

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра общей и теоретической физики

ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Лабораторный практикум по общей физике

Механика

Самара
Издательство «Универс-групп»
2006

*Печатается по решению Редакционно-издательского совета
Самарского государственного университета*

УДК 531.30
ББК 22.21
Д 22

Рецензент профессор А.Ф. Крутов

Д 22 **Движение твердого тела** [Текст] : лабораторный практикум по общей физике. Механика / А.А. Бирюков, Э.Н. Воробьева, Б.В. Данилюк, Г.П. Мартынова. – Самара : Изд-во «Универс групп», 2006. – 110 с.

ISBN 5-467-00100-0

Данное пособие является методическим руководством по выполнению цикла лабораторных работ по механике. Лабораторный практикум содержит описание десяти работ, посвященных изучению динамики твердого тела. Практикум включает общую теоретическую часть, в которой кратко рассмотрены основные положения кинематики и динамики твердого тела. Каждая работа содержит описание экспериментальной установки и методики эксперимента, практическую часть и контрольные вопросы. Лабораторный практикум предназначен, главным образом, для студентов первого курса дневного и очно-заочного отделений физического факультета университета, а также может быть использован при изучении физики на других естественных факультетах.

УДК 531.30
ББК 22.21

ISBN 5-467-00100-0 © Бирюков А.А., Воробьева Э.Н., Данилюк Б.В.,
Мартынова Г.П., 2006
© Самарский государственный университет, 2006

Содержание

Предисловие.....	4
Движение твердого тела	5
Теоретические основы эксперимента.....	5
1. Кинематика твердого тела.....	5
2. Закон движения центра масс.....	12
3. Вращение твердого тела вокруг закрепленной точки	15
4. Вращение твердого тела вокруг закрепленной оси	19
5. Уравнения движения твердого тела	21
6. Кинетическая энергия и работа вращающегося тела	22
Лабораторная работа № Д-1 Определение момента инерции твердого тела с помощью трифилярного подвеса	25
Лабораторная работа № Д-2 Проверка теоремы Гюйгенса-Штейнера с помощью трифилярного подвеса	33
Лабораторная работа № Д-3 Определение момента инерции и постоянной момента упругих сил из крутильных колебаний	37
Лабораторная работа № Д-4 Изучение законов вращательного движения с помощью маятника Обербека	43
Лабораторная работа № Д-5 Маятник Максвелла	52
Лабораторная работа № Д-6 Изучение законов движения твердого тела по наклонной плоскости	57
Лабораторная работа № Д-7 Определение коэффициента трения с помощью наклонного маятника	66
Лабораторная работа № Д-8 Крутильный маятник	75
Лабораторная работа № Д-9 Изучение прецессии гироскопа	90
Лабораторная работа № Д-10 Абсолютно упругий и неупругий удары	99

Предисловие

Предлагаемый лабораторный практикум служит руководством для выполнения цикла лабораторных работ по механике. Основной целью этого цикла является изучение главных закономерностей в движении твердого тела.

Практикум состоит из теоретической и экспериментальной частей. В теоретической части кратко рассмотрены основные положения кинематики и динамики твердого тела, изучение которых в общем физическом практикуме для большинства студентов опережает по времени лекционный курс. В этом случае отсылать студентов к рекомендованным учебникам по механике неэффективно, так как самостоятельно разобраться в вопросах, излагаемых в середине или конце учебника, можно, как правило, только проработав весь предшествующий материал.

Экспериментальная часть практикума состоит из описаний десяти лабораторных работ. В описании каждой работы подробно изложена методика эксперимента, приведены необходимые сведения об экспериментальной установке, сформулированы практические задания, определяющие последовательность действий при проведении измерений, даны рекомендации по методам обработки и представлению результатов. Кроме того, в конце каждой работы помещены вопросы, предназначенные для самоконтроля студентов при подготовке к отчету. Контрольные вопросы также помогают лучше усвоить сущность применяемых методов измерений, глубже осмыслить полученные результаты.

Для облегчения самостоятельной работы студентов к описанию каждой работы приложен библиографический список, в котором даны ссылки на учебные издания с указанием конкретных параграфов и страниц.

Движение твердого тела

Теоретические основы эксперимента

1. Кинематика твердого тела

При движении твердого тела в пространстве в общем случае изменяются координаты его частиц и возникают деформации. Однако, в ряде практически важных случаев деформации столь малы, что ими можно пренебречь. В связи с этим вводится модель *абсолютно твердого тела*, т. е. тела, у которого расстояние между двумя любыми частицами не меняется при любых условиях. В дальнейшем такое тело будет называться для краткости просто *твердым телом*.

При движении твердого тела каждая частица описывает свою траекторию, но эта траектория закономерно связана с траекториями других частиц. На каждую частицу тела действуют силы со стороны соседних частиц того же тела – это *внутренние силы* в твердом теле; к каждой частице тела могут быть приложены силы со стороны других тел или частиц, не принадлежащие данному телу, – это *внешние силы*. В дальнейшем эти силы будут соответственно обозначаться \vec{F}^{int} и \vec{F}^{ext} .

Любое сложное движение твердого тела состоит из простых движений: *поступательного* и *вращательного*. Поэтому сначала следует изучить эти простейшие виды движения.

При *поступательном* движении все линии, соединяющие начальное положение каждой точки твердого тела с ее конечным положением, параллельны между собой и имеют одинаковую длину. Пример такого движения представлен на рис.1. Квадрат $ABCD$ переходит за промежуток времени Δt в положение $A'B'D'$, и при этом все точки квадрата совершают одинаковые по величине и направлению перемещения. Такое движение твердого тела удобно характеризовать *вектором перемещения* любой его точки $\Delta\vec{r}$.

Если \vec{r}_1 – радиус-вектор некоторой точки A твердого тела в момент времени t , а \vec{r}_2 – в момент времени $t + \Delta t$, то вектор перемещения за интервал времени $(t, t + \Delta t)$ (или за промежуток времени Δt), как видно из рис.1, определяется соотношением

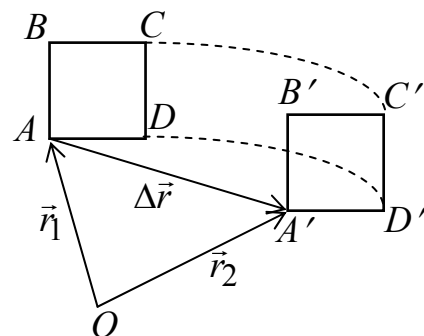


Рис.1. Поступательное движение твердого тела

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1. \quad (1)$$

Перемещение за единицу времени $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ называется *средней скоростью перемещения* твердого тела за интервал времени $(t, t + \Delta t)$ при поступательном движении. Предел средней скорости при $\Delta t \rightarrow 0$ (т. е. производная радиуса-вектора любой точки твердого тела по времени в момент времени t) называется *линейной скоростью* \vec{v} в момент времени t при поступательном движении:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (2)$$

Соответственно *линейное ускорение* твердого тела в момент времени t при поступательном движении

$$\vec{w} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (3)$$

Обычно для описания поступательного движения твердого тела используют векторный или координатный способы описания движения одной из точек данного тела. При этом учитывается тот факт, что при поступательном движении все точки твердого тела в любой момент времени имеют одинаковые скорости, а, следовательно, и одинаковые ускорения.

Вращательным движением (вращением) вокруг оси называется такое движение твердого тела, при котором в некоторой системе отсчета сохраняют свое положение все точки тела, расположенные на неподвижной прямой, называемой *осью вращения*. В этом случае все точки твердого тела,

не лежащие на оси вращения, движутся в плоскостях, перпендикулярных оси вращения. Траекториями этих точек являются окружности, центры которых лежат на оси вращения.

Для описания вращательного движения удобно вместо линейных координат ввести угловые. Рассмотрим, например, некоторую точку A твердого тела, не лежащую на оси вращения OO' (рис.2). За время Δt она переместится в положение A' , повернувшись на угол $\Delta \varphi$. На этот же угол за время Δt повернутся все точки твердого тела.

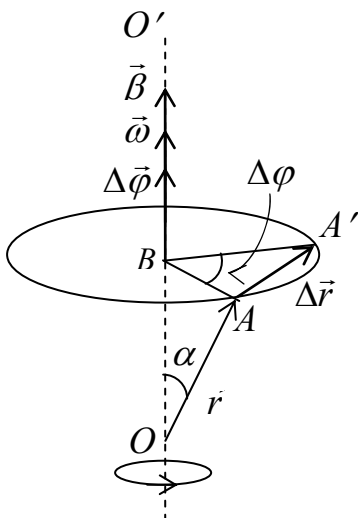


Рис.2. Вращение твердого тела вокруг оси

Для учета направления вращения вводится вектор поворота $\Delta\vec{\varphi}$, направленный вдоль оси вращения и равный по модулю углу поворота. При этом направление $\Delta\vec{\varphi}$ совпадает с направлением перемещения правого винта в случае, когда ось винта параллельна оси вращения твердого тела, а направление вращения винта совпадает с направлением вращения тела. Угловая скорость твердого тела в произвольный момент времени t определяется как

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}, \quad (4)$$

где $\Delta\vec{\varphi}$ – вектор поворота твердого тела за интервал времени $(t, t + \Delta t)$, а $\vec{\varphi} = \vec{\varphi}(t)$ – вектор поворота твердого тела за время t .

Угловое ускорение твердого тела в произвольный момент времени t

$$\vec{\beta} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}, \quad (5)$$

где $\Delta\vec{\omega}$ – изменение угловой скорости твердого тела за интервал времени $(t, t + \Delta t)$. Векторы $\vec{\varphi}$, $\Delta\vec{\varphi}$, $\vec{\omega}$, $\Delta\vec{\omega}$ и $\vec{\beta}$ направлены по оси вращения и называются поэтому *аксиальными*.

Вернемся вновь к описанию движения точки A и определим ее линейную скорость. Вектор перемещения $\Delta\vec{r}$ точки A за небольшое время Δt мало отличается по величине от дуги AA' , поэтому

$$\Delta r \cong AA' = AB \cdot \Delta\varphi = \Delta\varphi \cdot r \cdot \sin \alpha, \quad (6)$$

где $r = OA$ – постоянная длина радиуса-вектора \vec{r} точки A в системе отсчета с началом O , расположенным на оси вращения, а α – угол между \vec{r} и осью вращения (рис.2). Полученное выражение для Δr совпадает с модулем векторного произведения векторов $\Delta\vec{\varphi}$ и \vec{r} , а направление \vec{r} – с направлением этого векторного произведения. Следовательно, вектор перемещения $\Delta\vec{r}$ точки A можно записать в виде

$$\Delta\vec{r} = [\Delta\vec{\varphi}, \vec{r}]. \quad (7)$$

Разделим обе части этого уравнения на Δt :

$$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \left[\frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t}, \vec{r} \right], \quad (8)$$

и перейдем к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$. В результате получим следующее выражение для линейной скорости точки A :

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}]. \quad (9)$$

Для нахождения линейного ускорения точки A продифференцируем (9) по времени:

$$\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt} \vec{r} \right] + \left[\vec{\omega} \frac{d\vec{r}}{dt} \right] = [\vec{\beta}, \vec{r}] + [\vec{\omega}, \vec{v}], \quad (10)$$

Слагаемые в правой части (10) являются двумя составляющими линейного ускорения точки A . Вектор $[\vec{\beta}, \vec{r}]$ направлен вдоль вектора скорости и называется *тангенциальным (касательным)* ускорением, вектор $[\vec{\omega}, \vec{v}]$ направлен вдоль радиуса к центру окружности, по которой движется точка A , и называется *центростремительным (нормальным)* ускорением. Формулы (9) и (10) позволяют определить скорость и полное ускорение любой точки вращающегося твердого тела.

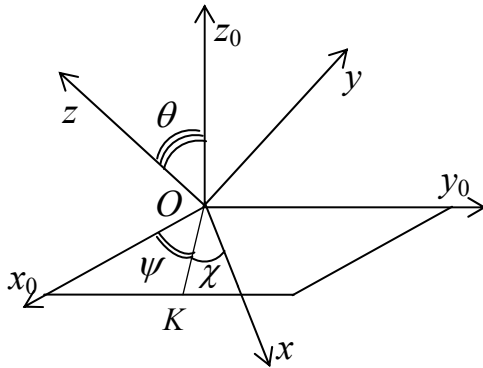


Рис.3. Схема углов Эйлера

Важным частным случаем движения абсолютно твердого тела является *вращение в пространстве вокруг неподвижной точки*. Наиболее наглядный пример такого движения – вращение волчка на плоскости. Для описания этого вида движения используются так называемые *углы Эйлера* (рис.3). Неподвижная точка O (*полюс*) принимается за начало координат. Система координат x_0, y_0, z_0 неподвижна, а система

x, y, z жестко связана с твердым телом. Таким образом, определение положения твердого тела становится эквивалентным определению положения подвижной системы отсчета относительно неподвижной системы отсчета. Пусть OK – линия пересечения плоскостей $x_0 O y_0$ и $x O y$ на рис.3. Тогда углами Эйлера являются угол χ между OK и Ox , угол ψ между Ox_0 и OK и угол θ между Oz_0 и Oz . По аналогии с терминами, принятыми в астрономии, углы Эйлера иногда называют так: χ – *углом собственного вращения* тела, ψ – *углом прецессии*, θ – *углом нутации*.

Пусть в начальном положении тела подвижная система отсчета совмещается с неподвижной. Тогда перемещение тела в конечное положение, заданное углами Эйлера, можно осуществить путем трех его поворотов в следующей последовательности: 1) на угол ψ вокруг оси z_0 ; 2) на угол θ вокруг линии OK ; 3) на угол χ вокруг оси Oz . Следовательно, рассматриваемое движение имеет три степени свободы и полностью описыва-

ется зависимостями от времени углов Эйлера. Примечательно, что для данного вида движения имеет место теорема Д'Аламбера: всякое перемещение твердого тела около неподвижной точки можно получить одним только поворотом тела вокруг определенной оси, проходящей через эту точку и называемой осью конечного вращения. Таким образом, согласно данной теореме, всякое элементарное перемещение, характеризуемое бесконечно малыми углами $d\chi$, $d\psi$, $d\theta$, можно осуществить одним только поворотом на бесконечно малый угол $d\varphi$ вокруг некоторой оси, проходящей через неподвижную точку O и называемой *мгновенной осью вращения*. Угловая скорость $\vec{\omega}$, с которой происходит элементарный поворот тела вокруг мгновенной оси вращения за бесконечно малый интервал времени $(t, t+dt)$, называется *мгновенной скоростью вращения* или *угловой скоростью* тела в момент времени t . При этом вектор данного элементарного поворота определяется формулой $d\vec{\varphi} = \vec{\omega} \cdot dt$. При вращении тела вокруг неподвижной точки вектор $\vec{\omega}$ может меняться и по величине, и по направлению, но (как и при вращении тела вокруг неподвижной оси) линейная скорость и линейное ускорение произвольной частицы тела относительно неподвижной системы отсчета определяются формулами (9) и (10)

Произвольное движение твердого тела в пространстве может быть чрезвычайно сложным. Но его всегда можно представить в виде совокупности двух движений: поступательного и вращения вокруг оси, проходящей через некоторую точку (полюс). К такому выводу приводит *теорема Шаля*: всякое перемещение свободного твердого тела из одного положения в другое может быть получено посредством поступательного перемещения вместе с произвольно выбранным полюсом и поворота вокруг некоторой оси, проходящей через этот полюс.

Частным случаем движения твердого тела является *плоское (плоскопараллельное)* движение, при котором все точки твердого тела движутся параллельно какой-либо неподвижной плоскости. Примеры: вращение тела вокруг фиксированной оси, качение цилиндра или колеса по плоскости и т.д. В этом случае движение твердого тела удобно представить как движение некоторой плоской фигуры в ее плоскости. Такое движение можно рассматривать как совокупность поступательного перемещения произвольно выбранной точки (полюса) и вращения вокруг оси, проходящей через этот полюс и перпендикулярной плоскости движения.

В качестве примера рассмотрим качение цилиндра по горизонтальной плоскости (рис.4). Пусть A – начальное положение цилиндра, A' – конечное положение. Движение цилиндра можно представить как движение какой-либо плоской фигуры, расположенной в сечении цилиндра плоскостью,

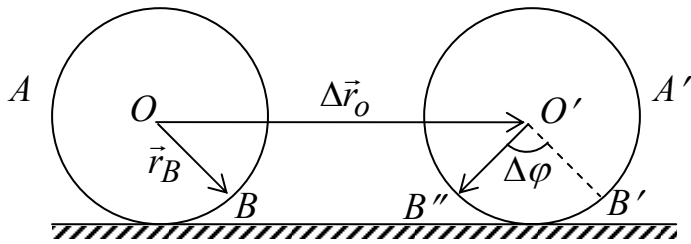


Рис.4. Качение цилиндра по горизонтальной плоскости

люс O . Поступательное движение характеризуется вектором перемещения $\Delta\vec{r}_O$, вращательное – вектором поворота $\Delta\vec{\varphi}$. Элементарное перемещение любой точки цилиндра, например, точки B будет

$$\Delta\vec{r}_B = \Delta\vec{r}_O + [\Delta\vec{\varphi}, \vec{r}_B], \quad (11)$$

где составляющая $\Delta\vec{r}_O$ одинакова для всех точек твердого тела, а составляющая $[\Delta\vec{\varphi}, \vec{r}_B]$ – принимает различные значения для разных точек. Поделив полученное выражение на Δt и перейдя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получим выражение для линейной скорости точки B в произвольный момент времени:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_O + [\vec{\omega}, \vec{r}_B], \quad (12)$$

где \vec{v}_O – скорость полюса O , $\vec{\omega}$ – угловая скорость цилиндра при его вращении вокруг оси, проходящей через полюс O .

Примечательно, что вращательная часть движения плоской фигуры не зависит от выбора полюса. Можно доказать, что всякое непоступательное перемещение плоской фигуры в ее плоскости может быть выполнено одним поворотом около определенного центра, называемого *полюсом конечного вращения*. Так показанное на рис.5 движение плоской фигуры OB из положения A в положение A' выполнено одним поворотом на угол $\Delta\varphi$ вокруг точки C , являющейся полюсом конечного вращения. Отметим, что

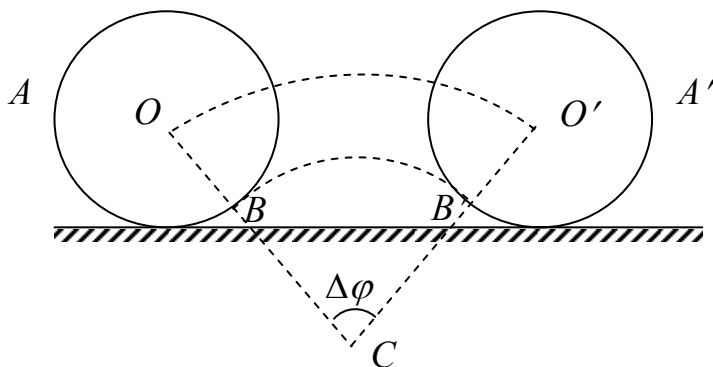


Рис.5. Перемещение плоской фигуры

перпендикулярной оси цилиндра, например, отрезка прямой OB . Это движение складывается из двух: поступательного движения – в положение $O'B'$ и поворота вокруг оси цилиндра, на которой находится по-

угол поворота $\Delta\varphi$ точно такой же, как и при повороте вокруг полюса O' на рис.4, т. е. угловая скорость $\vec{\omega}$ не зависит от выбора точки, относительно которой осуществляется поворот плоской фигуры.

Согласно сформулированному выше утверждению любое бесконечно малое плоское перемещение твердого тела можно осуществить только одним поворотом на бесконечно малый угол вокруг некоторого центра, называемого *мгновенным центром вращения*. Отсюда следует, что всякое непоступательное движение плоской фигуры в ее плоскости можно рассматривать как непрерывную последовательность бесконечно малых поворотов вокруг мгновенных центров вращения, положения которых непрерывно меняется. Поясним это на примере качения цилиндра по плоскости.

Пусть цилиндр радиуса R катится по плоскости без скольжения (рис.6). В этом случае точка A , лежащая на боковой поверхности цилиндра и касающаяся плоскости в рассматриваемый момент времени, неподвижна относительно плоскости, т. е. ее скорость \vec{v}_A в этот момент времени равна нулю. С другой стороны, в соответствии с формулой (12) скорость точки A может быть представлена в виде

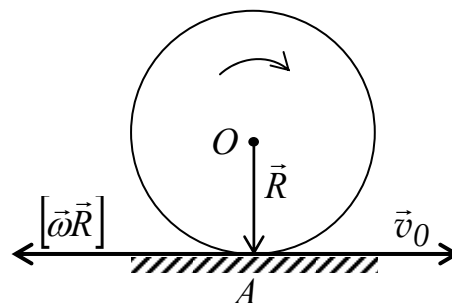


Рис.6. Качение цилиндра без скольжения

$$\vec{v}_A = \vec{v}_o + [\vec{\omega}, \vec{R}]. \quad (13)$$

Приравнивая это выражение нулю, получим

$$|\vec{v}_o| = |[\vec{\omega}, \vec{R}]|. \quad (14)$$

Следовательно, векторы \vec{v}_o и $[\vec{\omega}, \vec{R}]$ направлены в противоположные стороны и равны по модулю, т. е. в любой момент времени выполняется условие

$$v_o = \omega \cdot R. \quad (15)$$

Отсюда следует, что при качении цилиндра по плоскости без скольжения перемещение Δr_0 точки O за любой промежуток времени Δt равно длине дуги, которую проходит за тот же промежуток времени каждая точка боковой поверхности цилиндра в системе покоя оси цилиндра:

$$\Delta r_0 = R \cdot \Delta \varphi,$$

где $\Delta \varphi$ – угол поворота цилиндра. Точка A поверхности цилиндра, касающаяся плоскости в момент времени t , является центром вращения цилиндра в этот момент времени. Это означает, что движение цилиндра в течение малого интервала времени $(t, t + \Delta t)$ можно рассматривать как его враще-

ние вокруг оси, параллельной оси цилиндра и проходящей через точку A . Со временем в соприкосновение с плоскостью будут приходить другие точки поверхности цилиндра, и мгновенные центры вращения будут перемещаться по плоскости в направлении движения цилиндра.

2. Закон движения центра масс

Из опыта следует, что закон движения твердого тела определяется действием внешних сил. Движение материальной частицы, вызванное приложенными силами, подчиняется законам Ньютона. Основная задача динамики твердого тела состоит в том, чтобы на основе законов Ньютона получить законы движения твердого тела

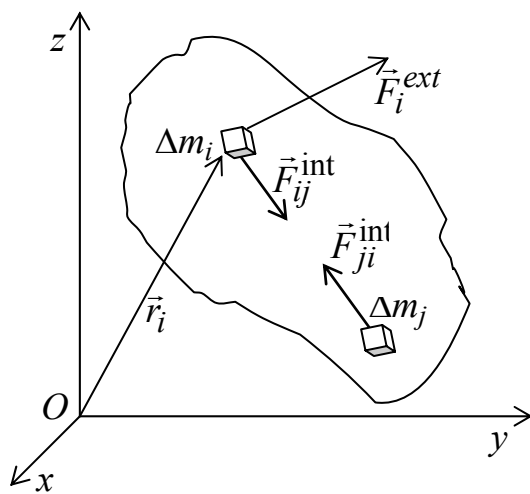


Рис.7. Модель твердого тела

конечных размеров под действием внешних сил. Для решения этой задачи представим твердое тело в виде совокупности пронумерованных материальных частиц пренебрежимо малых размеров. Пусть Δm_i – масса частицы с номером i в твердом теле; \vec{r}_i – радиус-вектор этой частицы, определяющий ее положение в системе координат x, y, z (рис.7); ΔV_i – объем частицы; $\rho_i = \frac{\Delta m_i}{\Delta V_i}$

– плотность вещества твердого тела в малой окрестности этой частицы. Каждая такая элементарная частица взаимодействует с другими частицами твердого тела. Обозначим через $\vec{F}_{ij}^{\text{int}}$ внутреннюю силу, с которой j -я частица действует на i -ю частицу. Очевидно, что внутренние силы удовлетворяют 3-му закону Ньютона: $\vec{F}_{ij}^{\text{int}} = -\vec{F}_{ji}^{\text{int}}$. Именно эти силы удерживают частицы твердого тела вместе и не дают возможность деформироваться телу.

