y = xe^{-0.5x}$.

1.14. Поперечная динамическая управляемость самолета исследуется по решению уравнения $y' + ay = bf(t)$; $f(t) = \sin \omega t$, где $y = y(t)$; $a, b, \omega$ — постоянные, характеризующие динамические свойства самолета и параметры возмущения. Найти общее решение уравнения и частное, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 0$.

Указания к решению: Данное уравнение вида $y' + p(x)y = g(x)$ относится к классу линейных дифференциальных уравнений I порядка. В нем $p(x)$ и $g(x)$ — непрерывные функции $x$. Различают линейные однородные и неоднородные уравнения. Если $g(x)=0$, то уравнение называется линейным однородным, в нем разделяются переменные, указания к его решению даны в 1.1.

При решении линейного неоднородного уравнения $g(x) \neq 0$ полагаем $y = u(x)\ v(x)$, $y' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$, (7) где $u(x)$ и $v(x)$ — неизвестные вспомогательные функции. Подставим в исходное уравнение $y, y'$ и при этом опустим скобки: $u'v + uv' + auv = b \sin \omega t$.

После группировки получим $v(u' + au) + v'u = b \sin \omega t$.

Одну из функций, например $u$, выберем произвольно. Наиболее просто найти ее из условия обращения в нуль выражения $u' + au$. Для этого достаточно, чтобы $u$ было каким-либо частным решением уравнения с разделяющимися переменными $\frac{du}{dt} = -au$.

Вторую функцию $v$ найдем из решения дифференциального уравнения также с разделяющимися переменными: $v'u = b \sin \omega t$.

Итак, решение линейного уравнения сводится к решению системы двух дифференциальных уравнений I порядка:

$$\begin{cases} u' + au = 0; \\ v'u = b \sin \omega t. \end{cases}$$

Из первого уравнения получим $\ln|u| = -at + C_1$, для простоты примем $C_1 = 0$ и $u = e^{-at}$. Подставим $u$ во второе уравнение $v'e^{-at} = b \sin \omega t$. Отсюда $dv = be^{at} \sin \omega t dt$ и $v = b \int e^{at} \sin \omega t dt$.

Интеграл $I = \int e^{at} \sin \omega t dt$ рассмотрен в [1]*, воспользуемся приведенным там решением: $I = \frac{a \sin \omega t - \omega \cos \omega t}{a^2 + \omega^2} \times$ $\times e^{at} + \bar{C}$.

Тогда $v = be^{at} \frac{a \sin \omega t - \omega \cos \omega t}{a^2 + \omega^2} + C$, $C = b\bar{C}$ и окончательно общее решение исходного уравнения запишется в виде $y = uv = b \frac{a \sin \omega t - \omega \cos \omega t}{a^2 + \omega^2} + Ce^{-at}$.

Для нахождения частного решения конкретизируем постоянную $C$. Исходя из начального условия при $t=0$ $y = \frac{b}{a^2 + \omega^2} \times$ $\times (a \sin 0 - \omega \cos 0) + Ce^0 = 0$, отсюда $C = \frac{b \omega}{a^2 + \omega^2}$. Таким образом, частное решение имеет вид $y = \frac{b}{a^2 + \omega^2}$ $(a \sin \omega t -$ $- \omega \cos \omega t) + \frac{b \omega}{a^2 + \omega^2} e^{-at}$.

1.15. Найти частное решение предложенного в 1.14 уравнения при начальном условии $y(0) = 0$, если: а) $f(t) = t$; б) $f(t) = e^{-t}$.

Ответ: а) $\frac{b}{a^2} (at - 1 + e^{-at})$;

б) $\frac{b}{a - 1}$ $(1 - e^{-at})$ при $a \neq 1$,

$bte^{-at}$ при $a = 1$.

1.16. Движение груза, сброшенного с вертолета, при вертикальном падении задано уравнением $S' + S = kt$, где $k$ — постоянный коэффициент; $S = S(t)$ — расстояние, отсчитываемое от точки сбрасывания груза; $t$ — текущее время.

Найти зависимость $S(t)$ при начальном условии $S(0) = 0$.

Ответ: $S = kt - k(1 - e^{-t})$.