Кроме внутренних сил, на частицы твердого тела могут действовать внешние силы любой природы. Равнодействующую всех внешних сил, приложенных к i -й частице, обозначим через \vec{F}_i^{ext} . Полагая внутренние и внешние силы заданными, запишем уравнение движения для каждой из N частиц твердого тела:

$$\Delta m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ij}^{\text{int}} + \vec{F}_i^{\text{ext}}, \quad (i = 1, 2, 3, \dots, N). \quad (16)$$

Сложив все эти уравнения, получим

$$\sum_{i=1}^N \Delta m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ij}^{\text{int}} + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{\text{ext}}. \quad (17)$$

В соответствии с третьим законом Ньютона $\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \vec{F}_{ij}^{\text{int}} = 0$. Для результирующей внешней силы введем обозначение \vec{F}^{ext} , т. е.

$$\vec{F}^{\text{ext}} = \sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}}.$$

Тогда уравнение (17) принимает вид

$$\sum_{i=1}^N \Delta m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}^{\text{ext}}. \quad (18)$$

Учитывая постоянство масс Δm_i , в последнем уравнении можно вынести оператор дифференцирования по времени за знак суммы:

$$\frac{d^2}{dt^2} \sum_{i=1}^N (\Delta m_i \vec{r}_i) = \vec{F}^{\text{ext}}. \quad (19)$$

Как известно, координаты центра масс системы материальных частиц относительно неподвижной системы отсчета определяются соотношениями

$$x_{\text{ц}} = \frac{\sum \Delta m_i x_i}{m}, \quad y_{\text{ц}} = \frac{\sum \Delta m_i y_i}{m}, \quad z_{\text{ц}} = \frac{\sum \Delta m_i z_i}{m}, \quad (20)$$

где x_i, y_i, z_i – координаты i – ой частицы массой Δm_i , $m = \sum_i \Delta m_i$ – масса

всей системы. Положение центра масс системы частиц можно также определить радиусом-вектором

$$\vec{R}_{\text{ц}} = \frac{\sum \Delta m_i \vec{r}_i}{m}. \quad (21)$$

Из последнего определения следует, что уравнение (19) есть не что иное, как *уравнение движения центра масс* твердого тела. Действительно, рассматривая твердое тело как систему N частиц и учитывая (21), можно записать (19) в виде

$$m \frac{d^2 \vec{R}_y}{dt^2} = \vec{F}^{ext}. \quad (22)$$

Согласно (22), центр масс твердого тела движется как некая воображаемая частица массой m под действием силы, равной результирующей внешней силе, приложенной к твердому телу. Если внешние силы отсутствуют или результирующая внешняя сила $\vec{F}^{ext} = 0$, то производная по времени второго порядка в (22) равна нулю, и центр масс тела в зависимости от начальных условий либо покоится, либо движется равномерно и прямолинейно.

Проведенное разбиение твердого тела на отдельные частицы предполагает *дискретную* структуру тела. Если же тело можно считать *сплошным*, то в формулах, определяющих координаты и радиус-вектор центра масс твердого тела, следует перейти к пределу при $N \rightarrow \infty$ и заменить массы малых частиц Δm_i на массы бесконечно малых частиц, определяемые формулой

$$dm = \rho(\vec{r})dV,$$

где dV – объем бесконечно малой частицы, а $\rho(\vec{r})$ – плотность вещества тела в точке с радиусом-вектором \vec{r} , в которой находится эта частица. Тогда формулы (20) принимают вид

$$x_y = \frac{1}{m} \int x \cdot dm; \quad y_y = \frac{1}{m} \int y \cdot dm; \quad z_y = \frac{1}{m} \int z \cdot dm, \quad (23)$$

а радиус-вектор центра масс следует находить по формуле

$$\vec{R}_y = \frac{1}{m} \int \rho(r) \vec{r} dV. \quad (24)$$

Очевидно, общая форма уравнения движения центра масс твердого тела не зависит от предположений о структуре тела. В частности, уравнение (22) остается справедливым и в модели сплошного твердого тела. Следует также отметить, что при выводе уравнения (22) не использовались ограничения на положения частиц, вытекающие из определения твердого тела. Поэтому уравнение (22) является общим уравнением движения центра масс произвольной системы тел и частиц.

Полученные уравнения (22) и (24) (или (21)) удобны для описания поступательного движения твердого тела. Если результирующая внешняя сила задана как функция радиуса-вектора и скорости $\vec{v}_y = d\vec{R}_y / dt$ центра масс

твердого тела (и, возможно, времени), т.е. $\vec{F}^{ext} = \vec{F}^{ext}(\vec{R}_u, \vec{v}_u, t)$, то уравнение (22) становится дифференциальным уравнением, позволяющим при заданных начальных условиях однозначно определить закон движения центра масс, т. е. зависимость $\vec{R}_u(t)$.

Заметим, что центры масс ряда твердых тел могут находиться вне областей пространства, заполненных частицами этих тел. Например, центры масс однородного кольца и однородного полого цилиндра находятся в положениях, показанных на рис.8.

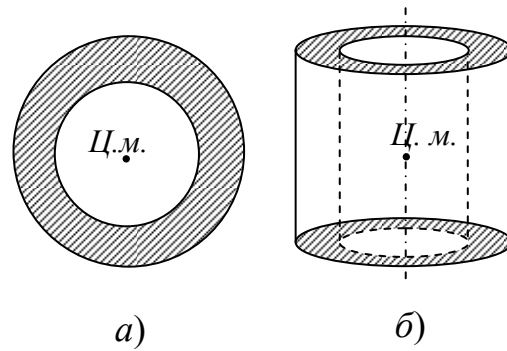


Рис.8. Центры масс однородного кольца (а) и однородного полого цилиндра (б)

3. Вращение твердого тела вокруг закрепленной точки

Рассмотрим вращение твердого тела произвольной формы вокруг некоторой точки, закрепленной в пространстве. Для наглядности представим тело, вращающееся вокруг некоторой точки опоры O (рис.9, а).

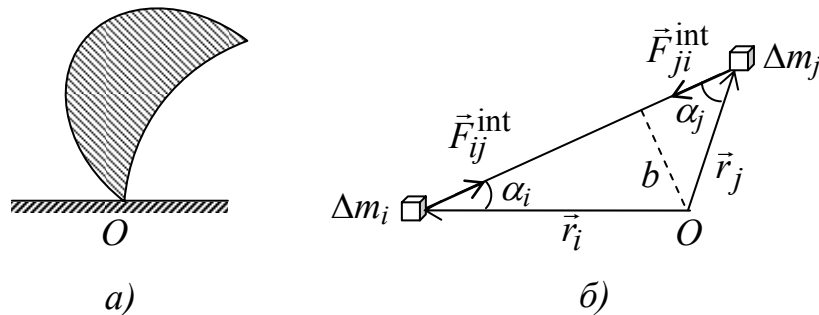


Рис.9. Вращение твердого тела вокруг точки O (а); момент внутренних сил (б)

Для отыскания уравнения движения вновь представим твердое тело в виде совокупности пронумерованных материальных частиц пренебрежимо малых размеров. Поместим начало координат в точку O , тогда движение твердого тела будет описываться системой уравнений

$$\Delta m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_j \vec{F}_{ij}^{int} + \vec{F}_i^{ext}, \quad (i = 1, 2, 3, \dots, N). \quad (25)$$

Умножим каждое уравнение векторно на радиус-вектор \vec{r}_i :

$$\Delta m_i \left[\vec{r}_i, \frac{d\vec{v}_i}{dt} \right] = \sum_j \left[\vec{r}_i, \vec{F}_{ij}^{\text{int}} \right] + \left[\vec{r}_i, \vec{F}_i^{\text{ext}} \right]. \quad (26)$$

Сложим полученные уравнения:

$$\sum_i \Delta m_i \left[\vec{r}_i, \frac{d\vec{v}_i}{dt} \right] = \sum_i \sum_j \left[\vec{r}_i, \vec{F}_{ij}^{\text{int}} \right] + \sum_i \left[\vec{r}_i, \vec{F}_i^{\text{ext}} \right],$$

или

$$\frac{d}{dt} \sum_i \left[\vec{r}_i, \Delta m_i \vec{v}_i \right] = \sum_i \sum_j \left[\vec{r}_i, \vec{F}_{ij}^{\text{int}} \right] + \sum_i \left[\vec{r}_i, \vec{F}_i^{\text{ext}} \right]. \quad (27)$$

Сначала рассмотрим первое слагаемое в правой части (27). Используя 3-й закон Ньютона, покажем, что $\sum_i \sum_j \left[\vec{r}_i, \vec{F}_{ij}^{\text{int}} \right] = 0$. Для простоты рассмотрим

пару взаимодействующих частиц с массами Δm_i и Δm_j (рис.9, б). Тогда сумма векторных произведений

$$\left[\vec{r}_i, \vec{F}_{ij}^{\text{int}} \right] + \left[\vec{r}_j, \vec{F}_{ji}^{\text{int}} \right] = r_i F_{ij}^{\text{int}} \sin \alpha_i + r_j F_{ji}^{\text{int}} \sin \alpha_j = b \left(F_{ij}^{\text{int}} + F_{ji}^{\text{int}} \right) = 0,$$

поскольку $F_{ij}^{\text{int}} + F_{ji}^{\text{int}} = 0$.

Второе слагаемое в правой части (27) является вектором *момента внешней силы* относительно точки O :

$$\vec{M} = \sum_i \left[\vec{r}_i, \vec{F}_i^{\text{ext}} \right]. \quad (28)$$

Аналогично можно ввести вектор *момента импульса* твердого тела относительно точки O :

$$\vec{L} = \sum_i \left[\vec{r}_i, \Delta m_i \vec{v}_i \right] = \sum_i \left[\vec{r}_i, \vec{p}_i \right], \quad (29)$$

где \vec{p}_i – импульс отдельной частицы.

С учетом введенных величин уравнение движения твердого тела (27) принимает вид

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \quad (30)$$

Для сплошного твердого тела вектор момента импульса твердого тела

$$\vec{L} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \sum \rho_i \Delta V_i [\vec{r}_i, \vec{v}_i] = \int_{(V)} \rho(r) [\vec{r}, \vec{v}] dV. \quad (31)$$

Поскольку мы рассматриваем вращение твердого тела, для решения последующих задач удобно перейти к вращательным характеристикам движения. Согласно формуле (9), введем в (31) угловую скорость вращения. Тогда

$$\vec{L} = \int_{(V)} \rho(r) [\vec{r}, [\vec{\omega}, \vec{v}]] dV.$$

Воспользуемся известной формулой разложения двойного векторного произведения $[\vec{A}, [\vec{B}, \vec{C}]] = \vec{B}(\vec{A}, \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}, \vec{B})$ и получим

$$[\vec{r}, [\vec{\omega}, \vec{r}]] = \vec{\omega}(\vec{r}, \vec{r}) - \vec{r}(\vec{r}, \vec{\omega}).$$

Тогда

$$\vec{L} = \int_{(V)} \rho(r) \{ \vec{\omega}(\vec{r}, \vec{r}) - \vec{r}(\vec{r}, \vec{\omega}) \} dV. \quad (32)$$

Заметим, что векторы \vec{L} и $\vec{\omega}$ связаны довольно сложным образом друг с другом и в общем случае не коллинеарны (рис.10). Очевидно, коллинеарность будет при выполнении условия $(\vec{r}, \vec{\omega}) = 0$.

Для того, чтобы проанализировать выражение (32), поступим следующим образом. Сначала найдем проекции вектора \vec{L} на оси координат:

$$L_x = \int \rho(r) \{ \omega_x r^2 - x(\vec{r}, \vec{\omega}) \} dx dy dz;$$

$$L_y = \int \rho(r) \{ \omega_y r^2 - y(\vec{r}, \vec{\omega}) \} dx dy dz;$$

$$L_z = \int \rho(r) \{ \omega_z r^2 - z(\vec{r}, \vec{\omega}) \} dx dy dz.$$

Учитывая, что угловая скорость $\vec{\omega}$ (и соответственно ее проекции ω_x , ω_y и ω_z) одинакова для всех частиц тела, и используя координатное представление скалярного произведения $(\vec{r}, \vec{\omega}) = x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z$, полученную систему уравнений запишем в виде

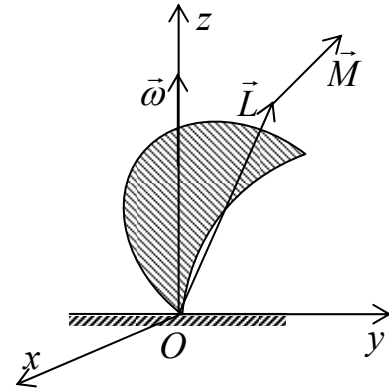


Рис.10. Взаимное расположение векторов $\vec{\omega}$, \vec{L} и \vec{M} при вращении тела вокруг фиксированной точки

$$\begin{aligned}
L_x &= \omega_x \int \rho(r)(r^2 - x^2) dx dy dz - \omega_y \int \rho(r)xy dx dy dz - \omega_z \int \rho(r)xz dx dy dz; \\
L_y &= -\omega_x \int \rho(r)yx dx dy dz + \omega_y \int \rho(r)(r^2 - y^2) dx dy dz - \omega_z \int \rho(r)yz dx dy dz; \\
L_z &= -\omega_x \int \rho(r)zx dx dy dz - \omega_y \int \rho(r)zy dx dy dz + \omega_z \int \rho(r)(r^2 - z^2) dx dy dz.
\end{aligned}$$

Оказалось, что каждая проекция вектора момента импульса связана с тремя проекциями вектора угловой скорости. Такая связь двух векторов осуществляется посредством *тензора*. Вводя компоненты тензора в виде коэффициентов

$$\begin{aligned}
I_{xx} &= \int \rho(r)(r^2 - x^2) dx dy dz, \quad I_{yx} = -\int \rho(r)yx dx dy dz, \\
I_{xy} &= -\int \rho(r)xy dx dy dz, \quad I_{yy} = \int \rho(r)(r^2 - y^2) dx dy dz, \\
I_{xz} &= -\int \rho(r)xz dx dy dz, \quad I_{yz} = -\int \rho(r)yz dx dy dz \\
I_{zx} &= -\int \rho(r)zx dx dy dz, \\
I_{zy} &= -\int \rho(r)zy dx dy dz, \\
I_{zz} &= \int \rho(r)(r^2 - z^2) dx dy dz, \tag{33}
\end{aligned}$$

выразим компоненты момента импульса через компоненты угловой скорости следующим образом:

$$\begin{aligned}
L_x &= I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z; \\
L_y &= I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z; \\
L_z &= I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z.
\end{aligned} \tag{34}$$

Все девять компонент тензора называются *инерциальными коэффициентами*, или *моментами инерции*. Полученную систему уравнений можно записать в векторной форме

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}, \tag{35}$$

где величина I является тензором момента инерции твердого тела 2-го ранга. Компоненты этого тензора образуют матрицу

$$\begin{vmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{vmatrix}. \quad (36)$$

Величины I_{xx} , I_{yy} и I_{zz} (диагональные элементы тензора) называются *осевыми* моментами инерции (моменты инерции относительно соответствующих осей координат). Остальные коэффициенты (недиагональные элементы тензора) называются *центробежными* моментами инерции (моменты инерции относительно осей, лежащих соответственно в плоскостях XY , YZ или XZ). Поскольку недиагональные компоненты $I_{xy} = I_{yx}$, $I_{xz} = I_{zx}$ и $I_{yz} = I_{zy}$, тензор момента инерции является симметричным.

Заметим, что тензор момента инерции является аналогом массы, поскольку выражает меру инертности твердого тела, но, кроме того, зависит еще и от характера распределения массы в твердом теле, т. е. от выбора системы координат. Всегда можно выбрать такое направление координатных осей, при котором недиагональные элементы тензора становятся равными нулю и матрица принимает вид

$$\begin{vmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_y & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{vmatrix}. \quad (37)$$

В этом случае координатные оси называют *главными осями инерции*, а величины I_x , I_y и I_z – *главными моментами инерции*. Таким образом, для любого твердого тела можно провести три главные взаимно перпендикулярные оси. При этом главные моменты инерции I_x , I_y и I_z будут различны для разных точек тела. Если главные оси проходят через центр масс твердого тела, то в этом случае они называются *центральными главными осями*.

4. Вращение твердого тела вокруг закрепленной оси

Рассмотрим частный, но очень важный случай, когда твердое тело вращается в пространстве вокруг некоторой неподвижной оси (плоскопараллельное вращение). Это может быть как воображаемая, так и реальная фиксированная ось, например, ось маховика в подшипниках.

Для удобства выберем систему отсчета так, чтобы оси координат были главными осями инерции. При этом осью вращения твердого тела OO'

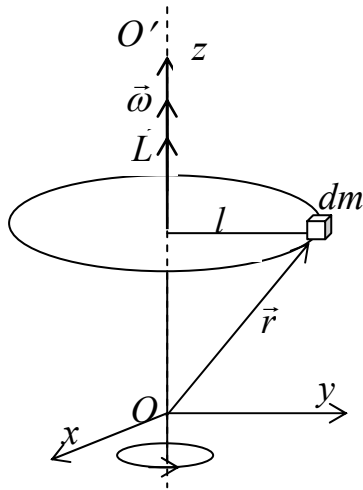


Рис.11. Вращение твердого тела
вокруг закрепленной оси

будет ось z (рис.11). Тогда любая элементарная частица массой $dm = \rho \cdot dV = \rho \cdot dxdydz$ в твердом теле будет вращаться по окружности радиуса $l(x, y)$. Вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ направлен вдоль оси вращения, поэтому согласно (35), вектор момента импульса будет иметь одну проекцию L_z , а уравнение движения (30) можно записать в виде

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z.$$

Здесь L_z – момент импульса относительно оси вращения:

$$L_z = I_z \omega_z. \quad (38)$$

Главный момент инерции I_z является для твердого тела *моментом инерции относительно оси вращения*. Используя (33), вычислим I_z :

$$\begin{aligned} I_z &= \int_{(V)} \rho(r)(r^2 - z^2) dxdydz = \int_{(V)} \rho(r)(x^2 + y^2) dxdydz = \\ &= \int_{(z)} \rho(r) dz \int_{(x,y)} (x^2 + y^2) dxdy = \int_{(z)} \rho(r) dz \int_{(x,y)} l^2(x,y) dxdy. \end{aligned} \quad (39)$$

Определим теперь вектор *момента силы относительно оси вращения* для твердого тела как $\vec{M} = [\vec{R}, \vec{F}^{ext}]$, где \vec{R} является радиусом-вектором точки приложения внешней силы \vec{F}^{ext} (рис.12). Поскольку в нашем случае вектор \vec{M} имеет одну проекцию, то

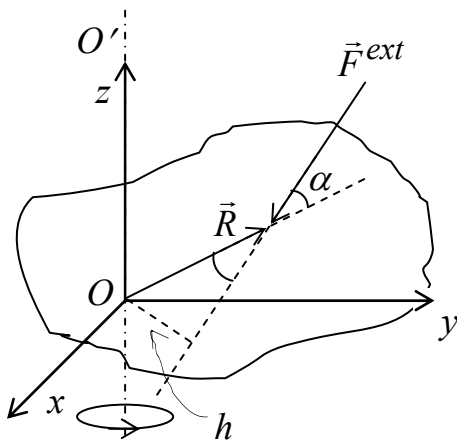


Рис. 12. К определению момента
силы

$$M = M_z = |\vec{R}| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin \alpha = h \cdot F, \quad (40)$$

где $h = R \cdot \sin \alpha$ является перпендикуляром, проведенным от оси вращения к линии действия силы. Эта величина получила названия *плеча силы*.

Заметим, что направление главных осей тела часто можно определить, пользуясь соображениями симметрии. Например, главные оси одно-

родного прямоугольного параллелепипеда параллельны его ребрам. Если тело обладает симметрией вращения относительно некоторой оси, например, цилиндр, то ось вращения и является одной из главных осей тела. Любая прямая, перпендикулярная к ней, также будет главной осью тела. Нахождение главных осей тела и вычисление моментов инерции различных твердых тел будет рассмотрено при решении конкретных задач данного практикума.

5. Уравнения движения твердого тела

Согласно принципам кинематики движение твердого тела можно представить как совокупность плоско-параллельного движения и вращения вокруг некоторой точки. При этом плоско-параллельное движение удобно описывать как перемещение центра масс, а вращение – поворотом вокруг центра масс. В этом случае радиус-вектор произвольной точки твердого тела (рис.13) представляется в виде $\vec{r} = \vec{R}_o + \vec{a}$, где \vec{R}_o – радиус-вектор центра масс, \vec{a} – вектор, определяющий положение точки относительно центра масс. Если ввести вектор бесконечно малого угла поворота $d\vec{\varphi}$, то вектор \vec{a} будет изменять свое положение, так что $d\vec{a} = [d\vec{\varphi}, \vec{a}]$. Тогда можно получить выражение для вектора скорости любой точки в виде

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{R}_o}{dt} + \frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{d\vec{R}_o}{dt} + \left[\frac{d\vec{\varphi}}{dt}, \vec{a} \right] = \vec{v}_o + [\vec{\omega}, \vec{a}], \quad (41)$$

где \vec{v}_o – скорость перемещения центра масс.

В соответствии с (22) и (30), уравнения динамики, описывающие движение твердого тела имеют вид:

$$m \frac{d\vec{v}_o}{dt} = \vec{F} \quad \text{и} \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}, \quad (42)$$

где \vec{L} – момент импульса относительно центра масс, \vec{M} – момент силы \vec{F} относительно центра масс. Эти уравнения существенно упрощаются в случае плоско-параллельного движения.

Пусть твердое тело перемещается параллельно плоскости xOy , тогда

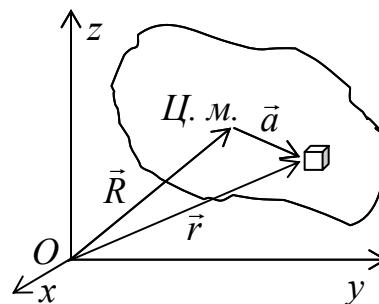


Рис.13. К описанию движения твердого тела

$$m \frac{d\vec{v}_o}{dt} = \vec{F} \quad \text{и} \quad \frac{d\vec{L}_{(z)}}{dt} = \vec{M}_{(z)}, \quad (43)$$

где $\vec{L}_{(z)}$ и $\vec{M}_{(z)}$ – соответственно момент импульса и момент силы относительно оси z , проходящей через центр масс. При этом

$$\vec{L}_{(z)} = I_z \cdot \vec{\omega}_{(z)}, \quad (44)$$

где I_z – момент инерции относительно оси z , $\vec{\omega}_{(z)}$ – вектор угловой скорости вращения. Заметим, что выбор именно центра масс в качестве фиксированной точки принципиального значения не имеет. Можно для описания движения твердого тела выбрать и любую другую точку, – описание будет правильным, но гораздо более сложным.

6. Кинетическая энергия и работа вращающегося тела

Кинетическая энергия твердого тела при вращении складывается из суммы кинетических энергий отдельных частиц тела. Для частицы тела массой Δm_i , находящейся на расстоянии r_i от оси, кинетическая энергия равна

$$\frac{\Delta m_i v_i^2}{2} = \omega^2 \frac{\Delta m_i r_i^2}{2},$$

поскольку $v_i = \omega \cdot r_i$. Кинетическая энергия всего вращающегося тела

$$E = \frac{\omega^2}{2} \sum_i \Delta m_i r_i^2 = \frac{I \omega^2}{2} \quad (41)$$

выражается так же, как и кинетическая энергия при поступательном движении, только вместо *массы* следует поставить *момент инерции* тела, а вместо *линейной* скорости – *угловую*.

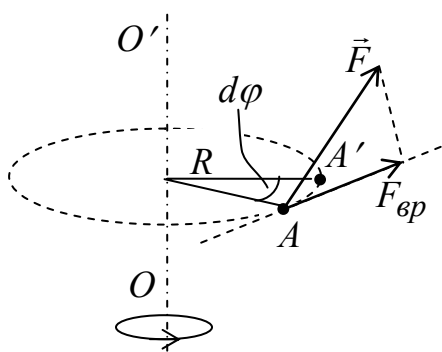


Рис. 14. К определению работы сил при вращении

Работу сил при вращении можно представить обычным способом: определить скалярное произведение каждой силы на путь, проходимый точкой приложения силы. Но можно выразить эту работу через момент сил.

Пусть точка A твердого тела (точка приложения силы \vec{F}) дви-

жется по кругу радиуса R (рис.14). Найдем проекцию силы \vec{F} на касательное направление к этому кругу ($\vec{F}_{\text{сп}}$ на рис.14). За время dt точка приложения силы сместится в положение A' , пройдя по дуге путь $R \cdot d\varphi$, где $d\varphi$ – угол, на который повернулось твердое тело. Тогда элементарная работа сил за время dt будет равна $F_{\text{сп}} R \cdot d\varphi$. Но величина $F_{\text{сп}} R$ равна моменту силы M , поэтому элементарную работу можно записать так: $M \cdot d\varphi$. Полная работа за промежуток времени t будет равна

$$A = \int_{\varphi_0}^{\varphi_t} M \cdot d\varphi. \quad (42)$$

Можно показать, что если момент сил вызван только приложенными внешними силами, то работа будет равна увеличению кинетической энергии. Действительно, согласно закону динамики

$$M = I \frac{d\omega}{dt}, \quad (43)$$

где угловая скорость $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$. Умножим обе части равенства (43) на $d\varphi$. В

результате $M \cdot d\varphi = I \frac{d\omega}{dt} \cdot \omega \cdot dt = I \cdot d\left(\frac{\omega^2}{2}\right)$. Используя (42), найдем работу

сил за время t :

$$A = I \int_0^t d\left(\frac{\omega^2}{2}\right) = \left(\frac{I\omega^2}{2}\right)_t - \left(\frac{I\omega^2}{2}\right)_0 = \Delta E. \quad (38)$$

В заключение приведем таблицу сравнительных аналогов поступательного и вращательного движений.

Движение материальной точки	Вращение твердого тела вокруг оси
Масса m	Момент инерции относительно оси
	I
Равнодействующая внешних сил \vec{F}	Сумма моментов внешних сил \vec{M}
Смещение $\Delta\vec{r}$	Угол поворота $\Delta\vec{\varphi}$
Линейная скорость \vec{v}	Угловая скорость $\vec{\omega}$
Линейное ускорение \vec{w}	Угловое ускорение $\vec{\beta}$
Импульс $\vec{P} = m\vec{v}$	Момент импульса относительно
	оси $\vec{L} = I\vec{\omega}$
Кинетическая энергия $E = \frac{mv^2}{2}$	Кинетическая энергия $E = \frac{I\omega^2}{2}$
Работа $A = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} d\vec{r}$	Работа $A = \int_{\varphi_0}^{\varphi_t} M \cdot d\varphi$
Второй закон динамики $\vec{F} = m\vec{w}$,	Закон динамики $\vec{M} = I\vec{\beta}$,
или $\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$	или $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

Лабораторная работа № Д-1

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ПОМОЩЬЮ ТРИФИЛЯРНОГО ПОДВЕСА

Теоретическая часть

Существуют различные методы определения моментов инерции твердых тел. В данной работе экспериментально находят моменты инерции тел, обладающих симметрией вращения относительно оси, проходящей через центр масс. Для твердых тел правильной геометрической формы моменты инерции можно относительно просто найти теоретическим расчетом. Для примера вычислим момент инерции сплошного однородного цилиндра относительно его геометрической оси.

Рассмотрим цилиндр радиусом R , массой m , высотой h , вращающийся вокруг оси z (рис.1.1). Согласно формуле (39), его момент инерции можно выразить как

$$I = \int_{(m)} l^2 dm, \quad (1.1)$$

где dm – масса выделенной бесконечно малой частицы цилиндра, l – расстояние частицы до оси вращения.

В соответствии с симметрией цилиндра удобно выделить частицу в виде бесконечно тонкого цилиндрического слоя толщиной dl с внутренним радиусом l и внешним $l+dl$. Тогда момент инерции цилиндра

$$I = \int_{(V)} \rho \cdot l^2 dV, \quad (1.2)$$

где ρ – плотность материала цилиндра, $dV = 2\pi h \cdot dl$ – объем цилиндрического слоя. Поскольку объем всего цилиндра $V = \pi R^2 h$, то плотность материала цилиндра $\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\pi R^2 h}$. Подставим значение плотности ρ и объема элементарного цилиндра dV в формулу (1.2):

$$I = \int_0^R \frac{m}{\pi R^2 h} l^2 2\pi h \cdot dl = \frac{2m}{R^2} \int_0^R l^3 dl. \quad (1.3)$$

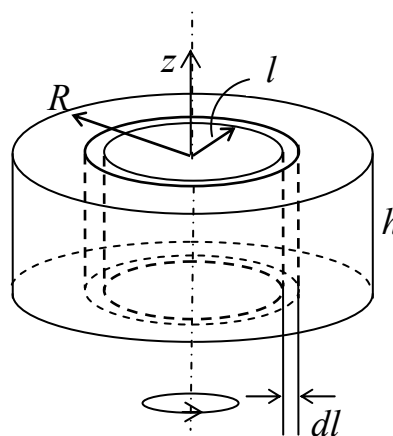


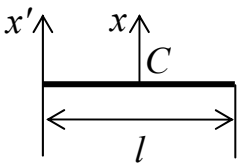
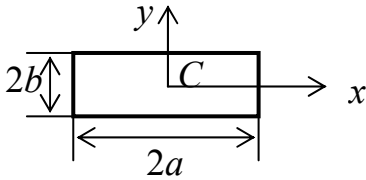
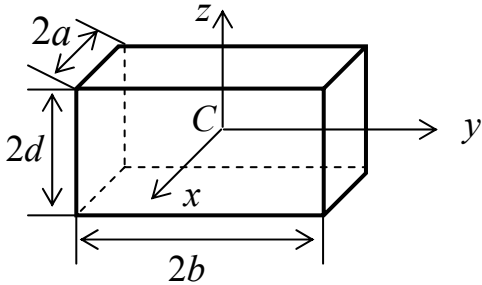
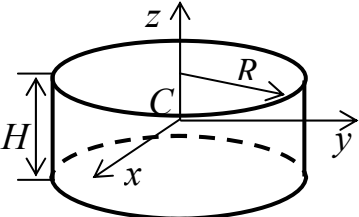
Рис.1.1. К определению момента инерции цилиндра

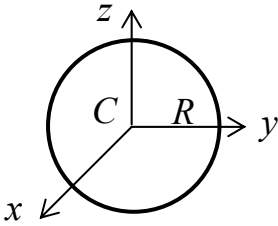
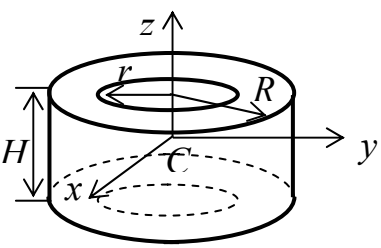
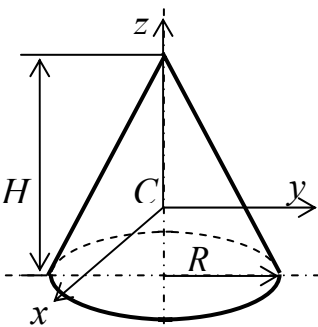
Вычислив интеграл и подставив пределы интегрирования, найдем момент инерции однородного сплошного цилиндра относительно оси z :

$$I = \frac{1}{2}mR^2. \quad (1.4)$$

Аналогичным образом можно найти моменты инерции шара, конуса, кольца и т. д. Сведения о моментах инерции различных однородных тел приведены в табл.1.1.

Таблица 1.1

Тело	Момент инерции
<p>Отрезок прямой</p> 	$I_x = \frac{1}{12}ml^2$ $I_{x'} = \frac{1}{3}ml^2$
<p>Прямоугольник</p> 	$I_x = \frac{1}{3}mb^2; \quad I_y = \frac{1}{3}ma^2$ $I_z = \frac{1}{4}m(a^2 + b^2)$
<p>Прямоугольный параллелепипед</p> 	$I_x = \frac{1}{3}m(b^2 + d^2)$ $I_y = \frac{1}{3}m(a^2 + d^2)$ $I_z = \frac{1}{3}m(a^2 + b^2)$
<p>Прямой круговой цилиндр</p> 	$I_x = I_y = \frac{1}{4}m\left(\frac{1}{3}H^2 + R^2\right)$ $I_z = \frac{1}{2}mR^2$

<p style="text-align: center;">Шар</p> 	$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5}mR^2$
<p style="text-align: center;">Кольцо</p> 	$I_x = I_y = \frac{1}{4}m(R^2 + r^2)$ $I_z = \frac{1}{2}m(R^2 + r^2)$
<p style="text-align: center;">Прямой круговой конус</p> 	$I_x = I_y = \frac{3}{20}m\left(\frac{1}{4}H^2 + R^2\right)$ $I_z = \frac{3}{10}mR^2$

Методика эксперимента

Одним из удобных методов экспериментального измерения моментов инерции твердых тел является метод трифилярного подвеса. Этот метод позволяет находить моменты инерции как однородных, так и неоднородных тел, имеющих правильную или неправильную геометрическую форму. Устройство такого подвеса показано на рис.1.2.

Подвижная круглая платформа D радиуса R подвешена к платформе D' , несколько меньшего радиуса r , на трех симметрично расположенных нитях AA' , BB' , CC' длиной l каждая. Платформа может

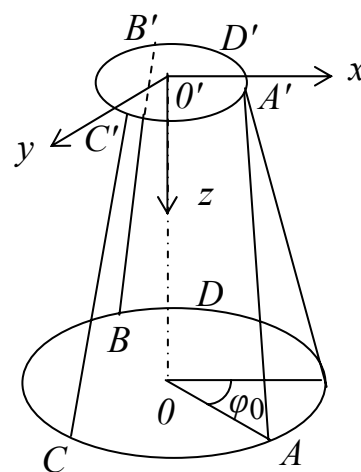


Рис.1.2. Трифилярный подвес

совершать крутильные колебания вокруг вертикальной оси OO' ; центр тяжести при этом перемещается по оси вращения. Период крутильных колебаний определяется величиной момента инерции платформы; он изменяется, если платформу нагрузить каким-либо телом, чем и пользуются в настоящей работе.

Если платформа массы m , вращаясь в одном направлении, поднялась на высоту h , то приращение потенциальной энергии будет равно

$$E_p = mgh, \quad (1.5)$$

где g – ускорение свободного падения. Вращаясь в другом направлении, платформа пройдет положение равновесия, в котором кинетическая энергия равна

$$E_k = \frac{1}{2}I\omega_0^2, \quad (1.6)$$

где I – момент инерции платформы, ω_0 – угловая скорость платформы при прохождении положения равновесия. Пренебрегая работой сил трения, на основании закона сохранения механической энергии, запишем

$$\frac{1}{2}I\omega_0^2 = mgh. \quad (1.7)$$

При более строгом анализе уравнения движения платформы можно доказать, что платформа совершает гармонические колебания, поэтому зависимость углового смещения платформы от времени запишем в виде

$$\varphi = \varphi_0 \sin \frac{2\pi}{T} t,$$

где φ – угловое смещение платформы от положения равновесия, φ_0 – амплитуда смещения (максимальное смещение от положения равновесия), T – период колебаний, t – текущее время. Угловая скорость ω , являющаяся первой производной φ по времени, равна

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{2\pi}{T} \varphi_0 \cos \frac{2\pi}{T} t. \quad (1.8)$$

Из этого уравнения видно, что в момент прохождения через положение равновесия ($t = 0, 1/2T, T, 3/2T$ и т. д.) угловая скорость максимальна и ее абсолютное значение равно

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \varphi_0. \quad (1.9)$$

На основании выражений (1.7) и (1.9) имеем

$$mgh = \frac{1}{2} I \left(\frac{2\pi}{T} \varphi_0 \right)^2. \quad (1.10)$$

Значение h найдем из условия нерастяжимости нитей AA' , BB' , CC' . Введем прямоугольную систему координат с началом в точке O' (рис.1.2). Ось x направим вдоль прямой $O'A'$, ось z – вниз вдоль прямой OO' , ось y – перпендикулярно к осям z и x . Пусть

$$AO = CO = BO = R, A'O' = C'O' = B'O' = r, AA' = BB' = CC' = l,$$

тогда координаты точки A' остаются все время постоянными и равными

$$x_{A'}^0 = r, y_{A'}^0 = 0, z_{A'}^0 = 0. \quad (1.11)$$

Координаты точки A в положении равновесия равны

$$x_A^0 = R, y_A^0 = 0, z_A^0 = l. \quad (1.12)$$

При повороте системы на угол φ_0 координаты той же точки становятся равными

$$x_A = R \cos \varphi_0, y_A = R \sin \varphi_0, z_A = l - h. \quad (1.13)$$

Условие постоянства длины нити AA' можно записать как

$$\begin{aligned} (x_A^0 - x_{A'})^2 + (y_A^0 - y_{A'})^2 + (z_A^0 - z_{A'})^2 = \\ = (x_A - x_{A'})^2 + (y_A - y_{A'})^2 + (z_A - z_{A'})^2. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Учитывая значения координат точки A (формулы (1.11) – (1.13)), выражение (1.14) можно записать в виде

$$(R - r)^2 + l^2 = (R \cos \varphi_0 - r)^2 + R^2 \sin^2 \varphi_0 + (l - h)^2. \quad (1.15)$$

Раскрывая скобки, получим

$$h^2 - 2hl + 2Rr(1 - \cos \varphi_0) = 0,$$

или

$$h(h - 2l) + 4Rr \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} = 0. \quad (1.16)$$

При малых колебаниях $\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \approx \frac{\varphi_0^2}{2}$, кроме того, $h \ll 2l$, следовательно $(h - 2l) \approx -2l$. В этом приближении $-2hl + Rr\varphi_0^2 = 0$, или

$$h = \frac{Rr}{2l} \varphi_0^2. \quad (1.17)$$

Подставим полученное значение h в уравнение (1.10):

$$mg = \frac{Rr}{2l} \varphi_0^2 = \frac{1}{2} I \frac{4\pi^2 \varphi_0^2}{T^2},$$

откуда получим

$$I = \frac{mgRr}{4\pi^2 l} T^2. \quad (1.18)$$

По формуле (1.18) можно определить момент инерции как самой платформы, так и тела, положенного на нее, т. к. все величины в правой части формулы могут быть непосредственно измерены.

Практическая часть работы

1. Сообщите платформе вращательный импульс, повернув платформу на небольшой угол ($5 \div 6^\circ$). При этом необходимо достигнуть полного отсутствия других колебаний. При помощи секундомера определите время N полных колебаний ($N = 20$). Вычислите период колебаний ненагруженной платформы. Измерения повторите $3 \div 4$ раза.

2. Вычислите по формуле (1.18) момент инерции ненагруженной платформы $I_{пл}$, используя среднее значение периода крутильных колебаний.

3. Помещая на платформу последовательно различные тела правильной геометрической формы (цилиндр, конус, кольцо), определите их моменты инерции. Для этого исследуемое тело положите на платформу так, чтобы его центр тяжести лежал на оси вращения системы. Определите период колебаний нагруженной платформы по методике п.1. По формуле (1.18) вычислите момент инерции системы I_c , принимая ее массу m равной сумме масс тела и платформы. Величину момента инерции тела найдите как

$$I_T = I_c - I_{пл}.$$

4. Измерив радиусы исследуемых тел, вычислите их моменты инерции по формулам (см. табл.1.1):

$$I_{\text{цилиндр}} = \frac{1}{2}mR^2; I_{\text{конус}} = \frac{3}{10}mR^2; I_{\text{кольцо}} = \frac{1}{2}m(R^2 + r^2).$$

Результат сравните с экспериментально полученными значения момента инерции.

5. Вычислите относительные и абсолютные ошибки полученных значений моментов инерции платформы и системы («платформа + тело») по формулам

$$\varepsilon_I = \sqrt{\varepsilon_m^2 + \varepsilon_R^2 + \varepsilon_r^2 + \varepsilon_l^2 + 4\varepsilon_T^2}, \Delta I = \varepsilon_I \cdot I \cdot 0,01. \quad (1.19)$$

Абсолютная и относительная ошибки полученных экспериментально значений моментов инерции тел равны

$$\Delta I = \sqrt{\Delta I_c^2 + \Delta I_{пл}^2}, \varepsilon_I = \frac{\Delta I}{I} \cdot 100\%. \quad (1.20)$$

Результаты измерений и вычислений занесите в таблицу 1.2.

Таблица 1.2

Тело	№ опыта	t_i (с)	Δt (с)	T (с)	ΔT (с)	ε_T (%)	I (кг·м ²)	ΔI (кг·м ²)	ε_I (%)
Пустая платформа	1								
	2								
	...								
		t_{cp}							
Конус	1								
	2								
	...								
		t_{cp}							
Кольцо	1								
	2								
	...								
		t_{cp}							
Цилиндр	1								
	2								
	...								
		t_{cp}							

Контрольные вопросы

1. Что такое момент инерции твердого тела? Каков физический смысл этой величины? В каких единицах измеряется?
2. Как вычислить момент инерции однородного твердого тела правильной геометрической формы? Получите формулы для вычисления момента инерции диска, цилиндра, кольца, однородного стержня.
3. Запишите закон сохранения энергии для платформы и поясните его.
4. При каких упрощающих предположениях выведена формула (1.18)?
5. Можно ли пользоваться предложенным методом определения моментов инерции тел в том случае, если ось вращения платформы не проходит через их центр масс?
6. Получите формулы (1.19) и (1.20) для вычисления ошибок.

Библиографический список

1. Иродов И. Е. Основные законы механики. М., «Высшая школа», 1985, с 150-152.
2. Стрелков С. П. Механика. М., «Наука», 1975, § 59.
3. Хайкин С. Э. Физические основы механики. Наука, 1971, § 89.
4. Сивухин Д. В. Общий курс физики, т.1, механика. М., «Наука», 1974, § 33.

Лабораторная работа № Д-2 ПРОВЕРКА ТЕОРЕМЫ ГЮЙГЕНСА-ШТЕЙНЕРА С ПОМОЩЬЮ ТРИФИЛЯРНОГО ПОДВЕСА

Методика эксперимента

В данной работе экспериментально проверяется справедливость теоремы Гюйгенса-Штейнера: *момент инерции тела относительно некоторой оси равен сумме момента инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс параллельно данной, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями, то есть*

$$I = I_0 + ma^2. \quad (2.1)$$

Эта теорема устанавливает простую связь между моментами инерции тела относительно параллельных осей, одна из которых проходит через центр масс.

Докажем теорему Гюйгенса-Штейнера. Пусть оси I и II (рис.2.1) параллельны, причем ось I проходит через центр масс C тела. Поместим начало координат в точку C , ось z совместим с осью I, а ось y направим так, чтобы она пересекала ось II. Выделим в теле произвольный элемент массой dm и опустим из него перпендикуляры на оси I и II, обозначив их соответственно l и l_1 . Тогда моменты инерции тела относительно каждой из этих осей будут равны

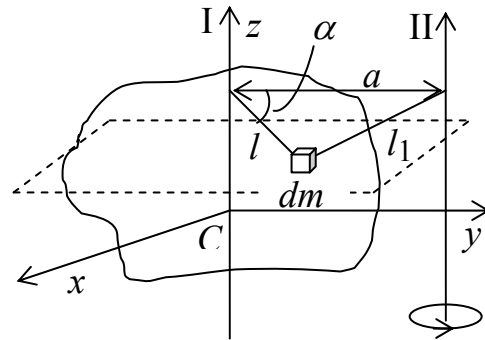


Рис.2.1. К доказательству теоремы Гюйгенса – Штейнера

$$I_0 = \int_{(m)} l^2 dm \quad \text{и} \quad I = \int_{(m)} l_1^2 dm. \quad (2.2)$$

По теореме косинусов найдем

$$l_1^2 = l^2 + a^2 = 2al \cos \alpha.$$

Учитывая, что $l \cos \alpha = y$, где y – координата элемента dm , получим

$$l_1^2 = l^2 + a^2 = 2ay. \quad (2.3)$$

Подставим (2.3) в формулу (2.2), определяющую момент инерции относительно оси II:

$$I = \int_{(m)} (l^2 + a^2 - 2ay) dm = \int_{(m)} l^2 dm + a^2 \int_{(m)} dm - 2a \int_{(m)} y dm. \quad (2.4)$$

В полученном выражении первый интеграл равен I_0 – моменту инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс, второй – массе тела m . Третий интеграл $\int y dm = 0$ в соответствии с формулами (23), определяющими положение центра масс. (В нашем случае координата центра масс совпадает с началом координат). Таким образом, получили

$$I = I_0 + ma^2,$$

что соответствует теореме (2.1).

Для проверки справедливости теоремы Гюйгенса-Штейнера в данной работе используется трифилярный подвес. Устройство трифилярного подвеса и вывод формулы

$$I = \frac{mgRr}{4\pi^2 l} T^2, \quad (2.6)$$

позволяющей вычислять его момент инерции см. в лабораторной работе № Д-1.

Практическая часть работы

1. Сообщите платформе вращательный импульс, повернув платформу на небольшой угол ($5 \div 6^\circ$). При этом необходимо достигнуть полного отсутствия других колебаний. При помощи секундомера определите время N полных колебаний ($N = 20$). Вычислите период колебаний ненагруженной платформы. Измерения повторите $3 \div 4$ раза.

2. Вычислите по формуле (2.6) момент инерции ненагруженной платформы $I_{нл}$, используя среднее значение периода крутильных колебаний.

3. Для проверки теоремы Гюйгенса-Штейнера возьмите два одинаковых тела и установите их друг на друга в центре платформы. Определите период колебаний нагруженной платформы. По формуле (2.6) вычислите момент инерции системы I_c , принимая ее массу m равной сумме масс тел и платформы. Тогда величина момента инерции I_0 одного тела относительно оси, проходящей через центр масс, будет равна

$$I_0 = \frac{1}{2}(I_c - I_{нл}).$$

4. Положите оба тела на платформу симметрично относительно оси вращения на максимально возможном расстоянии a от оси. Определите момент инерции тела I_T в этом случае по методике п.3.

5. Вычислите относительную и абсолютные ошибки полученных значений моментов инерции платформы и системы (платформа + тело) по формулам

$$\varepsilon_I = \sqrt{\varepsilon_m^2 + \varepsilon_R^2 + \varepsilon_r^2 + \varepsilon_l^2 + 4\varepsilon_T^2}, \Delta I = \varepsilon_I \cdot I \cdot 0,01. \quad (2.7)$$

Абсолютная и относительная ошибки полученного экспериментально значения момента инерции тела равны

$$\Delta I = \frac{1}{2} \sqrt{\Delta I_c^2 + \Delta I_{пл}^2}, \varepsilon_I = \frac{\Delta I}{I} \cdot 100\%. \quad (2.8)$$

6. Сравните найденное экспериментально в п.4 значение момента инерции тела I_T с величиной, вычисленной по теореме Гюйгенса-Штейнера

$$I = I_0 + ma^2,$$

где I_0 — момент инерции тела, полученный в п.3. Если это значение I_T попадает в интервал: $I_T - \Delta I_T \leq I_T \leq I_T + \Delta I_T$, то можно сделать вывод, что теорема Гюйгенса-Штейнера подтверждается экспериментально.

Результаты измерений и вычислений занесите в табл.2.1 и 2.2.

Таблица 2.1

Тело	№ опыта	t_i (с)	Δt (с)	T (с)	ΔT (с)	ε_T (%)	I (кг·м ²)	ΔI (кг·м ²)	ε_I (%)
Пустая платформа	1								
	2								
	...								
		t_{cp}							
Два тела в центре платформы	1								
	2								
	...								
		t_{cp}							
Два тела на расстоянии a от центра платформы	1								
	2								
	...								
		t_{cp}							

Таблица 2.2

Момент инерции тела в центре платформы, $I_0 \pm \Delta I_0$ (кг·м ²)	Момент инерции тела на расстоянии a от центра платформы, $I_T \pm \Delta I_T$ (кг·м ²)	a (м)	Момент инерции тела, вычисленный по теореме Гюйгенса-Штейнера (кг·м ²)

Контрольные вопросы

1. Что такое момент инерции твердого тела? Каков физический смысл этой величины? В каких единицах измеряется?
2. Сформулируйте и докажите теорему Гюйгенса-Штейнера.
3. Запишите закон сохранения энергии для платформы и поясните его.
4. При каких упрощающих предположениях выведена формула (2.6)?
5. Получите формулы для вычисления ошибок (2.7) и (2.8).

Библиографический список

1. Иродов И. Е. Основные законы механики. М., «Высшая школа», 1985, с 150-152.
2. Стрелков С. П. Механика. М., «Наука», 1975, § 59.
3. Хайкин С. Э. Физические основы механики. Наука, 1971, § 89.
4. Сивухин Д. В. Общий курс физики, т.1, механика. М., «Наука», 1974, § 33.