1.17. Движение самолета при разбеге описывается уравнением $S' + 2S = 4t + 4t^2$. Найти закон движения $S = S(t)$, если отсчет пути начинается при $t = 0$. Определить время $t$ до момента отделения носового колеса, если летчик начинает двигать ручку управления при достижении скорости разбега 170 км/ч.

Ответ: $S = 2t^2$; 11,8 с.

---

* Бугров Я. С., Никольский С. М. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление. — М.: Наука. Главная редакция физ.-мат. литературы, 1981.

1.18. Для установления зависимости тяги турбореактивного двигателя $P$ от числа оборотов турбины $n$ составлено уравнение $p' + \frac{p}{n} = 4\,an^2$, где $a$—постоянная. Определить $P=P(n)$, если $P\,(1000) = 10^9a$.

Ответ: $P = an^3$.

1.19. В горизонтальном полете самолета скорость $V$ на данном угле атаки и данной высоте связана с весом самолета $G$ уравнением $4\,GV' - V = a\sqrt{G}$, где $a$ — постоянная.

Определить зависимость $V = V(G)$, если $V\,(10^4) = 100\,a$.

Ответ: $V = a\sqrt{G}$.

1.20. Авиационный высотомер состоит из сильфона, разделенного диафрагмой, смещение которой $\Theta$ возникает за счет изменения с высотой $h$ статического давления. Диафрагма связана со стрелкой прибора. Система описывается дифференциальным уравнением $\Theta' + a\,\Theta = bh'$, где $a$ и $b$ — постоянные. Найти реакцию прибора, если самолет при $t = 0$ после участка горизонтального полета на высоте $h_0$, при этом $\Theta=0$, начал набирать высоту с постоянной вертикальной скоростью $V$, т. е. $h = h_0 + Vt$.

Указать вид вынужденной и переходной составляющих реакции.

Ответ: $\Theta = \Theta_п + \Theta_в,\ \Theta_п = -\frac{bV}{a}\,e^{-at},\ \Theta_в = \frac{bV}{a}$.

1.21. Траектория движения самолета задана в некоторой декартовой системе координат, связанной с пунктом наблюдения уравнением $y'x + y = -xy^2$; $x \in [e, 10]$. Найти и построить $y=y\,(x)$, если траектория проходит через точку $A\,(e, e^{-1})$.

Ответ: $y = \frac{1}{x \ln x}$.

Указания к решению. Данное дифференциальное уравнение не является линейным (в правой части присутствует нелинейный относительно $y$ член) и относится к уравнениям Бернулли, имеющим общий вид $y' + p\,(x)\,y = g\,(x)\,y^n$, $n \neq 0$, $n \neq 1$. Оно может быть сведено к линейному с помощью подстановки $t = y^{n-1}$. Здесь рекомендуется для решения ввести подстановку (7) и следовать указанному в 1.14 порядку.

1.22. Летательный аппарат выполняет маневр, двигаясь по траектории, описываемой в некоторой декартовой системе координат уравнением $y' = xy + x^3y^2$, $x \in [0,3]$.

Найти $y = y(x)$, если траектория проходит через точку A (0; 0,001).

Ответ: $y = \dfrac{1}{2 - x^2 + 998\, e^{-0{,}5x^2}}$.

1.23. Для управления движением космического летательного аппарата используются реактивные двигатели малой тяги, работающие в импульсном режиме. Приближенно изменение тяги во времени $R(t)$ на участке запуска двигателя описывается уравнением $T_1R' + R = R_н$, $R(0) = 0$, а на участке останова равенством $T_2R' + R = 0$, $R(0) = R_н$. Здесь $T$ — постоянная времени двигателя, характеризующая инерционные свойства; $R_н$ — номинальное (установившееся) значение тяги.

По команде в момент времени $t = 0$ двигатель запускается и при $t = 5T_1$ выключается. Найти функцию $R(t)$. В расчете принять, что к моменту выключения тяга двигателя достигла номинальной величины. Допускается ли при этом погрешность? Построить график процесса в относительных координатах $\frac{R}{R_н}$ и $\frac{t}{T}$ (при построении взять $T_1 = T_2 = T$).

Ответ: $\dfrac{R}{R_н} = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{t}{T_1}}, & 0 \leqslant t < 5T_1; \\ e^{-\frac{t}{T_2}}, & 5T_1 \leqslant t. \end{cases}$

### *УРАВНЕНИЯ В ПОЛНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛАХ*

1.24. Площадь поперечного сечения $S$ и скорость движения газа $V$ на небольших скоростях (порядка половины скорости звука) для сужающегося реактивного сопла связаны уравнением $VdS + SdV = 0$. Найти соотношение между $V$ и $S$.

Указания к решению: Данное уравнение относится к уравнениям с разделяющимися переменными, однако его можно отнести и к классу уравнений в полных дифференциалах. Это уравнения вида $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, где левая часть есть полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$:

$$du = P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy.$$

Для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}.$$

В этом случае общий интеграл $u(x, y) = C$ уравнения находится из решения системы

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y); \\ \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y). \end{cases}$$

В данном случае $P = V$, $Q = S$ и выполняется условие $\frac{\partial}{\partial V}(S) = \frac{\partial}{\partial S}(V) = 0$. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial S} = V; \\ \frac{\partial u}{\partial V} = S \end{cases}$$

и проинтегрируем одно из них, например, первое. Получим $u = VS + C_1(V)$, где $C_1(V)$ — произвольная функция, зависящая от $V$. Далее находим частную производную от $u$ по $V$: $\frac{\partial u}{\partial V} = S + \frac{\partial C_1(V)}{\partial V}$ и приравниваем ее к выражению производной во втором уравнении системы:

$$S + \frac{\partial C_1(V)}{\partial V} = S; \quad \frac{\partial C_1(V)}{\partial V} = 0.$$

Интегрируем последнее уравнение $C_1(V) = C_2$, отсюда $u = VS + C_2$ или $VS = u - C_2$. Так как $u$ есть постоянная функция, заменим $u - C_2 = C$, окончательно придем к общему интегралу вида $VS = C$.

Проверьте, относятся ли уравнения, приведенные в задачах 1.25, 1.26 к классу уравнений в полных дифференциалах. Выполните указанное в задачах задание.

1.25. Дальность полета $L$ тела, брошенного с небольшой фиксированной скоростью под углом $\Theta$ к горизонту, подчиняется уравнению $\frac{2}{L} \cos 2\Theta \, d\Theta - \frac{\sin 2\Theta}{L^2} dL = 0$. Найти связь между $L$ и $\Theta$.

Ответ: $\frac{\sin 2\Theta}{L} = C$.

1.26. Зависимость между углом подъема самолета $\Theta$ и качеством самолета $K$ выражается уравнением $\frac{K}{\cos^2\Theta} d\Theta + tg\Theta \, dK = 0$. Решить уравнение, найдя частное решение, удовлетворяющее условию $K = 1$ при $\Theta = \frac{\pi}{4}$.

Ответ: $K \operatorname{tg}\Theta = 1$.

1.27. Исследование относительного коэффициента полезного действия турбины, установленной на летательном аппарате, связано с решением уравнения $\frac{y\,(b+2x)}{x\,(b+x)}\,dx - dy = 0$. Относится ли это уравнение к уравнениям в полных дифференциалах?

Показать, что мы придем к рассматриваемому типу уравнения, если домножим его на интегрирующий множитель $\mu = \frac{1}{x\,(b+x)}$.

Найти решение полученного уравнения.

Ответ: $\frac{y}{x\,(b+x)} = C$.

1.28. Частный интеграл дифференциального уравнения $3\,x^2e^y + (x^2e^y - 1)\,y' = 0$, удовлетворяющий начальным условиям $y\,(0) = 1$, представляет собой траекторию движения самолета в системе координат, связанной с точкой наблюдения. Найти уравнение кривой.

Ответ: $x^3e^y - y = 1$.

## 2. *ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ II ПОРЯДКА*

Дифференциальным уравнением II порядка называется уравнение, заданное в неявном виде

$$F\,(x, y, y', y'') = 0 \tag{8}$$

или уравнение, разрешенное относительно старшей производной $y'' = f\,(x, y, y')$. (9)

Здесь $x$ — аргумент; $y$ — неизвестная функция.

Различают общее решение (функция $y = \varphi\,(x, C_1, C_2)$) и общий интеграл (уравнение $\Phi\,(x, y, C_1, C_2)$) уравнений (8) (9), где $C_1$ и $C_2$ — произвольные постоянные.

Нахождение решения уравнения, удовлетворяющего начальным условиям $y|_{x=x_0} = y_0$, $y'|_{x=x_0} = y'_0$, называется задачей Коши. Решение задачи Коши называется частным решением уравнения.