Лабораторная работа № Д-3 ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ И ПОСТОЯННОЙ МОМЕНТА УПРУГИХ СИЛ ИЗ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Методика эксперимента

Описание лабораторной установки. Лабораторная установка представляет собой крутильный баллистический маятник, общий вид которого приведен на рис.3.1.

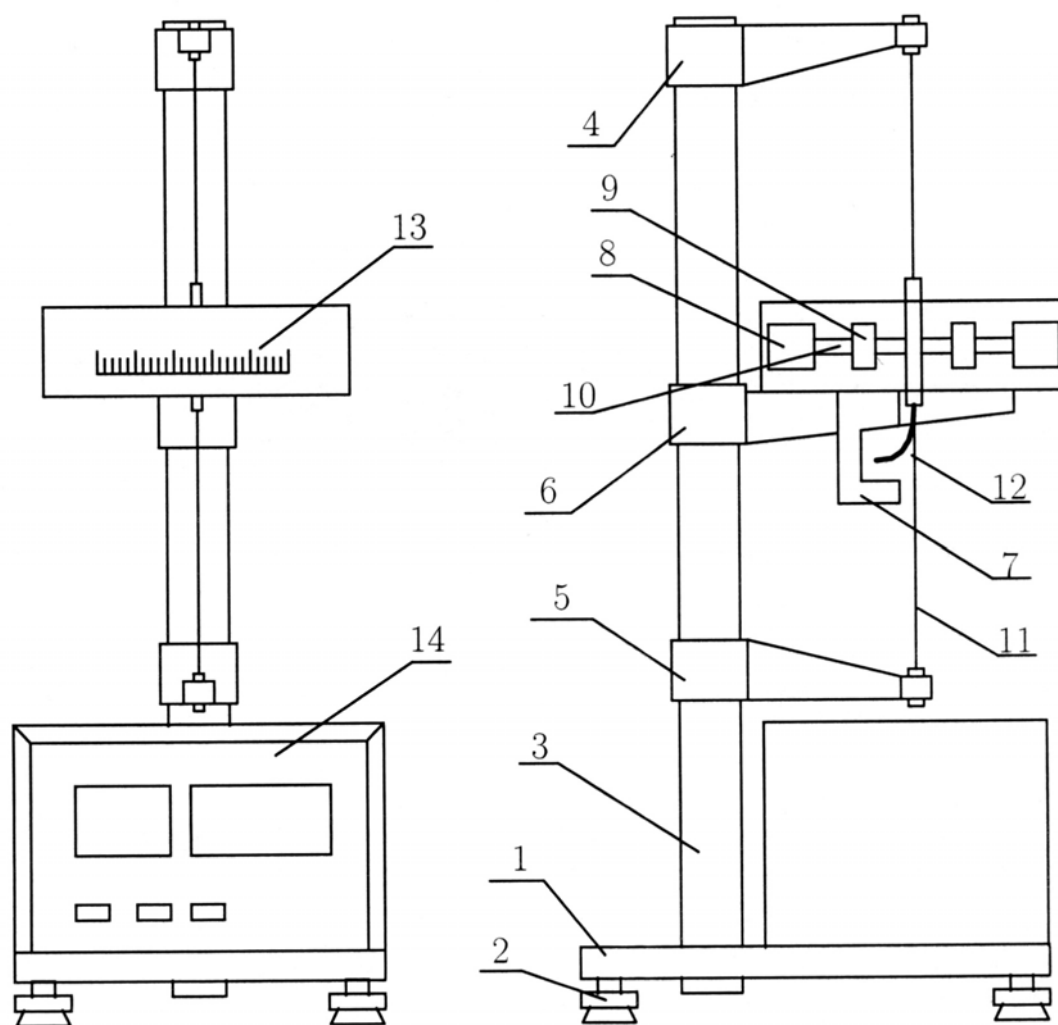


Рис.3.1. Крутильный баллистический маятник

Установка состоит из основания 1 с регулируемыми опорами 2, на которых жестко закреплены миллисекундомер 14 и вертикальная стойка 3.

На стойке расположены три кронштейна: нижний 5, средний 6 и верхний 4. К среднему кронштейну прикреплены экран с нанесенной на него угловой шкалой 13 и фотоэлектрический датчик 7. Кронштейны (5 и 4) имеют зажимы для крепления стальной проволоки 11, на которой подвешен маятник. Маятник состоит из двух стержней 10, двух перемещаемых цилиндров 9, грузов на концах стержней 8 и водилки 12. Миллисекундомер 14 соединен кабелем с фотодатчиком 7 и является самостоятельным прибором с цифровой индексацией времени и числа колебаний.

Определение периода крутильных колебаний. Если крутильный баллистический маятник вывести из положения равновесия, повернув его на малый угол ($<5^0$), то вследствие деформации стальной проволоки возникнут силы упругости. Момент этих сил M в пределах малых отклонений пропорционален углу отклонения маятника от положения равновесия φ и противоположен по знаку этому углу. Момент упругих сил стремится вернуть маятник в положение равновесия, а угол φ отсчитывается от положения равновесия, поэтому

$$M = -D\varphi, \quad (3.1)$$

где D – постоянная момента упругих сил. Закон (3.1) аналогичен закону Гука для деформации растяжения или сжатия.

Под действием вращающего момента M крутильный маятник начнет совершать колебательные движения. Для описания этого движения воспользуемся уравнением динамики, описывающим вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

$$I\vec{\beta} = \vec{M}, \quad (3.2)$$

где I – момент инерции маятника относительно оси вращения, $\vec{\beta}$ – вектор углового ускорения, \vec{M} – вектор момента упругих сил. Совместим ось z с осью вращения и спроектируем уравнение (3.2) на эту ось:

$$I\beta = M. \quad (3.3)$$

С учетом формулы (3.1) и соотношения $\beta = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ выражение (3.2) принимает вид

$$I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -D\varphi. \quad (3.4)$$

Поделив это уравнение на I , получим

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{D}{I}\varphi = 0. \quad (3.5)$$

Дифференциальное уравнение (3.5) описывает гармоническое колебание, поэтому его решением будет

$$\varphi = A \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (3.6)$$

где ω_0 – циклическая частота колебаний маятника, A – амплитуда колебаний (максимальное отклонение от положения равновесия), α – начальная фаза. Подставим решение (3.6) в уравнение (3.5). Для этого сначала найдем дифференцированием из (3.6)

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\alpha\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha) = -\omega_0^2 \varphi.$$

После подстановки полученного выражения в (3.5) имеем тождество

$$-\omega_0^2 \varphi + \frac{D}{I}\varphi = 0,$$

которое справедливо при равенстве $-\omega_0^2 = \frac{D}{I}$. Учитывая связь между циклической частотой ω_0 и периодом гармонических колебаний T , получаем формулу для определения периода крутильных колебаний:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D}}. \quad (3.7)$$

Определение момента инерции маятника и постоянной упругих сил. Если экспериментально определить период колебаний T , то по формуле (3.7) можно найти как момент инерции маятника I , так и постоянную момента упругих сил D . Пусть при некотором положении подвижных грузов

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I_1}{D}}. \quad (3.8)$$

Здесь I_1 – момент инерции системы, который можно представить в виде

$$I_1 = I_M + 2ml_1^2, \quad (3.9)$$

где I_M – момент инерции маятника без подвижных грузов, m – масса подвижного груза, l_1 – расстояние подвижного груза от оси вращения, $2ml_1^2$ – момент инерции грузов относительно оси вращения.

Если грузы передвинуть и установить на расстоянии l_2 от оси вращения, то момент инерции всей системы будет равен

$$I_2 = I_M + 2ml_2^2, \quad (3.10)$$

а период

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{I_2}{D}}. \quad (3.11)$$

На основании (3.8) – (3.11) имеем

$$T_1^2 = 4\pi^2 \frac{I_M + 2ml_1^2}{D}, \quad (3.12)$$

$$T_2^2 = 4\pi^2 \frac{I_M + 2ml_2^2}{D}. \quad (3.13)$$

Решая совместно (3.12) и (3.13), находим момент инерции маятника

$$I_M = \frac{2m(l_1^2 T_2^2 - l_2^2 T_1^2)}{T_1^2 - T_2^2} \quad (3.14)$$

и постоянную момента упругих сил

$$D = \frac{8\pi^2 m(l_1^2 - l_2^2)}{T_1^2 - T_2^2}. \quad (3.15)$$

Практическая часть работы

1. Ознакомьтесь с конструкцией прибора. Оба цилиндра 9 подвиньте вплотную к муфте. Измерьте расстояние l_1 между осью маятника и серединой одного из цилиндров.

2. Включите в сеть шнур питания миллисекундомера и нажмите кнопку «Сеть» на лицевой панели. При этом должны загореться цифровые индикаторы.

3. Поверните маятник на небольшой угол ($\leq 5^\circ$) и определите период колебаний T_1 , измерив время 20-ти полных колебаний маятника.

4. Увеличив момент инерции маятника (цилиндры 9 раздвинуты вдоль стержня на максимальное расстояние от оси вращения), измерьте l_2 и T_2 .

5. По формуле (3.14) вычислите момент инерции крутильного маятника I_M , используя средние значения T_{1cp} и T_{2cp} .

6. Оцените точность полученного результата, используя следующие соотношения:

$$\varepsilon_{I_M} = \sqrt{\varepsilon^2_{(l_1^2 T_2^2 - l_2^2 T_1^2)} + \varepsilon^2_{(T_2^2 - T_1^2)}} \cdot 100\%, \quad (3.16)$$

где

$$\varepsilon^2_{(l_1^2 T_2^2 - l_2^2 T_1^2)} = 4 \frac{(l_1 T_2^2 \Delta l_1)^2 + (l_2 T_1^2 \Delta l_2)^2 + (l_1^2 T_2 \Delta T_2)^2 + (l_2^2 T_1 \Delta T_1)^2}{l_1^2 T_2^2 - l_2^2 T_1^2}, \quad (3.17)$$

$$\varepsilon^2_{(T_2^2 - T_1^2)} = 4 \frac{(T_1 \Delta T_1)^2 + (T_2 \Delta T_2)^2}{T_1^2 - T_2^2}, \quad (3.18)$$

$$\Delta I_M = I_M \cdot \varepsilon_{I_M} \cdot 0,01. \quad (3.19)$$

Результаты измерений и вычислений запишите в табл 3.1 и 3.2..

Таблица 3.1

$l_1 \pm \Delta l_1 =$				$l_2 \pm \Delta l_2 =$					
№ опыта	t_{1i} (с)	T_1 (с)	ΔT_1 (с)	ε_{T_1} (%)	№ опыта	t_{2i} (с)	T_2 (с)	ΔT_2 (с)	ε_{T_2} (%)
1									
2									
3									
среднее					среднее				

Таблица 3.2

I_M (кг·м ²)	ΔI_M (кг·м ²)	ε_{I_M} (%)	$I_M \pm \Delta I_M$ (кг·м ²)

7. По формуле (3.15) вычислите постоянную момента упругих сил D .

8. Оцените точность полученного результата, используя формулы:

$$\varepsilon_D = 2 \cdot \sqrt{\frac{(T_1 \Delta T_1)^2 + (T_2 \Delta T_2)^2}{(T_1^2 - T_2^2)^2} + \frac{(l_1 \Delta l_1)^2 + (l_2 \Delta l_2)^2}{(l_1^2 - l_2^2)^2}} \cdot 100\%, \quad (3.20)$$

$$\Delta D = D \cdot \varepsilon_D \cdot 0,01. \quad (3.21)$$

Результаты измерений и вычислений запишите в табл. 3.3.

Таблица 3.3

D (Н·м)	ΔD (Н·м)	ε_D (%)	$D \pm \Delta D$ (Н·м)

Контрольные вопросы

1. Запишите уравнение вращательного движения маятника и поясните его.
2. Какие колебания совершает маятник, выведенный из положения равновесия? Запишите уравнение его колебаний.
3. Чему равен период колебаний маятника? Как можно изменить его период?
4. Как меняется момент инерции маятника при перемещении цилиндров?
5. Получите формулы (3.16) – (3.21) для вычисления ошибок.

Библиографический список

1. Иродов И. Е. Основные законы механики. М., «Высшая школа», 1985, с 148-152.
2. Стрелков С. П. Механика. М., «Наука», 1975, §§ 51, 52, 54, 59.
3. Хайкин С. Э. Физические основы механики. Наука, 1971, §§ 87-89.
4. Сивухин Д. В. Общий курс физики, т.1, механика. М., «Наука», 1974, §§ 35, 44.

Лабораторная работа № Д-4 ИЗУЧЕНИЕ ЗАКОНОВ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ МАЯТНИКА ОБЕРБЕКА

Описание экспериментальной установки

Законы вращательного движения можно экспериментально проверить с помощью маятника Обербека, общий вид которого представлен на рис.4.1.

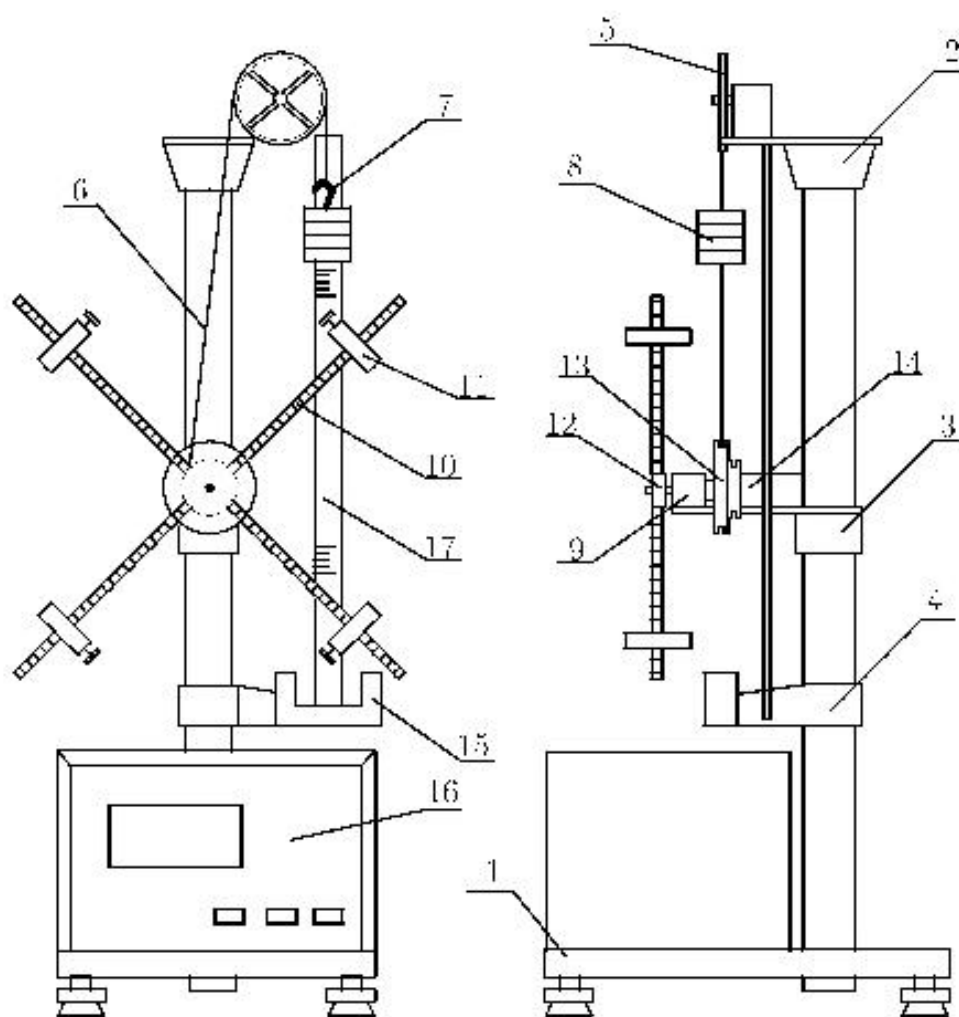


Рис.4.1. Маятник Обербека

Установка состоит из основания 1 с регулируемыми опорами. На основании жестко закреплены миллисекундомер 16 и вертикальная стойка. На стойке расположены три кронштейна: нижний 4, средний 3 и верхний 2. Положение всех кронштейнов на вертикальной стойке строго зафиксировано. На верхнем кронштейне крепится блок 5 для изменения направления движения нити 6, на которой подвешен крючок 7 с грузами 8. На среднем

кронштейне крепится электромагнит 14, который удерживает систему с грузами в неподвижном состоянии. На этом же кронштейне расположен узел подшипников 9, на оси которого с одной стороны закреплен двухступенчатый шкив 13. На шкиве имеется приспособление для закрепления нити. На другом конце оси находится крестовина 10, представляющая собой четыре металлических стержня с нанесенными на них рисками через каждые 10 мм. Стержни закреплены в бобышке 12 под прямым углом друг к другу. На каждом стержне могут свободно перемещаться и фиксироваться грузы 11, что позволяет менять момент инерции маятника.

На нижнем кронштейне крепится фотоэлектрический датчик 15, который подает электрический сигнал на миллисекундомер 16 для окончания счета промежутков времени. Маятник снабжен миллиметровой линейкой 17, по которой определяются начальное и конечное положения грузов и, следовательно, пройденный ими путь. Миллисекундомер соединен кабелем с фотоэлектрическим датчиком и является самостоятельным прибором с цифровой индексацией времени.

Методика эксперимента

Запишем основное уравнение вращательного движения в виде

$$I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M}, \quad (4.1)$$

где I – момент инерции системы, $\vec{\omega}$ – угловая скорость, \vec{M} – момент внешней силы. Так как векторы $\vec{\omega}$ и \vec{M} параллельны, можно перейти к скалярной форме:

$$I \frac{d\omega}{dt} = M; I\beta = M, \quad (4.2)$$

где β – угловое ускорение.

Момент силы, вызывающий вращение маятника, создается натяжением нити, навитой на один из шкивов установки. Момент силы можно менять, подвешивая к нити грузы различного веса или изменяя плечо силы, для чего нить закрепляется на шкивах разного диаметра. Если еще учесть силы трения, то уравнение вращательного движения для маятника примет вид

$$I\beta = M - M_{mp}, \quad (4.3)$$

где $M = RT$ – момент силы натяжения нити, T – сила натяжения нити, R – радиус шкива, на который намотана нить (плечо силы T), M_{mp} – момент сил трения.

Для определения силы натяжения нити T запишем уравнение движения падающего груза P массы m в проекции на ось y (рис.4.2):

$$mw = mg - T \rightarrow T = m(g - w), \quad (4.4)$$

где w – ускорение груза, определяемое формулой

$$w = \frac{2h}{t^2}. \quad (4.5)$$

Здесь h – расстояние, проходимое опускающимся грузом P за время t . Таким образом имеем систему уравнений

$$\begin{cases} I\beta = RT - M_{mp}, \\ T = m(g - w), \\ w = \frac{2h}{t^2}, \beta = \frac{w}{R}. \end{cases} \quad (4.6)$$

Справедливость полученных соотношений можно проверить различными способами.

Упражнение 1. Проверка основного уравнения вращательного движения, определение момента инерции системы и момента сил трения

Фиксируем грузы на стержнях и создаем различные вращательные моменты сил M , меняя массу груза m и плечо (радиус шкива R). При этом будем получать разные значения углового ускорения β . Согласно уравнению (4.3)

$$M = I\beta + M_{mp}. \quad (4.7)$$

В этом уравнении можно экспериментально найти вращающий момент

$$M = Rm \left(g - \frac{2h}{t^2} \right) \quad (4.8)$$

и угловое ускорение

$$\beta = \frac{2h}{Rt^2}. \quad (4.9)$$

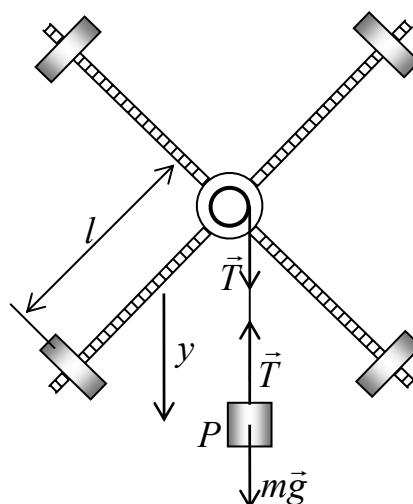


Рис.4.2. Силы, действующие в маятнике Обербека

Построив экспериментальную зависимость M от β , мы должны получить прямую. Это и будет подтверждением справедливости основного уравнения вращательного движения (ускорение прямо пропорционально моменту сил, действующему на тело). При этом предполагаем, что момент силы трения при проведении эксперимента не меняется.

Практическая часть

1. Укрепите грузы на стержнях маятника в самом ближайшем положении от оси маятника. Измерьте расстояние l_1 от середины каждого груза до оси вращения маятника. Убедитесь, что маятник находится в безразличном равновесии, т. е. при повороте маятника на 90^0 или 180^0 он должен оставаться неподвижным.

2. Измерьте по шкале прибора высоту h опускания груза на нити (в данной работе она постоянна) и радиусы R_1 и R_2 шкивов штангенциркулем ($R_1 > R_2$).

3. Вращая крестовину маятника, намотайте нить на один из шкивов, поднимая при этом грузы массой m в верхнее положение. Удерживая грузы в верхнем положении, нажмите на кнопку «Сеть», расположенную на лицевой стороне панели миллисекундомера. При этом должны загореться лампочка фотодатчика и цифровые индикаторы миллисекундомера, сработает электромагнит и зафиксирует крестовину в заданном положении.

4. Нажмите на кнопку «Сброс» для того, чтобы на индикаторах миллисекундомера установились нули.

5. Нажмите кнопку «Пуск» на миллисекундомере; маятник начинает раскручиваться. В момент пересечения маятником оптической оси фотодатчика счет времени прекращается, и миллисекундомер показывает время t , за которое маятник прошел расстояние h . Измерения повторите не менее $3 \div 4$ раз.

6. Усредните найденные значения времени t и по формулам (4.8) и (4.9) определите угловое ускорение β и вращательный момент M .

7. Повторите этот опыт для 3-х различных значений перегрузок как на шкиве радиусом R_1 , так и на шкиве радиусом R_2 .

8. Результаты экспериментов (на обоих шкивах) представьте в виде графика, по оси абсцисс которого отложите величину M , а по оси ординат - угловое ускорение β . Из графика определите момент сил трения $M_{тр}$ и момент инерции маятника I относительно оси вращения.

Момент сил трения находится при экстраполяции (продолжении) прямой до пересечения с осью абсцисс. Точка пересечения определяет момент силы трения, так как при угловом ускорении $\beta = 0$, момент силы трения $M_{mp} = M$.

Момент инерции $I = \frac{M - M_{mp}}{\beta}$, т. е. равен тангенсу угла наклона полученной прямой к оси ординат.

9. Оцените точность полученных значений M и β ; для экспериментальных точек графика укажите доверительные интервалы.

$$\varepsilon_M = \sqrt{\varepsilon_R^2 + 4 \frac{(\Delta h)^2 + (2h\varepsilon_t)^2}{(gt^2 - 2h)^2}} \cdot 100\%, \quad \Delta M = M \cdot \varepsilon_M \cdot 0,01. \quad (4.10)$$

$$\varepsilon_\beta = \sqrt{\varepsilon_h^2 + \varepsilon_R^2 + 4\varepsilon_t^2}, \quad \Delta\beta = \beta \cdot \varepsilon_\beta \cdot 0,01. \quad (4.11)$$

Результаты измерений и вычислений занесите в табл.4.1 и 4.2.

Таблица 4.1

№ опыта	$h \pm \Delta h =$			$R_1 \pm \Delta R_1 =$					
	$m_1 =$			$m_2 =$			$m_3 =$		
	t (с)	$\beta \pm \Delta\beta$ (1/с ²)	$M \pm \Delta M$ (Н·м)	t (с)	$\beta \pm \Delta\beta$ (1/с ²)	$M \pm \Delta M$ (Н·м)	t (с)	$\beta \pm \Delta\beta$ (1/с ²)	$M \pm \Delta M$ (Н·м)
1									
2									
3									
	t_{cp}			t_{cp}			t_{cp}		

Таблица 4.2

№ опыта	$h \pm \Delta h =$			$R_2 \pm \Delta R_2 =$					
	$m_1 =$			$m_2 =$			$m_3 =$		
	t (с)	$\beta \pm \Delta\beta$ (1/с ²)	$M \pm \Delta M$ (Н·м)	t (с)	$\beta \pm \Delta\beta$ (1/с ²)	$M \pm \Delta M$ (Н·м)	t (с)	$\beta \pm \Delta\beta$ (1/с ²)	$M \pm \Delta M$ (Н·м)
1									
2									
3									
	t_{cp}			t_{cp}			t_{cp}		

Упражнение 2. Проверка основного уравнения вращательного движения.