### *УРАВНЕНИЯ, ДОПУСКАЮЩИЕ ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА*

2.1. Самолет весом 500 кН касается посадочной полосы, имея скорость 227 км/ч, и движется до полной остановки. Длина пути зависит от эффекта применения тормозящих устройств, включения реверсивной тяги, величины лобового сопротивления.

Определить необходимую суммарную величину сил сопротивления, действующих на аппарат, если на длину пути и время движения по полосе наложены ограничения: $S_к = 1200$ м, $t_к = 30$ с.

Указания к решению: Обозначая сумму сил сопротивления движению самолета через $Q$, массу самолета через $m$, согласно 2-му закону Ньютона получим $mS''(t) = -Q$.

Уравнение относится к классу уравнений вида $y'' = f(x)$. Для нахождения общего решения необходимо провести два последовательных интегрирования (после первого приходим к уравнению I порядка вида (2)):

$$mS' = -Qt + C_1; \quad mS = -Q\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2.$$

Получим общее решение дифференциального уравнения.

Для конкретизации произвольных постоянных воспользуемся начальными условиями:

$$V(0) = S'(0) = 227 \text{ км/ч} = 63 \text{ м/с}; \quad S(0) = 0,$$

откуда при $t = 0$ $C_1 = 63m$; $C_2 = 0$.

Тогда зависимость пройденного пути от времени выразится формулой $S = -\frac{Q}{2m}t^2 + 63t$. Учитывая, что $m = \frac{P}{g}$, $g \approx 9{,}8$ м/с$^2$, $t_к = 30$ с, получим искомое значение $Q = (63t_к - S_к)\frac{2m}{t_к^2} \approx 78$ кН.

2.2. Дифференциальное уравнение движения цилиндрической ракеты имеет вид $\frac{d^2y}{d\lambda^2} = \frac{a}{1-\lambda} - b$, где $y$ — высота подъема; $\lambda$ — отношение израсходованной массы ко всей начальной массе ракеты; $a, b$ — постоянные параметры. Найти частное решение, удовлетворяющее начальным данным: $y|_{\lambda=0} = 0$, $y'|_{\lambda=0} = 0$.

Ответ: $y = a\lambda - \frac{1}{2}b\lambda^2 - a(1-\lambda)\ln|1-\lambda|$.

2.3. Движение самолета по посадочной полосе описывается уравнением $mS'' = -Q$, где $Q$ — сумма сил трения и лобового сопротивления; $m$ — масса самолета; $S(t)$ — пройденный путь. Самолет касается полосы с начальной скоростью 220 км/ч и должен иметь в контрольной точке, расположенной на расстоянии 900 м от точки приземления, скорость 38 км/ч. Выполняется ли это условие, если вес аппарата $P = 400$ кН, а $Q = 60 \cdot$ кН.

Если условие не выполнено, рассчитать величину необходимой реверсивной тяги.

Ответ: $\approx 82$ кН, $\approx 22$ кН.

2.4. Изучение колебаний консольной балки в газотурбинном двигателе дает дифференциальное уравнение вида $y'' = a\,(b - x)$, где постоянные коэффициенты $a$, $b$ связаны с конструкцией балки. Найти общее решение.

Ответ: $y = -\frac{a}{6}x^3 + \frac{ab}{2}x^2 + C_1x + C_2$

2.5. Рассматривается взлет истребителя весом 144 кН в предположении, что разность сил тяги и сопротивления воздуха остается постоянной и равна 45 кН. Определить необходимую длину взлетной полосы, если скорость отрыва 60 м/с.

Ответ: 590 м.

2.6. При взлете истребителя (см. условие задачи 2.5) для сокращения длины разбега применяется стартовое ракетное устройство, развивающее постоянную тягу 22,5 кН.

Определить длину взлетной полосы для случаев:

а) устройство работает в течение первых 10 с, а потом выключается; б) устройство работает с 5-й по 15-ю секунду от начала взлета.

Ответ: 487,5 м, 412,5 м.

2.7. Составить и решить дифференциальное уравнение движения тела, сброшенного с вертолета с начальной скоростью, равной нулю. При падении тела с малой высоты считают, что сопротивление воздуха пропорционально скорости движения.

Указания к решению: Составим уравнение баланса сил, под действием которых движется тело, взяв начало координат в точке сбрасывания: $am = P - Q$, где $a$ — ускорение, $m$ — масса, $P$ — вес тела, $Q$ — сила сопротивления.

Учитывая, что $a = S''(t)$, $V = S'(t)$, здесь $S(t)$ — пройденный путь, по условию $Q = kV$ получим

$$mS'' = mg - kS'. \qquad (10)$$

Это дифференциальное уравнение II порядка вида $F(x, y', y'') = 0$, не содержащее неизвестной функции $y(x)$. Решение осуществляется в два этапа: вводится новая функция $z(x) = y'(x)$, $z'(x) = y''(x)$ и относительно нее решается полученное уравнение I порядка — $F(x, z, z') = 0$; далее решается уравнение $y' = z$. Вернемся к уравнению (10) и заменим в нем производные $S'$ и $S''$ по формулам $S'=V, S''=V'$: $mV' = mg - kV$. Это уравнение I порядка с разделяющимися переменными вида (5). Его решением является функция $V = V(t, C_1)$. Далее интегрируем повторно: $S(t) = \int V(t; C_1)\,dt + C_2$.

Окончательный ответ, с учетом начальных условий $S(0) = 0$, $V(0) = 0$, имеет вид $S = \frac{m}{k} gt + \frac{m^2}{k^2} g e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{m^2}{k^2} g$.

2.8. При убирании шасси истребителя совершается движение, описываемое уравнением $2xy''=y'$. Проинтегрировать его.

Ответ: $y = \frac{2}{3} C_1 x^{3/2} + C_2$.

2.9. Исследование вопроса о длине разбега самолета приводит к решению уравнения

$$\frac{d^2l}{dt^2} = 1 - \left(\frac{dl}{dt}\right)^2.$$

Найти общее решение уравнения и частное, удовлетворяющее нулевым начальным условиям (разбег из состояния покоя).

Ответ: $l = \ln|e^{2t} + C_1| - t + C_2$;

$l = \ln 2\,(e^{2t} + 1) - t$.

2.10. Решение одной из задач об управлении летательного аппарата на орбите требует исследования интеграла уравнения $y^3 y'' = 1$, где $x$ и $y$ — координаты аппарата в системе координат, связанной с наблюдателем. Найти частный интеграл при начальных условиях $y(-2) = 1$, $y'(-2) = -1$.

Указания к решению: Данное уравнение вида $F(y, y', y'') = 0$ не содержит в явном виде независимую переменную $x$. Для решения полагаем $y' = p(y)$, тогда $y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} y' = p\frac{dp}{dy}$ и получим уравнение I порядка $F\left(y, p, p\frac{dp}{dy}\right) = 0$, в котором неизвестной функцией является $p(y)$, а независимой переменной $y$.

В данном случае после подстановки $y' = p$ получим дифференциальное уравнение I порядка с разделяющимися переменными: $y^3 p\frac{dp}{dy} = 1$. Разделим переменные и проинтегрируем: $p^2 = C_1 - \frac{1}{y^2}$. Подставим в последнее соотношение $p = \frac{dy}{dx}$, получим дифференциальное уравнение I порядка. Его решение дает общий интеграл $C_1 y^2 - 1 = (C_1 x + C_2)^2$. Конкретные

значения независимых переменных найдем, решая относительно $C_1, C_2$ следующую систему: $(y')^2 = C_1 - \frac{1}{y^2}$; $C_1 y^2 - 1 = (C_1 x + C_2)^2$, при указанных начальных условиях: $1 = C_1 - 1$, $C_1 \cdot 1 - 1 = (C_1 \cdot (-2) + C_2)^2$.
Окончательно получим $C_1 = 2$, $C_2 = 5$.

Ответ: $2y^2 - 1 = (2x+5)^2$.

2.11. При экспериментальной отработке ракетного двигателя необходимо решение уравнений: а) $y''(y-1) = 2(y')^2$;
б) $2yy'' = (y')^2\ y(-1) = 4,\ y'(-1) = 1$,
где $y(t)$ — функция, характеризующая изменение давления в камере сгорания при определенных условиях работы двигателя. Проинтегрировать указанные уравнения.

Ответ: а) $y = C$;
$(y-1)(t + C_1) = C_2$;
б) $y = 0{,}25\,(t+9)^2$.