Оставляем постоянными массу груза на нити m и шкив, на который наматывается нить. Меняем момент инерции системы I , перемещая грузы на стержнях. Если грузы находятся на расстоянии l_1 от оси вращения, то момент инерции маятника равен

$$I_1 = I_0 + I'_0 + 4m'l_1^2. \quad (4.12)$$

Если расстояние равно l_2 , то

$$I_2 = I_0 + I'_0 + 4m'l_2^2, \quad (4.13)$$

где I_0 – момент инерции маятника без грузов; I'_0 – момент инерции всех четырех грузов (массой m' каждый) относительно оси, проходящей через их центр масс; $I'_0 + 4m'l_2^2$ – момент инерции грузов, находящихся на расстоянии l от оси вращения (в соответствии с теоремой Гюйгенса-Штейнера).

При перемещении грузов по стержням момент инерции маятника меняется на величину, равную

$$I_1 - I_2 = 4m'(l_1^2 - l_2^2). \quad (4.14)$$

С другой стороны, из уравнения (4.3) получим

$$I_1 - I_2 = \frac{M_1 - M_{mp}}{\beta_1} = \frac{M_2 - M_{mp}}{\beta_2}, \quad (4.15)$$

где β_1 – угловое ускорение маятника, когда его момент инерции равен I_1 ; β_2 – угловое ускорение маятника, когда его момент инерции равен I_2 . Из уравнений (4.14) и (4.15) следует, что

$$\frac{M_1 - M_{mp}}{\beta_1} - \frac{M_2 - M_{mp}}{\beta_2} = 4m'(l_1^2 - l_2^2). \quad (4.16)$$

Для удобства обозначим левую часть уравнения (4.16) буквой A , т. е.

$$A = \frac{M_1 - M_{mp}}{\beta_1} - \frac{M_2 - M_{mp}}{\beta_2}, \quad (4.17)$$

правую – буквой B . Тогда

$$B = 4m'(l_1^2 - l_2^2). \quad (4.18)$$

Так как уравнение (4.16) получено из уравнения (4.3), то равенство $A = B$ должно экспериментально подтвердить справедливость основного уравнения вращательного движения (4.3).

Практическая часть

1. Укрепите грузы на стержнях маятника в самом ближайшем положении от оси маятника. Измерьте расстояние l_1 от середины каждого груза до оси вращения маятника. Убедитесь, что маятник находится в безразличном равновесии, т. е. при повороте маятника на 90^0 или 180^0 он должен оставаться неподвижным.

2. Измерьте по шкале прибора высоту h опускания груза на нити (в данной работе она постоянна) и радиус R шкива штангенциркулем (большой шкив).

3. Укрепив на нити груз максимальной массы, найдите время опускания груза по методике **Упражнения 1**. Опыт повторите $3 \div 4$ раза. Усредните найденные значения времени t и по формулам (4.8) и (4.9) определите угловое ускорение β и вращательный момент M . По формулам (4.10) и (4.11) оцените погрешности.

4. Укрепите грузы на стержнях маятника в самом дальнем положении от оси маятника. Измерьте расстояние l_2 от середины каждого груза до оси вращения маятника. Убедитесь, что маятник находится в безразличном равновесии, т. е. при повороте маятника на 90^0 или 180^0 он должен оставаться неподвижным. Повторите измерения, описанные в пп. 2 и 3.

5. Взяв данные опыта для двух различных положений грузов на стержнях (l_1 и l_2), но при одинаковых массах грузов и одном и том же шкиве (одинаковые R и m), вычислите по формулам (4.17) и (4.18) величины A и B . Значение M_{mp} возьмите из **Упражнения 1**.

6. Оцените точность полученных значений A и B по формулам

$$\Delta A = \sqrt{\frac{(\Delta M_1)^2}{\beta_1^2} + \frac{(\Delta M_2)^2}{\beta_2^2} + \left(\frac{M_1 - M_{mp}}{\beta_1^2}\right) \Delta \beta_1^2 + \left(\frac{M_2 - M_{mp}}{\beta_2^2}\right) \Delta \beta_2^2},$$

$$\varepsilon_A = \frac{\Delta A}{A} \cdot 100\%, \quad (4.19)$$

$$\varepsilon_B = 2 \sqrt{\frac{(l_1 \Delta l_1)^2 + (l_2 \Delta l_2)^2}{(l_1^2 - l_2^2)^2}} \cdot 100\%, \quad \Delta B = B \cdot \varepsilon_B \cdot 0,01. \quad (4.20)$$

В этих формулах ошибки моментов сил M и угловых ускорений β определяются по формулам (4.10), (4.11) соответственно.

7. Убедитесь, что равенство $A = B$ экспериментально подтверждает (в пределах точности измерений) справедливость основного уравнения вращательного движения (4.3). Результаты измерений и вычислений занесите в табл. 4.3 и 4.4.

Таблица 4.3

$h \pm \Delta h =$		$R \pm \Delta R =$		$m =$		$M_{mp} =$		$m' =$	
l_1 м	№ опыта	t_{1i} (с)	Δt_{1i} (с)	S_{t1} (с)	Δt_1 (с)	ε_{t1} (%)	β_1 (с ⁻²)	$\Delta \beta_1$ (с ⁻²)	$\varepsilon_{\beta 1}$ (%)
	1								
	2								
	3								
		t_{1cp}							
l_2 м	№ опыта	t_{2i} (с)	Δt_{2i} (с)	S_{t2} (с)	Δt_2 (с)	ε_{t2} (%)	β_2 (с ⁻²)	$\Delta \beta_2$ (с ⁻²)	$\varepsilon_{\beta 2}$ (%)
	1								
	2								
	3								
		t_{2cp}							

Таблица 4.4

M_1 (Н·м)	ΔM_1 (Н·м)	M_2 (Н·м)	ΔM_2 (Н·м)	$A \pm \Delta A$ (кг·м ²)	ε_A (%)	$B \pm \Delta B$ (кг·м ²)	ε_B (%)

Контрольные вопросы

1. Выведите основное уравнение вращательного движения твердого тела.
2. Укажите все силы, моменты которых создают угловое ускорение маятника Обербека, и направления моментов этих сил.

3. Запишите уравнения вращательного движения маятника и поступательного движения груза; поясните эти уравнения.
4. Как можно изменить момент силы натяжения в системе?
5. Как можно изменить момент инерции в системе?
6. Получите формулы для вычисления ошибок.

Библиографический список

1. Иродов И. Е. Основные законы механики. М., «Высшая школа», 1985, с 148-152
2. Стрелков С. П. Механика. М., «Наука», 1975, §§ 51, 52, 54, 59.
3. Хайкин С. Э. Физические основы механики. Наука, 1971, §§ 87-89.
4. Сивухин Д. В. Общий курс физики, т.1, механика. М., «Наука», 1974, §§ 35, 44

Лабораторная работа № Д-5 МАЯТНИК МАКСВЕЛЛА

Описание экспериментальной установки

Ознакомиться со сложным движением твердого тела можно с помощью маятника Максвелла. Общий вид маятника Максвелла представлен на рис.5.1.

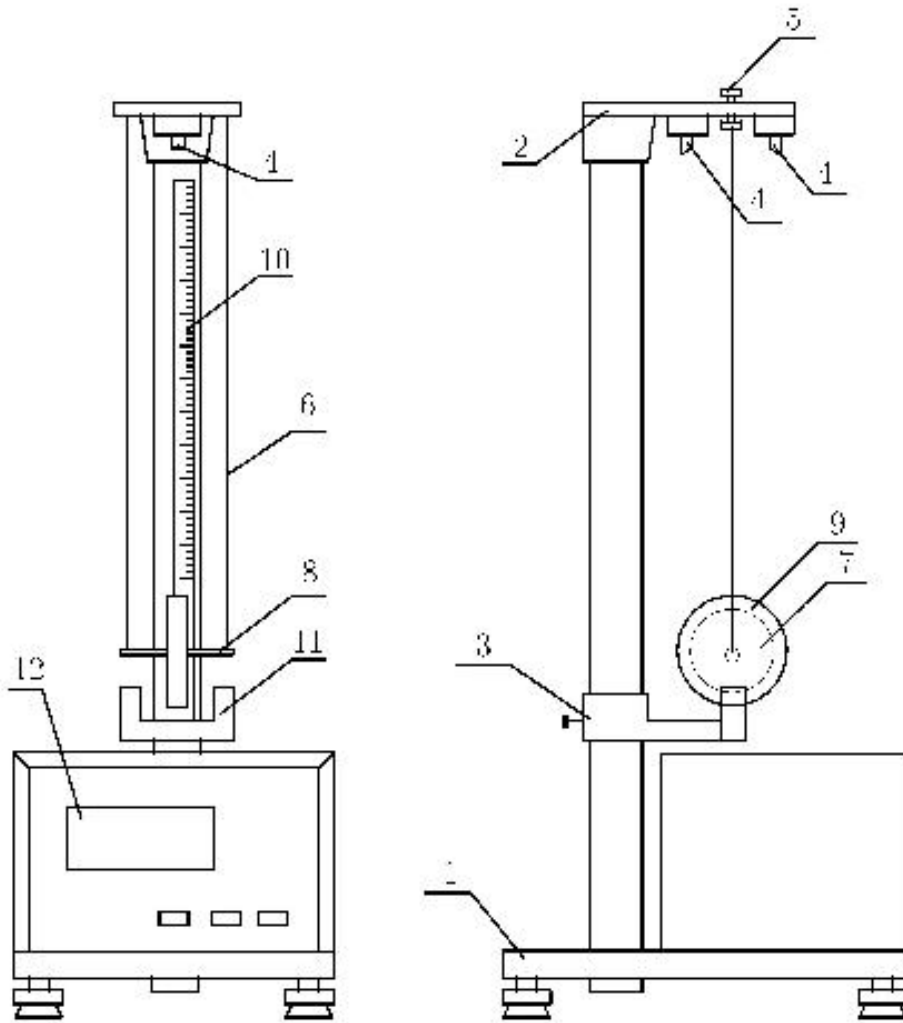


Рис.5.1. Маятник Максвелла

Установка состоит из основания 1 с регулируемыми опорами. На основании жестко закреплены миллисекундомер 12 и вертикальная стойка. На стойке расположены два кронштейна: нижний 3 и верхний 2. Верхний кронштейн 2 снабжен электромагнитами 4 и устройством 5 для крепления и регулировки бифилярного подвеса 6.

Маятник Максвелла представляет собой однородный металлический диск 7, закрепленный на оси, в середине которой укреплен металлический

стержень 8. К концу этого стержня прикреплены две крепкие нити, другие концы закреплены на верхнем кронштейне. Нити тщательно, виток к витку, наматываются на стержень. На диске крепится кольцо 9. Маятник Максвелла фиксируется в верхнем положении с помощью электромагнита. На нижнем кронштейне 3 укреплен фотоэлектрический датчик 11, который выдает электрический сигнал окончания счета времени равноускоренного движения маятника. На корпусе кронштейна 3 имеется риска, указывающая положение оптической оси фотодатчика. Этот кронштейн может свободно перемещаться по вертикальной стойке и фиксироваться на ней в любом возможном положении. На стойке укреплена миллиметровая линейка 10, по которой определяют начальное и конечное положения опускающегося маятника, и, следовательно, путь h , пройденный этим маятником. Начальное положение определяется визуально по нижнему срезу диска, конечное положение — по индексу нижнего кронштейна. Миллисекундомер 12 соединен кабелем с фотодатчиком 11 и является самостоятельным прибором с цифровой индексацией времени.

При освобождении маятника он начинает сложное движение: поступательное вниз и вращательное вокруг своей оси симметрии. Вращение, продолжаясь по инерции в низшей точке движения (когда нити уже размотаны), приводит вновь к наматыванию нитей на стержень, а следовательно, и к подъему маятника. Движение маятника после этого замедляется, маятник останавливается в верхней точке и снова начинает свое движение вниз и т.д.

Методика эксперимента

Рассмотрим силы, действующие на маятник, и опишем движение маятника на основе законов динамики твердого тела. На маятник действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и силы натяжения нити \vec{T} (см. рис.5.2). Уравнение движения маятника без учета сил трения имеют вид

$$\begin{cases} m\vec{w} = m\vec{g} + 2\vec{T}, \\ I\vec{\beta} = 2\vec{M}_T, \end{cases} \quad (5.1)$$

где m – масса маятника, I – момент инерции маятника, \vec{T} – натяжение нитей, \vec{M}_T – момент натяжения нитей, \vec{w} – ускорение поступательного движения центра масс маятника, $\vec{\beta}$ – угловое ускорение маятника.

Первое уравнение в системе (5.1) описывает поступательное движение центра масс (оси), а второе уравнение – вращательное движение маятника

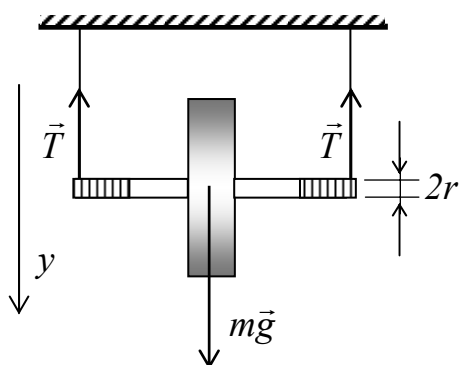


Рис.5.2. Силы, действующие в маятнике Максвелла

относительно оси. Расположим вертикальную ось координат y , как показано на рис.5.2. Тогда система (5.1) в проекции на эту ось будет иметь вид

$$\begin{cases} mw = mg - 2T, \\ I\beta = 2Tr, \end{cases} \quad (5.2)$$

где r – радиус стержня. Так как нити плотно намотаны на стержень, и проскальзывания нитей по стержню нет, то систему уравнений (5.2) можно дополнить связью между линейным и угловым ускорениями $w = \beta r$, где

$$w = \frac{2h}{t^2}, \quad (5.3)$$

а h – высота, на которую опускается маятник за время t .

Из системы уравнений (5.2) получим формулы для силы натяжения нитей и момента инерции маятника:

$$T = \frac{m}{2}(g - w), \quad (5.4)$$

$$I = mr^2 \left(\frac{g}{w} - 1 \right). \quad (5.5)$$

Практическая часть

1. Нажмите на кнопку «Сеть», расположенную на лицевой стороне панели миллисекундомера. При этом должны загореться лампочка фотодатчика и цифровые индикаторы миллисекундомера.

2. Вращая маятник, зафиксируйте его в верхнем положении при помощи электромагнита. При этом необходимо следить, чтобы нить наматывалась на ось виток к витку.

3. Нажмите на кнопку «Сброс» для того, чтобы на индикаторах миллисекундомера установились нули.

4. Нажмите кнопку «Пуск» на миллисекундомере, маятник начинает раскручиваться. В момент пересечения маятником оптической оси фотодатчика счет времени прекращается, и миллисекундомер показывает время t , за которое маятник прошел расстояние h . Измерения повторите не менее 5 раз.

5. По формуле (5.3) вычислите ускорение w центра масс маятника по среднему значению времени, а по формулам (5.4) и (5.5) определите силу натяжения нити T и момент инерции маятника I , используя значение ускорения w .

6. Вычислите абсолютную и относительную ошибки полученных значений T и I , используя приведенные ниже формулы. Результаты измерений и вычислений запишите в табл. 5.1 и 5.2.

$$\varepsilon_w = \sqrt{\varepsilon_h^2 + 4\varepsilon_t^2}; \Delta w = w \cdot \varepsilon_w \cdot 0,01.$$

$$\Delta T = \frac{m}{2} \Delta w; \varepsilon_T = \frac{\Delta T}{T} \cdot 100\%.$$

$$\varepsilon_I = \sqrt{4\varepsilon_r^2 + \left(\frac{g}{g-w}\right)^2} \cdot \varepsilon_w^2; \Delta I = I \cdot \varepsilon_I \cdot 0,01.$$

Таблица 5.1

№ опыта	h (м)	t_i (с)	Δt_i (с)	Δt_i^2 (с ²)	Δt (с)	ε_t (%)	w (м/с ²)	Δw (м/с ²)	ε_w (%)	$w \pm \Delta w$ (м/с ²)
1										
2										
3										
4										
5										
		t_{cp}		$\sum \Delta t_i^2$						

Таблица 5.2

T (Н)	ΔT (Н)	ε_T (%)	$T \pm \Delta T$ (Н)	I (кг·м ²)	ΔI (кг·м ²)	ε_I (%)	$I \pm \Delta I$ (кг·м ²)

Контрольные вопросы

1. Запишите уравнения динамики, описывающие движение маятника Максвелла. Поясните записанные уравнения.

2. В каком случае будет существовать простая связь между линейным ускорением поступательного движения центра масс и угловым ускорением вращения: $w = \beta r$?

3. От чего зависит момент инерции маятника Максвелла?
4. Как необходимо изменить параметры маятника Максвелла, чтобы повысить точность измерений?
5. Выведите формулы для вычислений абсолютной и относительной ошибок ускорения w , силы натяжения нити T и момента инерции I .

Библиографический список

1. Иродов И. Е. Основные законы механики. М., «Высшая школа», 1985, § 5.4.
2. Стрелков С. П. Механика. М., «Наука», 1975, § § 50, 58.
3. Хайкин С. Э. Физические основы механики. Наука, 1971, § 94.
4. Сивухин Д. В. Общий курс физики, т.1, Механика. М., «Наука», 1974, §§ 44 - 48.

Лабораторная работа № Д-6 ИЗУЧЕНИЕ ЗАКОНОВ ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ПО НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ

Методика эксперимента

В данной работе изучается сложное движение твердого тела по наклонной плоскости и определяются коэффициенты трения покоя, скольжения и качения. Экспериментальная установка показана на рис.6.1.

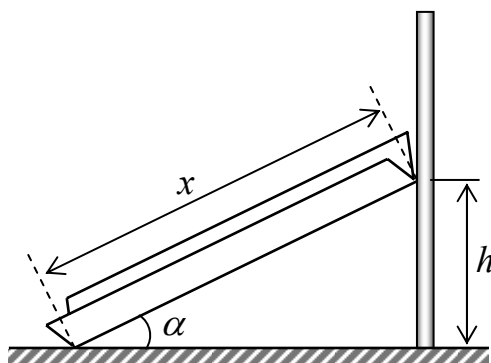


Рис.6.1. Наклонный желоб

Основной частью является металлический желоб прямоугольного сечения, внутренняя поверхность которого покрыта мягкой, легко деформируемой тканью. Желоб может быть поставлен под любым углом α к горизонту. В качестве твердого тела взят стальной шарик.

Рассмотрим движение шарика по прямоугольному желобу, образующему угол α с горизонтом (рис.6.2а). На шарик действуют три силы: сила тяготения $m\vec{g}$, сила реакции опоры \vec{N} и сила трения $\vec{F}_{тр}$. Движение шарика можно описать следующими уравнениями: поступательного движения центра масс

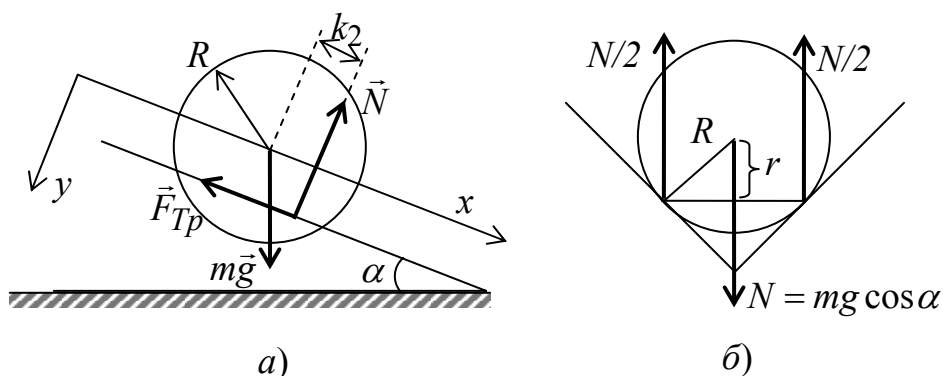


Рис.6.2. Силы, действующие на шарик,
катящийся по наклонному желобу

$$m\vec{w} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{mp} \quad (6.1)$$

и вращательного движения относительно геометрической оси шарика (уравнением моментов)

$$I\vec{\beta} = \vec{M}_{mp} + \vec{M}_N + \vec{M}_{F_{mp}}. \quad (6.2)$$

Выберем оси координат, как показано на рис.6.2а и спроектируем уравнения (6.1) и (6.2) на координатные оси. Получим систему уравнений

$$\begin{cases} mw = mg \sin \alpha - F_{mp}, \\ 0 = mg \cos \alpha - N, \\ I\beta = F_{mp}r - M_N, \end{cases} \quad (6.3)$$

где m – масса шарика, $r = R\sqrt{\frac{1}{2}}$ (см. рис.6.2б), R – радиус шарика, $I = \frac{2}{5}mR^2$ – момент инерции шарика, w – ускорение поступательного движения центра масс шарика, β – угловое ускорение шарика.

Характер движения твердого тела по наклонной плоскости существенно зависит от сил трения, которые при этом возникают. Если шарик катится без скольжения, т. е. относительная скорость точек шарика, соприкасающихся с поверхностью плоскости, равна нулю, то возникает сила трения покоя. Величина этой силы определяется законом Кулона

$$F_{mp} \leq kN, \quad (6.4)$$

где k – коэффициент трения покоя, N – сила нормального давления.

Если шарик катится со скольжением, т. е. относительная скорость точек шарика, соприкасающихся с поверхностью, не равна нулю, то появляется сила трения скольжения, определяемая равенством

$$F_{1mp} = k_1N, \quad (6.5)$$

где k_1 – коэффициент трения скольжения. Сила трения скольжения зависит от материала тел и состояния поверхности, но, кроме того, она зависит от скорости скольжения (относительной скорости тел).

Характер зависимости силы трения скольжения от скорости для разных тел и разной обработки поверхностей различен, но для однородных материалов сила трения скольжения нередко вначале падает с увеличением скорости, а затем возрастает. Зависимость силы трения от скорости изо-

бражена на рис.6.3. Эта характеристика силы трения скольжения передает также и особенности силы трения покоя. При относительной скорости, равной нулю, сила трения покоя может иметь любое значение, не превосходящее F_{max} . Этому соответствует вертикальный участок характеристики, совпадающий с осью ординат.

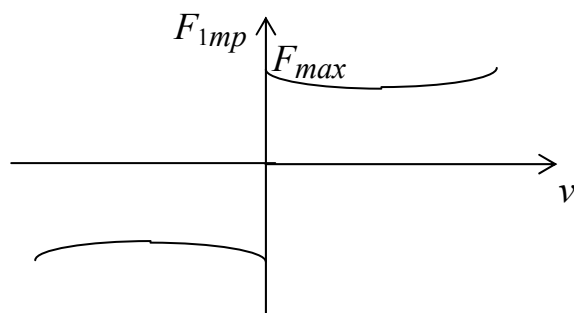


Рис.6.3. Зависимость силы трения скольжения от скорости

При качении шарика без скольжения может появиться сила трения качения. При качении шарик и плоскость деформируются под действием силы, прижимающей шарик к плоскости. Если эти деформации упруги, то силы взаимодействия между шариком и плоскостью будут совершенно симметричны относительно вертикальной плоскости pq , проходящей через ось шарика; каждой силе f соответствует равная сила f' (рис.6.4а). Результирующая всех сил упругой деформации поверхности качения (реакция опоры \vec{N}) будет вертикально проходить через центр масс шарика, и момент этой силы относительно оси шарика будет равен нулю. Поэтому силы упругих деформаций шарика и плоскости при качении не влияют на скорость шарика, и движение будет происходить так, как будто никаких деформаций нет. Никаких сил трения качения в этом случае не возникает. Поэтому для объяснения сил трения качения следует считать деформации шарика и плоскости качения неупругими. При этом не важно, что дефор-

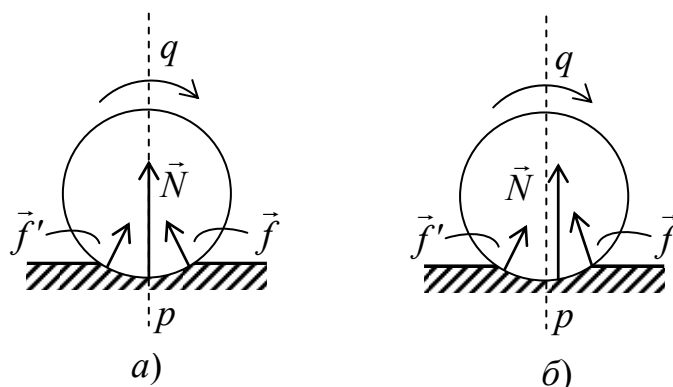


Рис.6.4. Упругие (а) и неупругие (б) деформации шарика

мируется, шарик или плоскость, или то и другое вместе. Предположим, что шарик не деформируется, а поверхность качения имеет остаточные деформации. Тогда силы, действующие со стороны плоскости на шарик, уже не будут симметричны относительно вертикальной плоскости pq (рис.6.4б). Поэтому равнодействующая этих сил \vec{N} не пройдет через центр масс шарика и будет смещена вперед по движению. Момент этой силы относительно оси шарика не равен нулю, причем он противоположен направлению вращения. Этот момент называется моментом силы трения качения и может быть записан в виде

$$M = k_2 N, \quad (6.6)$$

где k_2 – коэффициент момента сил трения качения. Он существенно отличается от коэффициентов k и k_1 , так как является размерной величиной и, по существу, характеризует плечо силы реакции опоры относительно оси шарика (рис.6.2а). Учитывая соотношение (6.6), уравнения движения (6.3) можно переписать в виде

$$\begin{cases} mw = mg \sin \alpha - F_{mp}, \\ 0 = mg \cos \alpha - N, \\ I\beta = F_{mp}r - k_2 N, \end{cases} \quad (6.7)$$

Рассмотрим три возможных случая движения шарика по наклонной плоскости, для каждого из которых сформулируем экспериментальные задачи по определению коэффициентов сил трения k , k_1 и k_2 .