## *ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ*

2.12. Найдите, руководствуясь табл. 1, общее решение уравнения

$$y' + py' + gy = 0, \qquad (11)$$

описывающего собственные колебания материальной среды в элементах пневмопровода при: а) $p = 1$, $g = -6$;
б) $p = -2$, $g = 2$; в) $p = 8$, $g = 16$.

Таблица 1

*Общие решения однородных уравнений II порядка в зависимости от вида характеристического уравнения*

| № п/п | Описание корней | $y$ |
|---|---|---|
| 1 | действительные разные $k_1 \neq k_2$ | $C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$ |
| 2 | действительные равные $k_1 = k_2 = k$ | $e^{kx}(C_1 + C_2 x)$ |
| 3 | Комплексно сопряженные $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ | $e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$ |

Указания к решению: Это однородное дифференциальное уравнение II порядка с постоянными коэффициентами ($p$ и $g$ — вещественные числа). Для нахождения решения, заменяя $y'' = \kappa^2$, $y' = \kappa$, $y = 1$, составим алгебраическое уравнение

$$\kappa^2 + p\kappa + g = 0, \qquad (12)$$

называемое характеристическим. Его корни обозначим через $\kappa_1$ и $\kappa_2$. Общее решение уравнения (11) обозначим через $\bar{y}$, оно зависит от величины и вида корней характеристического уравнения (различные случаи представлены в табл. 1).

Ответ: а) $\bar{y} = C_1 e^t + C_2 e^{-6t}$;

б) $\bar{y} = e^t\,(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$;

в) $\bar{y} = e^{-4t}\,(C_1 + C_2 t)$.

2.13. Найдите, руководствуясь табл. 2, общее решение уравнения $y'' + py' + gy = Ae^{at}$, описывающего вынужденные колебания материальной среды в элементах пневмогидропривода при:

а) $p = -5$, $g = 6$, $A = 1$, $a = 4$;

б) $p = 0$, $g = -9$, $A = 6$, $a = -3$;

в) $p = -4$, $g = 4$, $A = -2$, $a = 2$;

г) $p = 0$, $g = 4$, $A = 8$, $a = 0$;

д) $p = -1$, $g = 0$, $A = 7$, $a = 0$.

Таблица 2

*Виды частных решений неоднородных уравнений II порядка для случая, когда правая часть имеет вид экспоненты*

| № п/п | Признак сравнения | $y$ |
|---|---|---|
| 1 | $a \neq \kappa_1$, $a \neq \kappa_2$ | $A_1 e^{ax}$ |
| 2 | $a = \kappa_1$, $a \neq \kappa_2$ | $A_1 x e^{ax}$ |
| 3 | $a = \kappa_1 = \kappa_2$ | $A_1 x^2 e^{ax}$ |

Указания к решению: Это неоднородное дифференциальное уравнение II порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + py' + gy = f(t), \qquad (13)$$

где $f(t) = Ae^{at}$ — правая часть специального вида. Общее решение уравнения составляется в виде $y = \bar{y} + Y$, где $\bar{y}$ — общее решение однородного уравнения (II), соответствующего данному неоднородному; $Y$ — частное решение уравнения (13). Структура $Y$ зависит от величины и вида корней характеристического уравнения (12) (различные случаи представлены в табл. 2).

Рассмотрим решение уравнения а): $y'' - 5y' + 6y = e^{4t}$. Ему соответствует однородное уравнение $y'' - 5y' + 6y = 0$, характеристическое уравнение $\kappa^2 - 5\kappa + 6 = 0$ имеет разные вещественные корни: $\kappa_1 = 2$, $\kappa_2 = 3$, откуда $\bar{y} = C_1e^{2t} + C_2e^{3t}$. Теперь отыщем частное решение неоднородного уравнения. Здесь $a = 4$ и $\kappa_1 \neq \kappa_2 \neq a$, тогда из табл. 2 следует, что $Y$ надо искать в виде $Y = A_1e^{4t}$. Неопределенный коэффициент $A_1$ находится из условия удовлетворения $Y$ исходному неоднородному уравнению. Подставим в него функцию $Y$, ее производные $Y' = 4A_1e^{4t}$, $Y'' = 16A_1e^{4t}$: $16A_1e^{4t} - 20A_1e^{4t} + 6A_1e^{4t} = e^{4t}$, откуда $A_1 = 0{,}5$ и $Y = 0{,}5e^{4t}$.

Окончательное решение примет вид $y = C_1e^{2t} + C_2e^{3t} + 0{,}5e^{4t}$.

Ответ:

а) $y = C_1e^{2t} + C_2e^{3t} + 0{,}5e^{4t}$;

б) $y = C_1e^{3t} + C_2e^{-3t} - te^{3t}$;

в) $y = e^{2t}(C_1 + C_2t) - t^2e^{2t}$;

г) $y = C_1\cos 2t + C_2\sin 2t + 2$;

д) $y = C_1 + C_2e^{t} - 1/7\,t$.

2.14. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний подвижной части гироскопа имеет вид $s'' + 4s' + 4s = \sin 2t$. Найти зависимость $s(t)$ при нулевых начальных условиях.

Указания к решению: Это неоднородное дифференциальное уравнение II порядка с постоянными коэффициентами вида (13), где правая часть специального вида:

$$f(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t. \qquad (14)$$

Порядок составления общего решения аналогичен указанному в 2.13, при записи частного решения уравнения необходимо сравнить выражение $0 + \omega i$ ($i$ — мнимая единица) с корнями уравнения (12), далее следует руководствоваться табл. 3.

Таблица 3

*Виды частных решений уравнений II порядка для случая, когда правая часть имеет вид гармоники*

| № п/п | Признак сравнения | $y$ |
|---|---|---|
| 1 | $\alpha \neq 0$ | $A_1 \cos \omega x + B_1 \sin \omega x$ |
| 2 | $\alpha = 0,\ \beta = \omega$ | $x\,(A_1 \cos \omega x + B_1 \sin \omega x)$ |

Запишем однородное уравнение, соответствующее исходному $s'' + 4s' + 4s = 0$, и составим характеристическое уравнение $\kappa^2 + 4\kappa + 4 = 0$, которое имеет равные вещественные корни $\kappa_1 = \kappa_2 = -2$. Согласно табл. 1 (2 случай), запишем общее решение однородного уравнения в виде $\bar{y} = (C_1 + C_2 t)\, e^{-2t}$.

Перейдем к составлению частного решения неоднородного уравнения. Так как $\kappa_1 = \kappa_2 = -2 \neq 0 + 2i$, получим (см. табл. 3) функцию $Y = A_1 \cos 2t + B_1 \sin 2t$ и найдем ее производные: $Y' = -2A \sin 2t + 2B_1 \cos 2t$; $Y'' = -4A_1 \cos 2t - 4B_1 \sin 2t$. Подставим $Y$, $Y'$, $Y''$ в данное уравнение:

$$4A_1 \cos 2t - 4B_1 \sin 2t + 4(-2A_1 \sin 2t + 2B_1 \cos 2t) + 4(A_1 \cos 2t + B_1 \sin 2t) = \sin 2t.$$

Сравним коэффициенты при $\sin 2t$: $-4B_1 - 8A_1 + 4B_1 = 1$,
$\cos 2t$: $-4A_1 + 8B_1 + 4A_1 = 0$.

Отсюда $A_1 = -\frac{1}{8}$, $B = 0$ и $Y = -\frac{1}{8} \cos 2t$.

Функции $\bar{y}$ и $Y$ найдены. Составим общее решение исходного уравнения: $s = \bar{y} + Y = (C_1 + C_2 t)\, e^{-2t} - \frac{1}{8} \cos 2t$.

Решим задачу Коши. Для нахождения произвольных постоянных $C_1$, $C_2$ составим систему алгебраических уравнений. При $t = 0$:

$$y = (C_1 + C_2 \cdot 0)\, e^{-2 \cdot 0} - \frac{1}{8} \cos 2 \cdot 0 = 0;$$

$$y' = C_2 e^{-2 \cdot 0} - 2(C_1 + C_2 \cdot 0)\, e^{-2 \cdot 0} + \frac{1}{4} \sin 2 \cdot 0 = 0$$

или $C_1 - \frac{1}{8} = 0$, $C_2 - 2C_1 = 0$, откуда $C_1 = \frac{1}{8}$, $C_2 = \frac{1}{4}$.