1. При маленьких углах наклона (α_1) желоба к горизонту шарик будет в состоянии покоя. В этом случае (6.7) дадут следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 0 = mg \sin \alpha_1 - F_{mp}, \\ 0 = mg \cos \alpha_1 - N, \\ I\beta = F_{mp}r - k_2 N, \end{cases} \quad (6.8)$$

где F_{mp} – сила трения покоя, r – плечо силы F_{mp} . Из (6.8) находим

$$k_2 = rtg\alpha_1, \quad (6.9)$$

где α_1 – наибольший угол, при котором шарик еще не начинает скатываться. Если найти α_1 (см. ниже), то уравнение (6.9) позволяет определить коэффициент трения качения k_2 для этого угла.

2. При увеличении угла наклона желоба начинается качение шарика без скольжения (при $\alpha > \alpha_1$), и система уравнений (6.7) запишется в виде

$$\begin{cases} mw = mg \sin \alpha - F_{mp}, \\ 0 = mg \cos \alpha - N, \\ I\beta = F_{mp}r - k_2N, \\ w = r\beta, \end{cases} \quad (6.10)$$

где F_{mp} – сила трения покоя, так как скольжения нет, и скорость точек шарика, касающихся поверхности, равна нулю. Из (6.10), учитывая, что $R^2 = 2r^2$, получим

$$F_{mp} = \frac{1}{9}mg \left(4 \sin \alpha + 5 \frac{k_2}{r} \cos \alpha \right), \quad (6.11)$$

$$w = \frac{5}{9}g \left(\sin \alpha - \frac{k_2}{r} \cos \alpha \right). \quad (6.12)$$

Так как по закону Кулона $F_{тр} \leq kmg \cos \alpha$, то уравнение (6.11) можно записать для наибольшего значения угла $\alpha > \alpha_2$, при котором еще возможно движение без скольжения, в виде

$$F_{mp} = kmg \cos \alpha_2 = \frac{1}{9}mg \left(4 \sin \alpha_2 + 5 \frac{k_2}{r} \cos \alpha_2 \right). \quad (6.13)$$

Отсюда получим

$$k = \frac{4}{9} \operatorname{tg} \alpha_2 + \frac{5}{9} \frac{k_2}{r}. \quad (6.14)$$

Если найти α_2 и k_2 , то уравнение (6.14) позволяет вычислить коэффициент трения покоя k .

Из уравнения (6.12) видно, что центр масс шарика движется равноускоренно. Так как его начальная скорость равна нулю, ускорение центра масс шарика равно

$$w = \frac{2x}{t^2}, \quad (6.15)$$

где x – расстояние, проходимое шариком за время t . Уравнения (6.12) и (6.15) дают

$$k_2 = \frac{9r}{5g} \left(\frac{5}{9} g \sin \alpha - \frac{2x}{t^2} \right) \frac{1}{\cos \alpha}, \quad (6.16)$$

где $\frac{5}{9} g \sin \alpha = j$ – ускорение движения центра масс шарика без учета сил трения качения. Следовательно, формулу (6.16) можно переписать в виде

$$k_2 = \frac{9r}{5g} (j - w) \frac{1}{\cos \alpha}. \quad (6.17)$$

Это уравнение позволяет определить коэффициент трения качения k_2 для углов $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$. В предельном случае, когда ускорение $w = 0$, а угол $\alpha = \alpha_1$, уравнение (6.17) приводит к уравнению (6.9).

3. При углах наклона $\alpha < \alpha_2$ движение шарика можно приближенно считать чистым скольжением. Уравнение движения центра масс шарика в этом случае имеет вид

$$\begin{cases} mw = mg \sin \alpha - F_{mp}, \\ 0 = mg \cos \alpha - N, \\ F_{mp} = k_1 N. \end{cases} \quad (6.18)$$

Решая эту систему относительно коэффициента k_1 , получаем формулу:

$$k_1 = \operatorname{tg} \alpha_1 - \frac{w}{g \cos \alpha}. \quad (6.19)$$

Уравнение (6.19) позволяет определить коэффициент трения скольжения k_1 для углов $\alpha < \alpha_2$.

Практическая часть

1. Меняя угол наклона желоба к горизонту, измерьте для каждого положения время движения шарика. Время движения следует измерить не менее трех раз и взять из них среднее значение. По формуле (6.15) вычислите для всех углов наклона желоба величину ускорения шарика w .

2. Полученные результаты представьте в виде графика зависимости ускорения шарика w от угла наклона желоба α . На эту же миллиметровую бумагу нанесите график функции $j = \frac{5}{9} g \sin \alpha$, т. е. зависимость ускорения движения шарика без учета сил трения от угла наклона.

Наблюдаемое пересечение кривых на графике может быть формально объяснено тем, что сила трения качения уменьшается с увеличением скорости движения шарика. Так как сила нормального давления в условиях задачи меняется крайне незначительно, то уменьшение силы трения качения, по-видимому, связано с уменьшением коэффициента трения качения k_2 . Причиной является уменьшение деформации ленты при увеличении скорости движения шарика.

По точке пересечения графиков определите угол α_2 , при котором возникает скольжение. Согласно (6.14) для этого угла, полагая $k_2 = 0$, получите коэффициент трения покоя

$$k = \frac{4}{9} \operatorname{tg} \alpha_2. \quad (6.20)$$

Экстраполяцией графика $w = f(\alpha)$ до пересечения с осью абсцисс определите величину угла α_1 .

3. Вычислите коэффициент трения качения для угла α_1 по формуле (6.9); для углов $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$ - по формуле (6.17).

4. Вычислите коэффициент силы трения покоя k по формуле (6.20).

5. Вычислите по формуле (6.19) коэффициент силы трения скольжения k_1 для углов $\alpha < \alpha_2$. Значение ускорения для этих углов можно получить из графика.

6. Оцените точность полученных результатов. Относительная и абсолютная погрешности ускорения равны

$$\varepsilon_w = \sqrt{\varepsilon_x^2 + 4\varepsilon_t^2}, \quad \Delta w = \varepsilon_w \cdot w \cdot 0,01. \quad (6.21)$$

Абсолютная и относительные ошибки значения коэффициента трения покоя

$$\Delta k = \frac{4}{9} \frac{\Delta \alpha_2}{\cos^2 \alpha_2}, \quad \varepsilon_k = \frac{\Delta k}{k} \cdot 100\%, \quad (6.22)$$

где ошибка в измерении угла

$$\Delta \alpha = \sqrt{\varepsilon_h^2 + \varepsilon_x^2} \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot 0,01. \quad (6.23)$$

Ошибки в измерении коэффициента трения качения по формуле (6.9) равны

$$\Delta k_2 = \sqrt{(\operatorname{tg} \alpha_1 \cdot \Delta r)^2 + \left(\frac{r}{\cos^2 \alpha_1} \right)^2 \cdot \Delta \alpha_1^2}, \quad \varepsilon_{k_2} = \frac{\Delta k_2}{k_2} \cdot 100\%. \quad (6.24)$$

Ошибки в измерении коэффициента трения качения по формуле (6.17) равны

$$\Delta k_2 = k_2 \sqrt{\left(\frac{\Delta r}{r}\right)^2 + \left(\frac{\Delta w}{j-w}\right)^2 + \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \Delta \alpha^2}, \quad \varepsilon_{k_2} = \frac{\Delta k_2}{k_2} \cdot 100\%. \quad (6.25)$$

Результаты измерений и вычислений запишите в табл. 6.1 и 6.2.

Таблица 6.1.

№ опыта	h (м)	α (град.)	t_i (с)	t_{cp} (с)	Δt (с)	ε_t (%)	w (м/с ²)	Δw (м/с ²)	ε_w (%)	j (м/с ²)
1										
2										
3										
4										
5										

Таблица 6.2.

α_2 (град.)	$k \pm \Delta k$	α_1 (град.)	$k_2 \pm \Delta k_2$ (м)	$\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$ (град.)	$k_2 \pm \Delta k_2$ (м)	$\alpha > \alpha_2$ (град.)	$k_1 \pm \Delta k_1$

Контрольные вопросы

1. Чему равна сила трения покоя? Почему появляются силы трения покоя и скольжения?
2. Чему равна сила трения скольжения и как она зависит от скорости?
3. В каком случае возникает сила трения качения и чему она равна? Почему коэффициент трения качения имеет размерность длины?

4. Запишите систему уравнений, описывающих чистое качение и скольжение шарика по желобу.
5. Объясните, почему экспериментальный график $w = f(\alpha)$ пересекается с теоретическим $j = f(\alpha)$.
6. Получите формулы для вычисления ошибок (6.21) – (6.25).

Библиографический список

1. Иродов И. Е. Основные законы механики. М., «Высшая школа», 1985, § 5.4.
2. Стрелков С. П. Механика. М., «Наука», 1975, § 38, 41, 42, 72, 75.
3. Хайкин С. Э. Физические основы механики. Наука, 1971, § 49, 50, 97.
4. Сивухин Д. В. Общий курс физики, т.1, Механика. М., «Наука», 1974, § 17, 48.

Лабораторная работа № Д-7 ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ТРЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ НАКЛОННОГО МАЯТНИКА

Методика эксперимента

Целью работы является определение коэффициента трения при качении шарика по наклонной плоскости и проверка формулы периода колебаний наклонного маятника (рис.7.1). Шар, закрепленный на тонкой длинной нити, может кататься по наклонной плоскости, при этом нить будет закручиваться. Если шар отвести от положения равновесия (ось OO' на рис.7.1) на угол α и затем отпустить, то он будет колебаться, катаясь около положения равновесия. Из-за трения колебания будут постепенно затухать. По величине затухания колебаний можно определить силу трения и коэффициент трения.

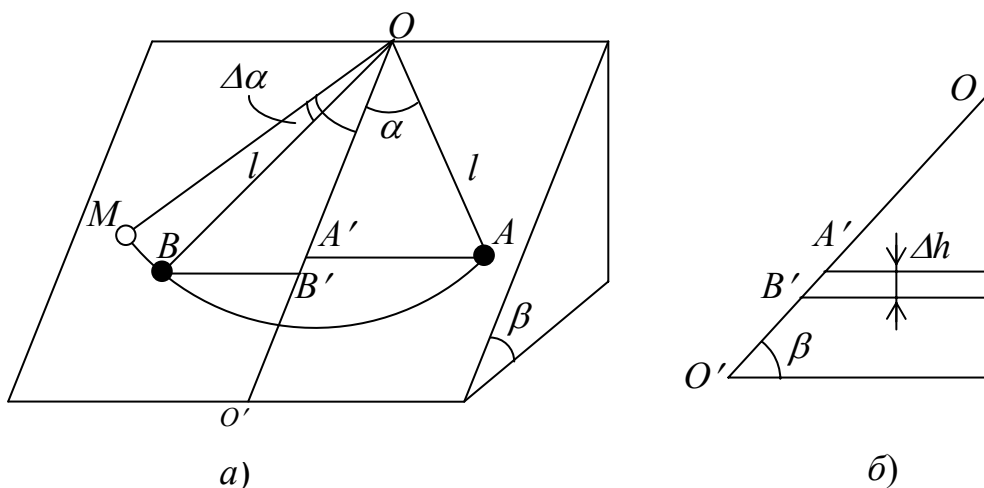


Рис.7.1. Наклонный маятник

При качении шара по плоскости сила трения совершает работу. Эта работа уменьшает полную энергию шара, которая складывается из кинетической и потенциальной энергий. В тех положениях, где маятник максимально отклонен от положения равновесия, его скорость равна нулю, следовательно, и кинетическая энергия также равна нулю. Эти точки называются точками поворота. В них маятник останавливается, поворачивается и движется обратно. В момент поворота энергия маятника равна потенциальной энергии, поэтому уменьшение потенциальной энергии маятника при его движении от одной точки поворота до другой равно работе силы трения на пути между точками поворота.

Выведем формулу, которая связывает уменьшение амплитуды колебаний с коэффициентом трения k . Пусть точка A – точка поворота (рис.7.1а). В этом положении нить маятника составляет угол α с осью OO' . Если бы трения не было, то через половину периода маятник оказался бы в точке M , а угол отклонения был бы равен α . Но из-за трения шар немного не докатится до точки M и остановится в точке B . Это и будет точка поворота. В этой точке угол нити с осью OO' будет $\alpha - \Delta\alpha$. То есть за половину периода угол поворота уменьшился на $\Delta\alpha$. Точка B расположена ниже, чем точка A , и поэтому потенциальная энергия маятника в точке B меньше, чем в точке A .

Найдем связь между потерей угла $\Delta\alpha$ и потерей высоты Δh . Для этого спроектируем точки A и B на ось OO' . Это будут точки A' и B' (рис.7.1б) соответственно. Очевидно, что длина отрезка

$$\Delta l = A'B' = l \cos(\alpha - \Delta\alpha) - l \cos \alpha,$$

где l – длина нити маятника. Так как ось OO' наклонена под углом β к горизонту, то проекция отрезка Δl на вертикальную ось и есть потеря высоты Δh :

$$\Delta h = \Delta l \sin \beta = l \sin \beta [\cos(\alpha - \Delta\alpha) - \cos \alpha]. \quad (7.1)$$

Изменение потенциальной энергии маятника между точками A и B

$$\Delta E = mg \Delta h, \quad (7.2)$$

где m – масса шара, g – ускорение свободного падения.

Вычислим теперь работу силы трения. Так как сила трения

$$F_{mp} = kN, \quad (7.3)$$

где k – коэффициент трения, $N = mg \cos \beta$ – сила нормального давления шара на плоскость, то работа силы трения на пути ΔS между точками A и B равна $A_{mp} = kmg \Delta S \cos \beta$, где $\Delta S = l(2\alpha - \Delta\alpha)$. Следовательно

$$A_{mp} = kmgl(2\alpha - \Delta\alpha) \cos \beta. \quad (7.4)$$

Поскольку $\Delta E_n = A_{mp}$, то из уравнений (7.1), (7.2) и (7.4) получаем

$$k \cdot ctg \beta = \frac{\cos(\alpha - \Delta\alpha) - \cos \alpha}{2\alpha - \Delta\alpha}. \quad (7.5)$$

Выражение (7.5) можно упростить, если учесть, что угол $\Delta\alpha$ очень мал. Тогда $\cos \Delta\alpha \approx 1$, $\sin \Delta\alpha \approx \Delta\alpha$, а

$$\cos(\alpha - \Delta\alpha) = \cos \alpha \cos \Delta\alpha + \sin \alpha \sin \Delta\alpha \approx \cos \alpha + \Delta\alpha \sin \alpha.$$

Теперь формулу (7.5) можно переписать в виде

$$k \cdot \operatorname{ctg} \beta = \frac{\Delta \alpha \cdot \sin \alpha}{2\alpha - \Delta \alpha},$$

откуда

$$\Delta \alpha = 2k \cdot \operatorname{ctg} \beta \frac{\alpha}{\sin \alpha + k \cdot \operatorname{ctg} \beta}. \quad (7.6)$$

Оказалось, что потеря угла за половину периода определяется величиной k и углом α . Однако можно найти такие условия, при которых $\Delta \alpha$ не будет зависеть от угла α .

Рассмотрим довольно большие амплитуды α и учтем, что коэффициент трения k мал (порядка 10^{-3}). Тогда можно положить, что

$$\sin \alpha \gg k \cdot \operatorname{ctg} \beta, \quad (7.7)$$

а слагаемым $k \operatorname{ctg} \beta$ в знаменателе формулы (7.6) пренебречь. То есть

$$\Delta \alpha = 2k \cdot \operatorname{ctg} \beta \frac{\alpha}{\sin \alpha}.$$

С другой стороны, пусть углы α будут малыми, т. е. $\alpha \ll 1$ и $\sin \alpha \approx \alpha$. Тогда

$$\Delta \alpha = 2k \operatorname{ctg} \beta. \quad (7.8)$$

Отметим, что это выражение справедливо при условии $k \cdot \operatorname{ctg} \beta \ll \alpha \ll 1$.

Найдем теперь потерю угла поворота за одно полное колебание. Согласно (7.8)

$$\Delta \alpha_1 = 4k \operatorname{ctg} \beta.$$

Тогда за n колебаний

$$\Delta \alpha_n = 4nk \operatorname{ctg} \beta,$$

откуда

$$k = \frac{\Delta \alpha_n}{57,3^0 \cdot 4n} \operatorname{tg} \beta. \quad (7.9)$$

Эта формула позволяет вычислить коэффициент трения k , для чего необходимо измерить уменьшение угла $\Delta \alpha_n$ за 10 – 15 колебаний.

Теперь получим формулу периода колебаний наклонного маятника. Рассмотрим силы, действующие на шар (рис.7.2). Силу тяжести $m\vec{g}$ разложим на две составляющие силы, направленные перпендикулярно и параллельно плоскости:

$$F_{\perp} = mg \cos \beta, F_{\parallel} = mg \sin \beta.$$

Со стороны наклонной плоскости на шар действует сила реакции опоры \vec{N} так, что сумма всех сил в направлении, перпендикулярном плоскости, равна нулю. Силу F_{\parallel} (рис.7.3) разложим также на две составляющие: одна направлена вдоль нити, другая — перпендикулярно к ней, т. е.

$$T = F_{\parallel} \cos \alpha, F = F_{\parallel} \sin \alpha.$$

Сила, возвращающая шар в положение равновесия, равна

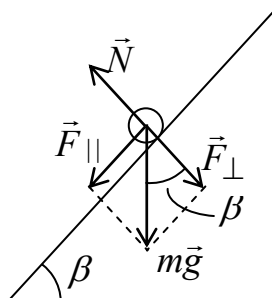


Рис.7.2. Разложение силы \vec{F}_{\parallel} на составляющие

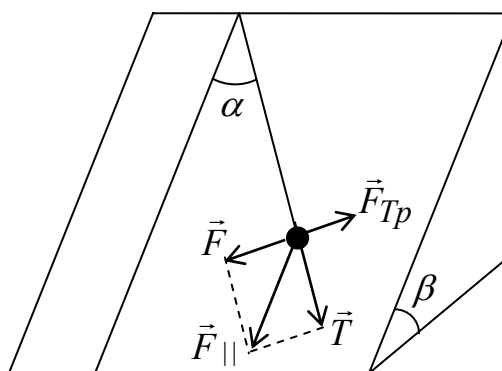


Рис.7.3 Силы, действующие на шарик

$$F = -mg \sin \beta \sin \alpha. \quad (7.10)$$

Знак « \rightarrow » взят потому, что возвращающаяся сила направлена в сторону, противоположную смещению. Кроме того, на шар действует сила трения

$$F_{mp} = kN = kmg \cos \beta. \quad (7.11)$$

Тогда, в соответствии со вторым законом Ньютона и уравнением вращательного движения, запишем

$$\begin{cases} mw_c = F - F_{mp}, \\ I\beta = F_{mp}R, \end{cases} \quad (7.12)$$

где w_c — ускорение центра масс шара, β — угловое ускорение, $I = \frac{2}{5}mR^2$ — момент инерции шара, R — радиус шара.

Если пренебречь проскальзыванием шара (это возможно при скорости проскальзывания, значительно меньшей скорости центра масс), то $w_c = \beta R$ и уравнения (7.10), (7.11), (7.12) позволяют получить

$$\frac{7}{5}w_c + g \sin \beta \sin \alpha = 0. \quad (7.13)$$

При малой амплитуде колебания наклонного маятника

$$\sin \alpha \approx \alpha, \quad \alpha = \frac{x}{l},$$

где x – длина дуги, отсчитываемая от положения равновесия, l – длина маятника. Поскольку $w_c = \frac{d^2x}{dt^2}$, то дифференциальное уравнение движения принимает вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{5}{7} \cdot \frac{g}{l} x \sin \beta = 0. \quad (7.14)$$

Известно, что данное уравнение описывает гармонические колебания. Поскольку циклическая частота колебания связана с периодом соотношением $\omega = \frac{2\pi}{T}$, где $\omega^2 = \frac{5}{7} \cdot \frac{l}{g} \sin \beta$, то для периода колебаний получим следующее выражение

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{7}{5} \cdot \frac{l}{g \sin \beta}}, \quad (7.15)$$

или

$$T^2 = 1,4T_0^2 \frac{1}{\sin \beta}, \quad (7.16)$$

где $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ – период колебания маятника при $\beta = 0^0$, т. е. когда наклонный маятник установлен вертикально. Зависимость (7.16) можно проверить экспериментально.

Описание экспериментальной установки

Схема прибора (наклонного маятника) представлена на рис.7.4. К основанию 2, оснащено четырьмя ножками с регулируемой высотой, прикреплен миллисекундомер 1. В основании закреплена труба 3, на которой смонтирован корпус 4 с червячной передачей. Посредством оси червячная передача соединена с кронштейном 5, на котором прикреплены шкалы 6 и 7. В кронштейне 5 закреплена колонка 8, на которой подвешен на нити шар 9. В кронштейн 5 по направляющей вставляются образцы 10.

Для наклона маятника используется вороток 11. К кронштейну 5 привинчен фотоэлектрический датчик 12, соединенный с миллисекундомером.

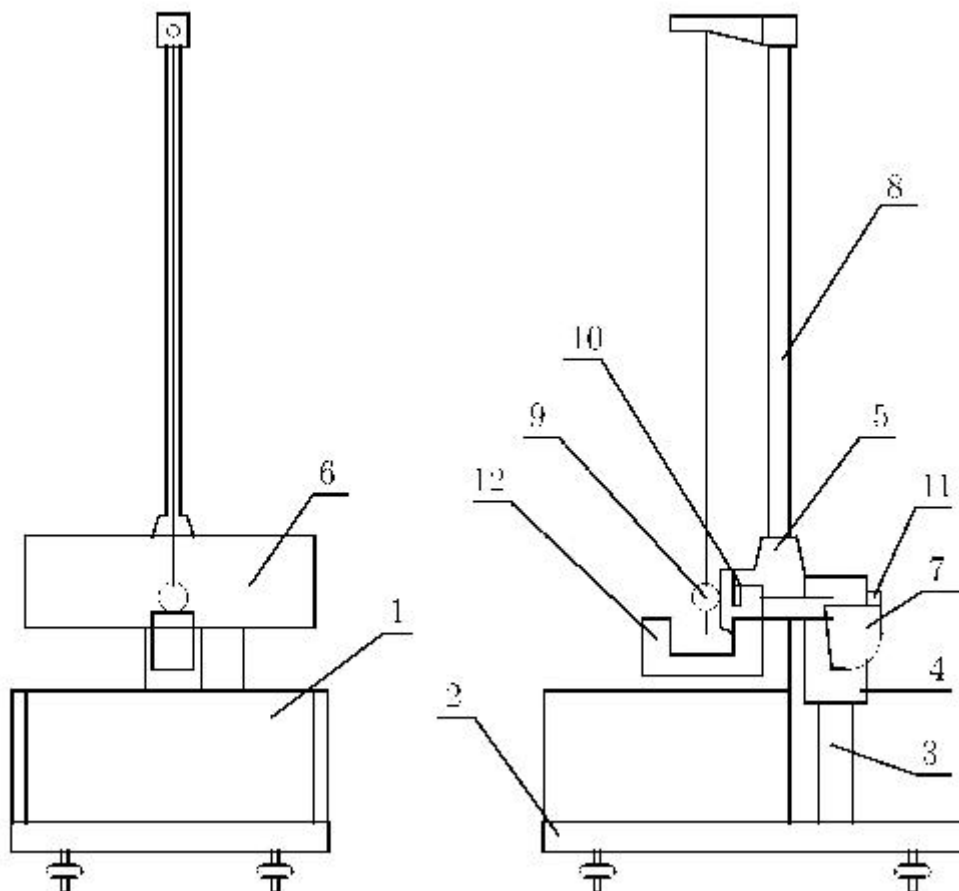


Рис.7.4 Экспериментальная установка «наклонный маятник»

Практическая часть

Упражнение 1. Определение коэффициента трения

1. С помощью регулировочных винтов установите наклонную плоскость вертикально. При этом нить маятника должна занять вертикальное положение: установите ее напротив отметки «0» на шкале. Шар должен почти касаться наклонной плоскости.