Окончательно $s(t) = \frac{1}{8}(1 + 2t)\, e^{-2t} - \frac{1}{8} \cos 2t$, 2.15. Найдите, руководствуясь табл. 3, общее решение уравнения вынужденных колебаний среды [уравнение (13)] для возмущения в виде (14) при:

а) $p = -5$, $g = -6$; $A = 1$, $B = 0$, $\omega = 2$;
б) $p = 0$, $g = 9$, $A = 0$, $B = 1$, $\omega = 3$.

Ответ: а) $y = C_1 e^{6t} + C_2 e^{-t} - \frac{1}{20} (\cos 2t + \sin 2t)$;

б) $y = C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t - \frac{1}{6} t \cos 3t$.

2.16. При исследовании температуры в газотурбинном двигателе решается уравнение $\frac{d^2t}{dx^2} - k^2 t = 0$, где $t$ — температура на высоте $x$; $x$ — расстояние от основания лопатки. Найти общее решение.

Ответ: $t = C_1 e^{\kappa x} + C_2 e^{-\kappa x}$.

2.17 При исследовании динамики систем регулирования турбореактивных двигателей рассматривается функция, являющаяся решением уравнения $y'' - 8y' + (16+\omega^2) y = 0$, где $\omega$ — постоянная. Найти эту функцию.

Ответ: $y = e^{-4t} (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t)$.

2.18. Колебательные движения лопаток газотурбинных двигателей описываются уравнением $y'' + p^2 y' = 0$. Найти общее решение этого уравнения.

Ответ: $y = C_1 \cos pt + C_2 \sin pt$.

2.19. Дифференциальное уравнение колебаний тока в контуре гироскопа имеет вид $\frac{d^2 i}{dt^2} + 4i = \sin 2t$.
Проинтегрировать уравнение.

Ответ: $i = C_1 \sin 2t + C_2 \cos 2t - \frac{t}{4} \cos 2t$.

2.20. В теории устойчивости летательного аппарата управляемость самолета при маневре исследуется по решению уравнения, связывающего изменения усилия летчика $\Delta n$ с изменением перегрузки $\Delta p$ при постоянной скорости полета:

$$\frac{d^2 \Delta n}{dt^2} + 2h \frac{d \Delta n}{dt} + k^2 \Delta n = \Delta p.$$

Записать общее решение этого уравнения для случаев: а) $\Delta p = a$; б) $\Delta p = c \sin \omega t$, принимая в каждом из них $h > k$, $h < k$, $h = k$. Величины $h$, $k$, $a$, $c$, $\omega$ — постоянны*.

* Задачи составлены на основе приведенных в [1—9] материалов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Беляев Н. М., Уваров Е. И. Расчет и проектирование реактивных систем управления космических летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1974.

2. Рутер Р. С., Янпольский А. Р. Дифференциальные уравнения. М.: Высшая школа, 1976.

3. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов / Под ред. Демидовича Б. П. М.: Наука, 1966.

4. Конструкция и прочность самолетов и вертолетов / Под ред. проф. Миртова К. Д. и проф. Черненко Ж. С. М.: Транспорт, 1972.

5. Махин В. А., Присняков В. Ф., Белик Н. П. Динамика жидкостных ракетных двигателей. М.: Машиностроение, 1969.

6. Миеле А. Механика полета. М.: Наука, 1965.

7. Федорюк М. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1980.

8. Рубцова А. Д. Сборник дополнительных задач по высшей математике. Л.: Высшее авиационное училище гражданского воздушного флота, 1959.

9. Халфман Р. Л. Динамика. М.: Наука, 1972.

Составитель *Евгений Алексеевич Вакулич*

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЗАДАЧАХ АВИАЦИОННОЙ ТЕМАТИКИ

Методические указания

Редактор Э. Грязнова
Техн. редактор Н. Каленюк
Корректор Н. Куприянова

Сдано в набор 13.12.1981 г. Подписано в печать 16.02.82 г.
Формат 60×84 1/16. Бумага оберточная белая. Литературная гарнитура. Высокая печать. Усл. п. л. 1,2. Уч.-изд. п. л. 1,0. Тираж 2000. Заказ № 3. Бесплатно.

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени авиационный институт им. С. П. Королева, г. Куйбышев, ул. Молодогвардейская, 151.

Типография УЭЗ КуАИ, г. Куйбышев, ул. Ульяновская, 18.