2. Установите наклонную плоскость по шкале 7 на отметку 30^0 ($\gamma = 30^0$). (Т. к. на установке «наклонный маятник» угол отсчитывается от вертикали, то угол $\beta = 90^0 - \gamma$). Отведите маятник на угол $\alpha = 5^0 \div 10^0$ и отпустите. Подсчитайте число колебаний n , когда шар опустится на угол $\Delta\alpha_n = 2^0 \div 3^0$. Измерения повторите при различных углах γ ($\gamma > 30^0$).

3. Вычислите по формуле (7.9) коэффициент трения и оцените точность полученного результата. Данные измерений и вычислений запишите в табл.7.1.

Таблица 7.1

	n	α_0^0	α_n^0	$\Delta\alpha_n^0$	k	Δk	$\varepsilon_k, (\%)$	$k_{cp} \pm \Delta k$
$\gamma = 60^0$ $\beta = 30^0$								
					k_{cp}			
$\gamma = 45^0$ $\beta = 45^0$								
					k_{cp}			
$\gamma = 30^0$ $\beta = 60^0$								
					k_{cp}			

Упражнение 2. Проверка формулы периода колебаний наклонного маятника.

1. Установите наклонную плоскость вертикально. Шар должен почти касаться плоскости. Отведите маятник на угол $\alpha = 5 \div 8^0$ и без толчка отпустите. С помощью миллисекундомера измерьте время t_0 для n колебаний и определите период $T_0 = t_0/n$. Измерения повторите 3 ÷ 5 раз. Оцените точность полученных измерений. Результаты измерений и вычислений занесите в табл.7.2.

Таблица 7.2

№ опыта	n	t_0 (с)	T_0 (с)	ΔT_0 (с)	ε_{T_0} (%)	$T_0 \pm \Delta T_0$ (с)
			T_{0cp}			

2. По полученному значению T_0 вычислите период колебания наклонного маятника T по формуле (7.16) для разных углов: $\beta = 30^0, 40^0, 50^0, 60^0$.

Очевидно, погрешности в полученных значениях T равны погрешностям полученного значения T_0 .

3. Наклонную плоскость устанавливайте по шкале под углами: $\gamma = 30^0$, 40^0 , 50^0 , 60^0 . При каждом γ получите экспериментальные значения периода колебаний T_3 , измерив время t для n колебаний ($T_3 = t / n$). Измерения повторите 3 раза. Оцените точность полученных измерений. Результаты измерений и вычислений занесите в табл.7.3.

4. Постройте графики зависимости T^2 и T_3^2 от $1 / \sin \beta$ и сделайте вывод о справедливости формулы (7.16).

Таблица 7.3

	n	t (с)	T_3 (с)	ΔT_3 (с)	ε_{T_3} (%)	$T_3 \pm \Delta T_3$ (с)	$T \pm \Delta T$ (с)	$1 / \sin \beta$
$\gamma = 30^0$ $\beta = 60^0$								
			$T_{3\text{ ср}}$					
$\gamma = 40^0$ $\beta = 50^0$								
			$T_{3\text{ ср}}$					
$\gamma = 50^0$ $\beta = 40^0$								
			$T_{3\text{ ср}}$					
$\gamma = 60^0$ $\beta = 30^0$								
			$T_{3\text{ ср}}$					

Контрольные вопросы

1. Получите формулу (7.9) для коэффициента трения k . При каких условиях справедлива эта формула?

2. Выведите уравнение движения (7.14) и формулу периода колебаний наклонного маятника (7.16).

Библиографический список

1. Хайкин С. Э. Физические основы механики. М. Физматгиз, 1971.
2. Стрелков С. П. Механика. М., «Наука», 1975.
3. Сивухин Д. В. Общий курс физики. т.1. Механика. М., 1989.

Лабораторная работа № Д-8 КРУТИЛЬНЫЙ МАЯТНИК

Теоретическая часть

Как известно, при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси, направление которой задано единичным вектором \vec{n} , все материальные точки этого тела движутся по окружностям с одинаковой угловой скоростью $\vec{\omega}$, коллинеарной \vec{n} . (При этом направление $\vec{\omega}$ связано с направлением вращения правилом правого винта). Проекция $\omega_n = \vec{\omega} \cdot \vec{n}$ угловой скорости на ось вращения в любой момент времени определяется соотношением

$$\omega_n = \frac{d\varphi}{dt}, \quad (8.1)$$

где φ – угол поворота твердого тела относительно его начального положения (угол φ возрастает, если направления векторов $\vec{\omega}$ и \vec{n} совпадают, и убывает, если векторы $\vec{\omega}$ и \vec{n} направлены в противоположные стороны).

Запишем основное уравнение динамики вращательного движения тела в инерциальной системе отсчета, начало которой находится на оси вращения:

$$I \frac{d\omega_n}{dt} = M_n, \quad (8.2)$$

где $M_n = \vec{M} \cdot \vec{n}$ – проекция на ось вращения суммарного момента \vec{M} всех внешних сил, приложенных к телу, I – момент инерции твердого тела относительно оси вращения. Момент инерции определяется по формуле

$$I(\vec{n}) = \sum_i \Delta m_i l_i^2, \quad (8.3)$$

где l_i – расстояние от оси вращения i -ой материальной точки массой Δm_i .

Введем систему отсчета, жестко связанную с телом. Начало отсчета O находится на оси вращения AB , Ox , Oy , Oz – оси координат (рис.8.1). При вращении твердого тела углы α , β и γ между вектором \vec{n} и осями Ox , Oy , Oz не изменяются. Из рис 8.1 видно, что

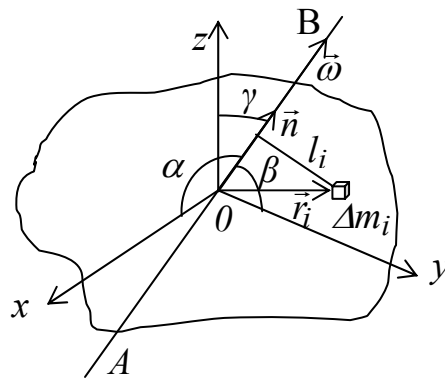


Рис.8.1. Система отсчета, жестко связанная с твердым телом

$$l_i^2 = \vec{r}_i^2 - (\vec{r}_i \vec{n})^2,$$

где \vec{r}_i – радиус-вектор i -ой точки тела относительно введенной системы отсчета. Учитывая, что

$$\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i), \quad \vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma),$$

$$n^2 = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1, \quad (8.4)$$

где x_i, y_i, z_i – декартовы координаты i -ой точки, можно также представить l_i^2 в виде

$$\begin{aligned} l_i^2 &= x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - (x_i \cos \alpha + y_i \cos \beta + z_i \cos \gamma)^2 = \\ &= (y_i^2 + z_i^2) \cos^2 \alpha + (x_i^2 + z_i^2) \cos^2 \beta + (x_i^2 + y_i^2) \cos^2 \gamma - \\ &- 2x_i y_i \cos \alpha \cos \beta - 2x_i z_i \cos \alpha \cos \gamma - 2y_i z_i \cos \beta \cos \gamma. \end{aligned}$$

Подставляя последнее выражение в (8.3), получим

$$\begin{aligned} I &= I_{xx} \cos^2 \alpha + I_{yy} \cos^2 \beta + I_{zz} \cos^2 \gamma + \\ &+ 2I_{xy} \cos \alpha \cos \beta + 2I_{xz} \cos \alpha \cos \gamma + 2I_{yz} \cos \beta \cos \gamma, \quad (8.5) \end{aligned}$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \sum_i \Delta m_i (y_i^2 + z_i^2), \quad I_{yy} = \sum_i \Delta m_i (x_i^2 + z_i^2), \quad I_{zz} = \sum_i \Delta m_i (x_i^2 + y_i^2) \\ I_{xy} &= -\sum_i \Delta m_i x_i y_i, \quad I_{xz} = -\sum_i \Delta m_i x_i z_i, \quad I_{yz} = -\sum_i \Delta m_i y_i z_i \quad (8.6) \end{aligned}$$

Величины I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} являются *осевыми моментами инерции*, а величины I_{xy}, I_{xz}, I_{yz} – *центробежными моментами инерции*. Если $\vec{n}_x = \vec{n}$ (ось Ox совмещена с осью вращения), то $\cos \alpha = 1, \cos \beta = \cos \gamma = 0$ и, согласно (8.5), $I(\vec{n}_x) = I_{xx}$. Аналогично доказывается, что $I(\vec{n}_y) = I_{yy}$ и $I(\vec{n}_z) = I_{zz}$. Таким образом величины I_{xx}, I_{yy} и I_{zz} являются моментами инерции тела относительно осей Ox, Oy и Oz соответственно.

При любом положении начала координат O оси системы отсчета можно выбрать так, чтобы все центробежные моменты инерции обратились в нуль. В этом случае оси Ox , Oy и Oz , жестко связанные с твердым телом, будут *главными осями инерции*, проходящими через точку O , а соответствующие осевые моменты инерции — *главными моментами инерции*. Направление главных осей инерции и значения главных моментов инерции зависят от положения начала O . Главные оси инерции, проходящие через центр масс твердого тела, называются *центрными осями*, а соответствующие осевые моменты, обозначаемые через I_x , I_y и I_z , — *главными центральными моментами инерции*.

Согласно (8.5), момент инерции тела относительно произвольной оси AB , проходящей через центр масс, выражается через моменты I_x , I_y и I_z следующим образом:

$$I = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma. \quad (8.7)$$

Если момент инерции I известен, то момент инерции I' того же тела относительно оси $A'B'$, параллельной оси AB , может быть найден с помощью теоремы Гюйгенса-Штейнера:

$$I' = I + ma^2, \quad (8.8)$$

где m — масса тела, a — расстояние между осями AB и $A'B'$. Таким образом, задача об определении момента инерции тела относительно произвольной оси сводится к нахождению главных осей и соответствующих моментов инерции I_x , I_y и I_z .

Главные центральные оси однородных симметричных тел (шара, куба, прямоугольного параллелепипеда, цилиндра и т. д.) всегда совпадают с осями материальной симметрии этих тел. Например, главные центральные оси однородного параллелепипеда проходят через его геометрический центр перпендикулярно граням (рис.8.2). Совмещая с этими осями координатные оси Ox , Oy и Oz и обозначая через a , b и c длины ребер параллелепипеда (параллельных соответственно осям Ox , Oy и Oz), нетрудно рассчитать главные центральные мо-

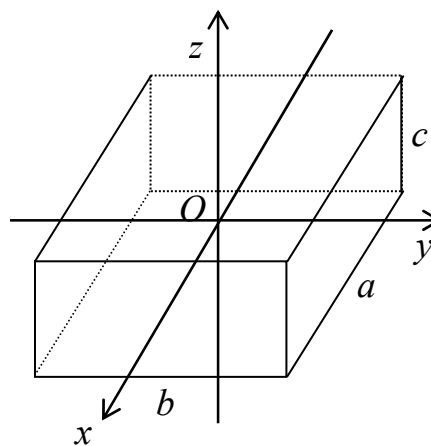


Рис.8.2. Прямоугольный параллелепипед

менты I_x , I_y и I_z по формулам (8.6), в которых суммирование по точкам тела следует заменить интегрированием по его объему. В частности

$$I_z = \int_V \rho(x^2 + y^2) dx dy dz = \rho \int_{-a/2}^{a/2} x^2 dx \int_{-b/2}^{b/2} dy \int_{-c/2}^{c/2} dz + \\ + \rho \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} y^2 dy \int_{-c/2}^{c/2} dz = \frac{m}{12}(a^2 + b^2), \quad (8.9)$$

где $\rho = \frac{m}{abc}$. Аналогичные вычисления приводят к следующим значениям

I_x и I_y :

$$I_x = \frac{m}{12}(b^2 + c^2), \quad I_y = \frac{m}{12}(a^2 + c^2). \quad (8.10)$$

Главными центральными осями однородного шара являются любые три взаимно перпендикулярные оси, проходящие через его центр. Таким же свойством обладает и однородный куб. Главные центральные оси и главные центральные моменты тел сложной формы могут быть найдены экспериментально.

Описание экспериментальной установки

В настоящей работе для измерения моментов инерции твердого тела относительно различных осей и проверки соотношения (8.7) применяется метод крутильных колебаний. В качестве лабораторной установки для измерения периодов крутильных колебаний используется унифилярный подвес ФПМ 05 (далее – *подвес*). Общий вид подвеса изображен на рис.8.3.

Подвес представляет собой настольный прибор и состоит из следующих основных частей: основания 13; вертикальной стойки 1, на которой размещены верхний и нижний кронштейны 2; рамки 4, подвешенной между кронштейнами 2 на стальной проволоке 3 и предназначенной для установки и закрепления исследуемого тела 5. На кронштейне 6 размещена шкала 7, предназначенная для определения начального угла поворота рамки, электромагнит 8 для фиксации рамки в заданном положении, блок питания электромагнита 12 и фотоэлектрический датчик 10. Электромагнит фиксируется в требуемом положении стопорным винтом 9. На основании 13 закреплен миллисекундомер 11, служащий для отсчета времени и числа колебаний.

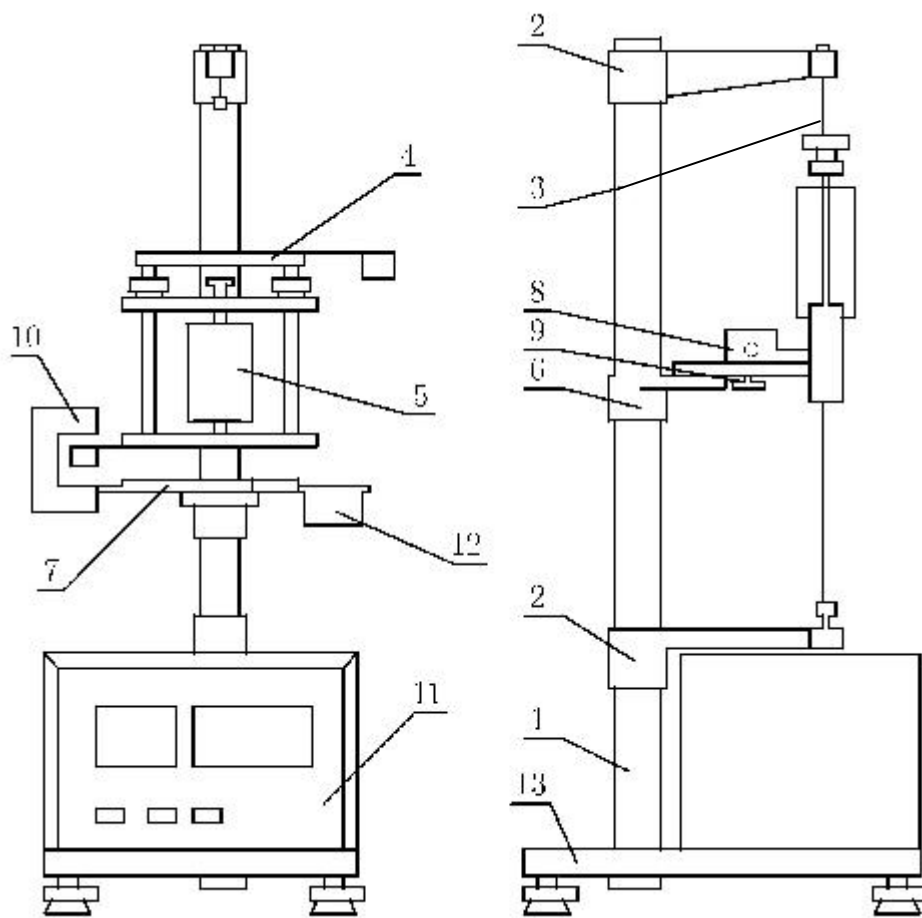


Рис.8.3. Унифилярный подвес ФПМ 05

В центрах граней, в серединах ребер и у вершин прилагаемых металлических образцов имеются углубления для закрепления в рамке. Начальное положение тела, закрепленного в рамке, фиксируется электромагнитом. После того как нажимается кнопка «Пуск» на панели миллисекундомера, отключается магнит, и рамка с телом начинает совершать крутильные колебания. Флажок, установленный на рамке, во время колебаний пересекает световой поток в фотоэлектрическом датчике. При этом сигнал с фотодатчика поступает в миллисекундомер.

Период крутильных колебаний определяется по показаниям миллисекундомера по формуле

$$T = \frac{t}{N}, \quad (8.11)$$

где t – время колебаний, N – число колебаний.

Методика эксперимента

Для измерения моментов инерции методом крутильных колебаний исследуемое тело жестко закрепляется в рамке крутильного маятника, подвешенной на упругой вертикально натянутой проволоке. Если вывести маятник из положения равновесия, повернув его рамку на небольшой угол φ , то вследствие деформации проволоки возникнут силы упругости, приложенные к рамке. Проекция результирующего момента $\vec{M}_{упр}$ этих сил на ось вращения, направленную вдоль проволоки, пропорциональна и противоположна по знаку углу φ :

$$M_{упр} = -D\varphi, \quad (8.12)$$

где D – постоянная момента упругих сил. Если проволока достаточно тонкая и длинная, то, как показывает опыт, зависимость (8.12) справедлива и для довольно больших углов.

Под действием момента $\vec{M}_{упр}$ крутильный маятник начнет совершать колебания, при которых рамка и закрепленное в ней тело будут вращаться вокруг неподвижной вертикальной оси. Затухание этих колебаний, обусловленное действием сил трения, достаточно мало. Поэтому при выводе уравнения движения крутильного маятника можно пренебречь моментом сил трения.

Из (8.1), (8.2) и (8.12) следует, что без учета сил трения колебания крутильного маятника описываются уравнением

$$I_M \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -D\varphi, \quad (8.13)$$

где I_M – момент инерции маятника относительно оси вращения. Уравнение (8.13) удобно переписать в виде

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2\varphi = 0, \quad (8.14)$$

где $\omega_0^2 = D/I_M$. Как известно, решение дифференциального уравнения (8.14) имеет вид

$$\varphi = A \cos(\omega_0 t + \alpha), \quad (8.15)$$

где амплитуда колебаний A и начальная фаза колебаний α определяются из начальных условий.

Если до момента возникновения колебаний, выбираемого в качестве начального момента времени, рамка маятника была неподвижна и повернута на угол φ_0 относительно положения равновесия, то

$$\varphi(0) = \varphi_0, \quad \left. \frac{d\varphi}{dt} \right|_{t=0} = 0. \quad (8.16)$$

С другой стороны, из (8.15) следует, что

$$\varphi(0) = A \cos \alpha, \quad \left. \frac{d\varphi}{dt} \right|_{t=0} = -A \omega_0 \sin \alpha. \quad (8.17)$$

Выражения (8.17) удовлетворяют начальным условиям (8.16) при $A = \varphi_0$ и $\alpha = 0$. Следовательно, в рассматриваемом случае крутильный маятник совершает незатухающие гармонические колебания по закону

$$\varphi = \varphi_0 \cos \omega_0 t.$$

Период этих колебаний равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I_M}{D}}. \quad (8.18)$$

Момент инерции маятника равен сумме моментов инерции I_0 рамки и момента инерции I исследуемого тела:

$$I_M = I_0 + I.$$

Поэтому период колебаний маятника можно также представить в виде

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_0 + I}{D}}. \quad (8.19)$$

Если колеблется свободная рамка без тела, то ее период колебаний, очевидно, равен

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{D}}. \quad (8.20)$$

Разрешая систему уравнений (8.19) и (8.20) относительно D и I , находим

$$D = \frac{4\pi^2 I_0}{T_0^2}, \quad (8.21)$$

$$I = I_0 \frac{T^2 - T_0^2}{T_0^2}. \quad (8.22)$$

Формулы (8.21) и (8.22) позволяют вычислить момент инерции I тела относительно оси маятника и постоянную D момента упругих сил, если предварительно измерены момент инерции I_0 свободной рамки и периоды колебаний T_0 и T (свободной рамки и рамки с телом соответственно). Период колебаний T , так же, как и момент инерции I тела, зависит от ориентации тела по отношению к вертикальной оси вращения маятника. Поворачивая тело и закрепляя его в различных положениях относительно оси вращения, мы изменяем направление этой оси в системе отсчета, жестко связанной с телом. При этом изменяется и момент инерции тела относительно оси вращения. Если тело закрепляется в рамке только в таких положениях, в которых ось вращения маятника проходит через центр масс тела, то момент инерции тела I относительно оси вращения и соответствующий период колебания T оказываются функциями проекций $\cos \alpha$, $\cos \beta$ и $\cos \gamma$ единичного вектора \vec{n} , направленного вдоль этой оси, на координатные оси Ox , Oy и Oz , совмещенные с главными центральными осями данного тела, т. е. $I = I(\vec{n})$, $T = T(\vec{n})$. Согласно (8.22), величины $I(\vec{n})$ и $T(\vec{n})$ связаны соотношением

$$I(\vec{n}) = I_0 \frac{T^2(\vec{n}) - T_0^2}{T_0^2}. \quad (8.23)$$

Последовательно совмещая ось вращения маятника с главными центральными осями Ox , Oy и Oz исследуемого тела и измеряя соответствующие периоды колебаний маятника T_x , T_y и T_z , можно затем найти главные центральные моменты инерции тела, используя формулу (8.23):

$$I_x = I_0 \frac{T_x^2 - T_0^2}{T_0^2}, \quad I_y = I_0 \frac{T_y^2 - T_0^2}{T_0^2}, \quad I_z = I_0 \frac{T_z^2 - T_0^2}{T_0^2}. \quad (8.24)$$

Подставляя (8.23) и (8.24) в соотношение (8.7) и учитывая (8.4), получим

$$T^2(\vec{n}) = T_x^2 \cos^2 \alpha + T_y^2 \cos^2 \beta + T_z^2 \cos^2 \gamma. \quad (8.25)$$

Таким образом, существует простая связь между периодами крутильных колебаний T_x , T_y и T_z тела относительно его главных центральных

осей Ox , Oy и Oz и периодом колебаний этого же тела относительно оси с направляющими косинусами $\cos \alpha$, $\cos \beta$ и $\cos \gamma$, проходящей через центр масс тела.

Соотношение (8.25) так же, как и формула (8.18) для периода крутильных колебаний, справедливо, если затухание колебаний мало. Практически для этого достаточно, чтобы число колебаний N , за которое амплитуда уменьшается в 2-3 раза, удовлетворяло неравенству $N \geq 10$. Если это неравенство выполняется, то проверка соотношения (8.7) сводится к проверке равенства (8.25). Оно удобно тем, что все входящие в него величины в условиях опыта могут быть измерены непосредственно.

Для определения момента инерции I_0 рамки можно воспользоваться эталонным телом, момент инерции которого $I_{\text{э}}$ известен. Согласно (8.22), I_0 выражается через $I_{\text{э}}$ следующим образом:

$$I_0 = I_{\text{э}} \frac{T_0^2}{T_{\text{э}}^2 - T_0^2}, \quad (8.26)$$

где $T_{\text{э}}$ – период колебаний рамки с закрепленным в ней эталонным телом. В качестве эталонного тела в работе используется однородный куб. Очевидно, что все три момента инерции такого куба относительно главных осей Ox , Oy и Oz , проходящих через его центр перпендикулярно граням, одинаковы:

$$I_x = I_y = I_z = I_{\text{э}}. \quad (8.27)$$

Из (8.7) и (8.27) с учетом (8.4) находим

$$I(\vec{n}) = I_{\text{э}} (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) = I_{\text{э}} = \text{const}. \quad (8.28)$$

Таким образом, момент инерции однородного куба относительно проходящей через его центр оси не зависит от направления этой оси. Согласно (8.9) и (8.10), этот момент инерции определяется соотношением

$$I_{\text{э}} = \frac{1}{6} m a^2, \quad (8.29)$$

где m – масса куба, a – длина его ребра. Вычислив $I_{\text{э}}$ по формуле (8.29) и измерив периоды колебаний T_0 и $T_{\text{э}}$ свободной рамки и рамки с кубом, можно затем определить искомую величину I_0 по формуле (8.26).

Для проверки зависимости (8.25) в работе используются крутильные колебания трех образцов: однородного куба; однородного симметричного прямоугольного параллелепипеда, у которого длины ребер удовлетворяют условию $a = b \neq c$; однородного несимметричного прямоугольного параллелепипеда, у которого длины всех трех ребер различны ($a \neq b \neq c$). Из (8.19), (8.27) и (8.25) следует, что период крутильных колебаний рамки с кубом должен принимать одно и то же значение при любом выборе оси вращения, проходящей через его центр:

$$T(\vec{n}) = T_x = T_y = T_z = \text{const}. \quad (8.30)$$

Проверить это можно, закрепляя куб в рамке в различных положениях, при которых ось вращения проходит через центр куба, и измеряя соответствующие периоды крутильных колебаний.

Согласно (8.10) и (8.19), моменты инерции симметричного параллелепипеда относительно главных центральных осей Ox и Oy (рис.8.4) и соответствующие им периоды крутильных колебаний равны между собой:

$$I_x = I_y, \quad T_x = T_y. \quad (8.31)$$

Из (8.7), (8.25) и (8.31) с учетом (8.4) получаем

$$I(\vec{n}) = I_x(1 - \cos^2 \gamma) + I_z \cos^2 \gamma, \quad (8.32)$$

$$T^2(\vec{n}) = T_x^2(1 - \cos^2 \gamma) + T_z^2 \cos^2 \gamma. \quad (8.33)$$

Таким образом, период крутильных колебаний $T(\vec{n})$ зависит от угла γ , который образует ось вращения с осью Oz , и не зависит от углов α и β (при

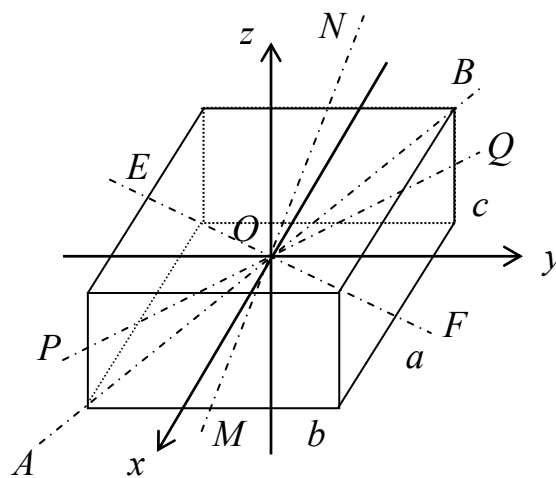


Рис.8.4. Оси вращения несимметричного прямоугольного параллелепипеда

$\gamma = const$). В частности, должен иметь одно и то же значение период колебаний относительно любой оси, лежащей в плоскости xOy (т.е. при $\gamma = \pi/2$). В этом случае $\cos \gamma = 0$ и, согласно (8.33),

$$T(\vec{n}) = T_x = const \quad (\gamma = \pi/2). \quad (8.34)$$

Проверить это соотношение можно, закрепляя в рамке крутильного маятника симметричный параллелепипед так, чтобы ось вращения была перпендикулярна его ребру длиной c , параллельному оси Oz . Периоды крутильных колебаний при любом таком положении тела должны совпадать.

Если ось вращения несимметричного параллелепипеда совпадает с его главной диагональю AB (рис.8.4), то

$$\cos \alpha = a/l, \quad \cos \beta = b/l, \quad \cos \gamma = c/l,$$

где $l = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ – длина диагонали AB . Тогда из (8.25) следует, что

$$T_{AB}^2(a^2 + b^2 + c^2) = T_x^2 a^2 + T_y^2 b^2 + T_z^2 c^2, \quad (8.35)$$

где T_{AB} – период колебаний рамки с несимметричным параллелепипедом относительно оси вращения AB .

Аналогично, выбирая в качестве осей вращения оси EF , MN и PQ (рис.8.4), из (8.25) получаем

$$T_{EF}^2(b^2 + c^2) = T_y^2 b^2 + T_z^2 c^2, \quad (8.36)$$

$$T_{MN}^2(a^2 + c^2) = T_x^2 a^2 + T_z^2 c^2, \quad (8.37)$$

$$T_{PQ}^2(a^2 + b^2) = T_x^2 a^2 + T_y^2 b^2, \quad (8.38)$$

где T_{EF} , T_{MN} , T_{PQ} – периоды колебаний рамки с несимметричным параллелепипедом относительно указанных осей.

Таким образом, для проверки формулы (8.25) в случае несимметричного параллелепипеда можно выяснить, удовлетворяют ли соотношениям (8.35) – (8.38) измеренные значения периодов колебаний относительно осей Ox , Oy , Oz , AB , EF , MN и PQ .

Практическая часть

1. Ознакомьтесь с теорией изучаемых явлений, а также с устройством и принципом действия прибора.

2. Проведите регулировку положения основания подвеса с помощью регулировочных опор.

3. Установите флажок рамки против нулевого деления шкалы. Для этого ослабьте стопорные винты в нижнем кронштейне и разверните в нем зажим до совмещения рамки с нулевым делением шкалы, после чего застопорьте винт.

4. Установите электромагнит на угол $60 - 80^0$ по шкале и зафиксируйте его положение стопорным винтом.

5. Отведите рамку на угол $40 - 50^0$ рукой и отпустите ее. Дайте рамке совершить $5 \div 10$ крутильных колебаний. При возникновении боковых колебаний рамки подтяните зажим в верхнем кронштейне, т. е. увеличьте натяжение проволоки.

6. Убедитесь в том, что крутильные колебания свободной рамки являются слабозатухающими. Для этого снова выведите рамку из положения равновесия и определите приблизительно число колебаний N , за которое их амплитуда уменьшается в $2 \div 3$ раза. Если $N \geq 10$, то затухание колебаний мало и можно пользоваться формулами (8.20) и (8.21).

7. Включите в сеть шнур питания миллисекундомера и нажмите кнопку «Сеть» на лицевой панели. При этом должны загореться цифровые индикаторы.

8. Дайте миллисекундомеру прогреться $1 \div 2$ минуты и включите тумблер питания электромагнита.

9. Зафиксируйте начальное положение свободной рамки электромагнитом, нажмите кнопку «Пуск» на лицевой панели и определите период колебаний T_0 свободной рамки по показаниям секундомера, используя формулу (8.11). Измерение времени колебаний в этом и последующих опытах проводите не менее трех раз. Найдите среднее значение периода колебаний T_0 и его ошибку ΔT_0 .

10. Измерьте массу m и длину ребра a образца, имеющего форму куба, и по формуле (8.29) найдите момент инерции I_3 куба относительно произвольной оси, проходящей через его центр. Оцените относительную ошибку ε_{I_3} и абсолютную ошибку ΔI_3 полученного значения I_3 по формулам:

$$\varepsilon_{I_3} = \sqrt{\varepsilon_m^2 + 4\varepsilon_a^2}, \quad \Delta I_3 = I_3 \cdot \varepsilon_{I_3} / 100\%,$$

где $\varepsilon_m = (\Delta m / m) \cdot 100\%$, $\varepsilon_a = (\Delta a / a) \cdot 100\%$ – относительные ошибки измерений m и a ; Δm и Δa – абсолютные ошибки измерений m и a .

11. Определите периоды колебаний рамки с кубом при различных положениях куба относительно оси вращения, проходящей через его центр. Для того, чтобы закрепить образец в рамке, освободите подвижную рамку, отвернув гайки боковых цанг, поднимите подвижную планку по направляющим и, придерживая ее рукой, установите образец так, чтобы углубление, соответствующее выбранному положению оси вращения, вошло в выступ на нижней перекладине рамки. Затем отпустите подвижную планку по направляющим, зажмите гайки боковых цанг и подожмите образец сверху винтом. При изменении положения образца в рамке и последующей смене исследуемых образцов придерживайте образец рукой во избежание его падения. Убедитесь в том, что при произвольном положении куба в рамке колебания являются слабозатухающими (см. п.6) и, следовательно, можно применять формулы (8.19) и (8.22) – (8.27).

Следуя рекомендациям п.9, измерьте периоды колебаний T_1, T_2, \dots, T_{10} при следующих положениях куба:

- а) ось вращения проходит через центры двух противоположных граней (T_1, T_2 и T_3);
- б) ось вращения проходит по главной диагонали куба (T_4, T_5, T_6 и T_7);
- в) ось вращения проходит через середины противоположных ребер куба (T_8, T_9 и T_{10}).

Вычислите средние значения периодов и их ошибки. Убедитесь в том, что полученные результаты подтверждают равенство (8.30). Результаты измерений и вычислений занесите в табл.8.1.

Таблица 8.1

№ опыта	T_1 (с)	T_2 (с)	T_3 (с)	T_4 (с)	T_5 (с)	T_6 (с)	T_7 (с)	T_8 (с)	T_9 (с)	T_{10} (с)
1										
2										
3										
$T_{i\text{cp}}$										
$\Delta T_{i\text{cp}}$										

12. Выберите образец, имеющий форму куба, в качестве эталонного тела при определении момента инерции рамки. Вычислите период колебаний T_9 рамки с кубом относительно произвольной оси по формуле

$$T_9 = \sum_{i=1}^{10} \frac{T_{i\text{cp}}}{10}$$

Оцените ошибку ΔT_9 найденного значения T_9 по формуле

$$\Delta T_9 = \frac{1}{10} \sqrt{\sum_{i=1}^{10} (\Delta T_{i_{cp}})^2}.$$

13. По формуле (8.26) вычислите момент инерции I_0 свободной рамки. Найдите ошибки ΔI_0 и ε_{I_0} по формулам:

$$\varepsilon_{I_0} = 2 \sqrt{\varepsilon_{T_9}^2 + \frac{4T_9^4}{(T_9^2 - T_0^2)^2} (\varepsilon_{T_9}^2 + \varepsilon_{T_0}^2)}, \quad \Delta I_0 = I_0 \cdot \varepsilon_{I_0} / 100\%,$$

где $\varepsilon_{I_9} = (\Delta I_9 / I_9) \cdot 100\%$, $\varepsilon_{T_9} = (\Delta T_9 / T_9) \cdot 100\%$, $\varepsilon_{T_0} = (\Delta T_0 / T_0) \cdot 100\%$.

14. Определите периоды колебаний T_1 , T_2 , T_3 и T_4 рамки с однородным симметричным прямоугольным параллелепипедом, закрепленным в четырех различных положениях, при которых его ось вращения перпендикулярна большому ребру (т. е. параллельна граням, имеющим форму квадрата). Вычислите средние значения T_1 , T_2 , T_3 и T_4 этих периодов и их ошибки. Сравните полученные значения T_1 , T_2 , T_3 и T_4 и убедитесь в их приближенном равенстве, подтверждающем теоретический вывод (8.34). Результаты измерений и вычислений занесите в табл.8.2.

Таблица 8.2

№ опыта	T_1 (с)	T_2 (с)	T_3 (с)	T_4 (с)
1				
2				
3				
$T_{i_{cp}}$				
$\Delta T_{i_{cp}}$				

15. Определите периоды колебаний рамки с однородным несимметричным прямоугольным параллелепипедом относительно его главных центральных осей Ox , Oy и Oz (периоды T_x , T_y , и T_z) и относительно осей AB , EF , MN и PQ (рис.8.4). Измерьте длину ребер параллелепипеда. Вычислите средние значения всех измеренных величин и их ошибки. Убедитесь в том, что найденные средние значения измеренных величин с хорошей степенью точности связаны соотношениями (8.35) – (8.38). Результаты измерений и вычислений занесите в табл.8.3.

Таблица 8.3

№ опыта	T_x (с)	T_y (с)	T_z (с)	T_{AB} (с)	T_{EF} (с)	T_{MN} (с)	T_{PQ} (с)	a (м)	b (м)	c (м)
1										
2										
3										
Ср. знач.										
Ошибки										

16. Используя средние значения периодов колебаний T_0 , T_x , T_y и T_z и значение момента инерции I_0 , найдите по формулам (8.24) главные центральные моменты I_x , I_y и I_z несимметричного параллелепипеда. Оцените ошибки ΔI_x , ΔI_y и ΔI_z как ошибки косвенных измерений по формулам, полученным из (8.24).

17. По формуле (8.21) вычислите постоянную D момента упругих сил. Оцените ошибки полученного значения:

$$\varepsilon_D = \sqrt{\varepsilon_{I_0}^2 + 4\varepsilon_{T_0}^2}, \quad \Delta D = D \cdot \varepsilon_D / 100\%,$$

где $\varepsilon_{I_0} = (\Delta I_0 / I_0) \cdot 100\%$, $\varepsilon_{T_0} = (\Delta T_0 / T_0) \cdot 100\%$.

18. После завершения работы с подвесом отключите его от сети.

Контрольные вопросы

1. Что называется моментом инерции тела?
2. Как вычислить момент инерции тела? Покажите, что момент инерции однородного куба относительно оси, проходящей через его центр $I = (1/6)ma^2$.
3. Выведите формулу $T = 2\pi\sqrt{I/D}$.
4. Выведите формулы для расчета абсолютных и относительных ошибок значений главных центральных моментов инерции несимметричного параллелепипеда, вычисляемых по формулам (8.24).

Библиографический список

1. Хайкин С. Э. Физические основы механики. М., «Наука», 1971.
2. Стрелков С. П. Механика. М., «Наука», 1975.

Лабораторная работа № Д-9 ИЗУЧЕНИЕ ПРЕЦЕССИИ ГИРОСКОПА

Гироскопом называется массивное однородное тело вращения, быстро вращающееся относительно одной из главных осей инерции. Из определения следует, что гироскоп обладает осью симметрии, которая служит одной из главных осей инерции, поскольку материал гироскопа однороден. Обычно за ось вращения гироскопа выбирается главная ось инерции, которой соответствует максимальный момент инерции I . Эту ось называют *осью гироскопа*.

Слово «гироскоп», буквально означающее «указатель вращения», было введено в 1852 году французским физиком Фуко, который назвал так построенный им прибор для демонстрации суточного вращения Земли. Примером гироскопа может служить волчок, имеющий неподвижную точку O (рис.9.1).

Наиболее простым гироскопическим прибором является гироскоп в кардановом подвесе (рис.9.2). Схема его следующая: гироскопом является диск, вращающийся вокруг своей оси симметрии AA' . При этом ось вращения установлена в подшипниках, укрепленных во внутреннем кольце, который может свободно вращаться вокруг оси BB' . Вращение внутреннего кольца происходит в подшипниках, укрепленных в наружном кольце. Наконец, наружное кольцо может свободно вращаться вокруг оси CC' , неподвижно укрепленной в подшипниках. Таким образом, гироскоп может совершать три независимых друг от друга вращения вокруг осей, пересекающихся в одной точке в центре диска. Центр диска при вращении остается неподвижным. Примечательно, что в этой же точке находится центр масс и диска с осью, и колец, т. е. центр масс всей системы.

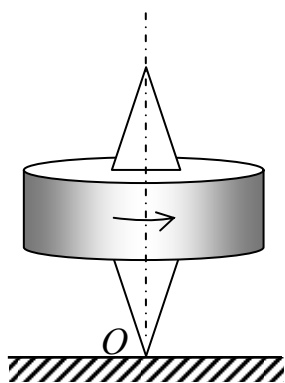


Рис.9.1. Волчок

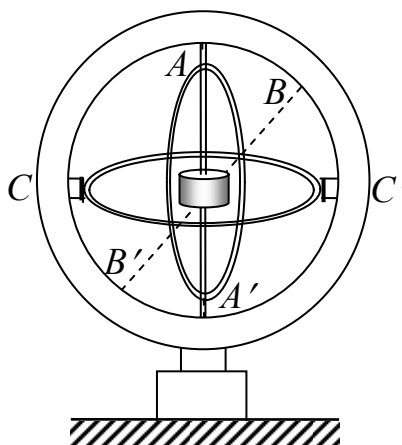


Рис.9.2. Гироскоп
в кардановом подвесе

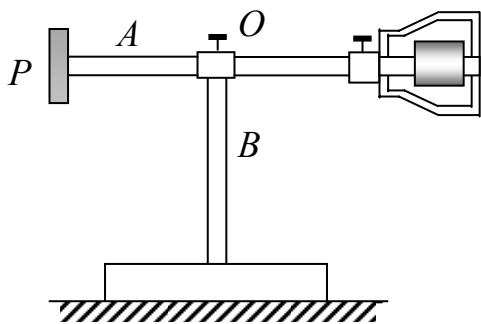


Рис.9.3.Гироскоп

Для демонстрации различных свойств гироскопа, а также для проведения эксперимента, удобен гироскоп с несколько иной конструкцией карданова подвеса (рис.9.3). Стержень A может вращаться вокруг стойки B в горизонтальной и вертикальной плоскостях (в вертикальной плоскости с некоторым ограничением). Кольцо, в котором укреплена ось вращения тела гироскопа, насажено на конец стержня A .

Для того чтобы центр масс системы совместить с точкой O пересечения всех трех осей, на противоположном конце стержня имеется противовес в виде груза P , который можно перемещать по стержню. Гироскопы обладают рядом специфических свойств, позволяющих широко использовать их в технике, особенно в системах навигационного оборудования.

Движение гироскопа, как вращение твердого тела, определяется уравнением

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}, \quad (9.1)$$

где \vec{L} – момент импульса гироскопа, \vec{M} – момент сил, действующих на гироскоп. Для случая, когда на гироскоп не действуют внешние силы или их равнодействующая равна нулю (гироскоп в кардановом подвесе), имеем

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0, \text{ т. е. } \vec{L} = const \quad (9.2)$$

Таким образом, вектор

$$\vec{L} = I\vec{\omega}_0, \quad (9.3)$$

направленный вдоль оси вращения гироскопа остается неподвижным в пространстве, следовательно, ось гироскопа сохраняет свое положение в пространстве неизменным. Именно это свойство гироскопа в кардановом подвесе широко используется при конструировании гироскопических компасов в современных навигационных устройствах.

При действии внешних сил (например, сил трения, сил тяготения) момент \vec{M} отличен от нуля, и вектор \vec{L} будет изменять свое положение в пространстве. Движение оси момента импульса гироскопа, в результате действия на него внешних сил, называется *прецессией*. В этом случае на-

блюдаются угловые скорости вращения не только вокруг оси гироскопа, но и вокруг других возможных осей вращения.

Совместим с твердым телом систему координат $x y z$, направив ось z вдоль оси гироскопа (рис.9.4). Тогда для свободного движения гироскопа (рис.9.4)

$$L_x = 0; L_y = 0; L_z = I_z \omega_z$$

и соответственно $\omega_x = 0; \omega_y = 0$. Для движения под действием момента внешних сил (рис.9.5)

$$\begin{aligned} L_x &= I_x \omega_x = I_x \omega_{1x} \\ L_y &= I_y \omega_y = I_y \omega_{1y} \\ L_z &= I_z \omega_z = I_z (\omega_0 + \omega_{1z}) \end{aligned} \quad (9.4)$$

т. е. вектор \vec{L} не совпадает с осью гироскопа

$$\begin{aligned} \vec{L} &= L_x \vec{i} + L_y \vec{j} + L_z \vec{k} \\ \vec{\omega} &= \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k} \end{aligned} \quad (9.5)$$

Ясно, что и вращение гироскопа осуществляется вокруг некоторой мгновенной оси вращения с угловой скоростью

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\omega}_1, \quad (9.6)$$

где $\vec{\omega}_1 = \omega_{1x} \vec{i} + \omega_{1y} \vec{j} + \omega_{1z} \vec{k}$.

Таким образом, при изучении гироскопа следует различать несовпадающие друг с другом:

- 1) ось вращения гироскопа OO' ;
- 2) мгновенную ось вращения OO'' ;
- 3) ось момента импульса OO''' .

Описание движения гироскопа является сложной математической задачей. Решением этой задачи занимались такие выдающиеся математики, как Эйлер, Пуассон, Лагранж, Ковалевская и др. Однако в ряде практически важных случаях можно ввести ряд упрощающих допущений и перейти к более простой теории, так называемой элементарной теории гироскопа.

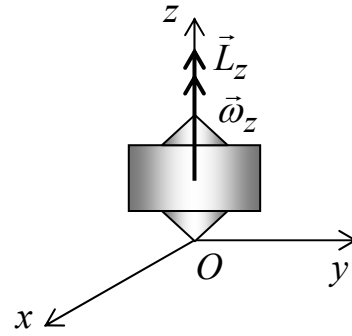


Рис.9.4. Вращение гироскопа вокруг оси

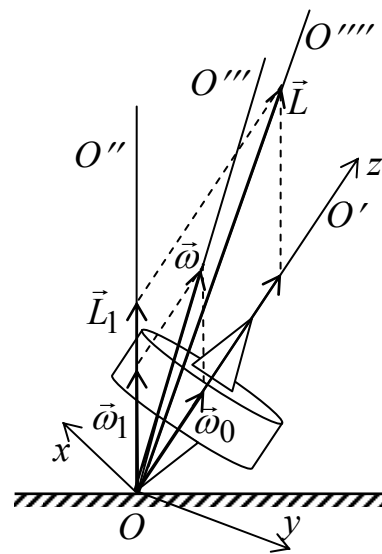


Рис.9.5. Вращение гироскопа под действием внешней силы

Для современных гироскопов угловая скорость ω_0 собственного вращения ротора достигает 3000 об/с и более, в то время как угловая скорость ω_1 оси гироскопа в наиболее неблагоприятных случаях не превышает 0,001 об/с. Следовательно, $\omega_0 \gg \omega_1$, $L_z \gg L_x$ и $L_z \gg L_y$. С учетом этого обстоятельства в элементарной теории гироскопа главный момент импульса гироскопа относительно неподвижной точки принимают равным

$$\vec{L} = I_z \vec{\omega}_0. \quad (9.7)$$

Тем самым предполагается, что вектор момента импульса направлен по оси гироскопа. Получается, что результирующий вектор $\vec{\omega}$ также направлен по оси гироскопа. Это и является основным допущением в элементарной теории гироскопа. Таким образом, изменение вектора \vec{L} означает изменение положения в пространстве оси гироскопа. Опишем несколько конкретных случаев возникновения прецессии на основе элементарной теории гироскопа.

Представим, что на уравновешенный гироскоп подействовала кратковременная сила. Поскольку $d\vec{L}/dt$ не будет равно нулю только во время действия этой кратковременной силы, ось гироскопа почти не изменит свое направление. Следовательно, ось свободного быстро вращающегося гироскопа нечувствительна к мгновенным ударным нагрузкам. В действительности ось гироскопа начнет совершать малые колебания с большой частотой (нутационные колебания), но в элементарной теории гироскопа этими колебаниями пренебрегают.

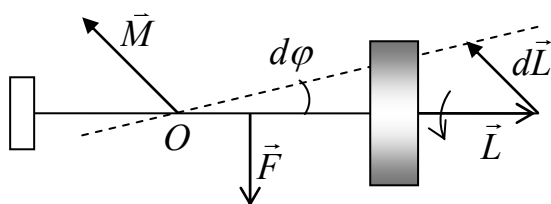


Рис.9.6. Действие на гироскоп постоянной силы

Рассмотрим действие на гироскоп постоянной силы (рис.9.6). Допустим, что сила \vec{F} , с которой мы подействовали на гироскоп, направлена вниз. Следовательно, вектор ее момента \vec{M} относительно точки O направлен от нас *за* чертеж. В этом же направлении получает приращение

вектор момента импульса $d\vec{L}$. Таким образом, новое значение вектора \vec{L} направлено *за* чертеж. В ту же сторону перемещаются ось момента импульса и ось гироскопа. Гироскоп, вместо того, чтобы двигаться по направлению силы \vec{F} *вниз*, поворачивается в перпендикулярной ей горизонтальной плоскости (в данном случае *против часовой стрелки*).

На рис.9.7 представлены еще несколько случаев прецессии гироскопа под действием моментов внешней силы разного направления. Они могут быть разобраны по чертежу без дополнительных объяснений. Для определения направления прецессионного движения оси гироскопа надо помнить, что: 1) ось момента импульса и ось гироскопа совпадают по направлению (приближенно); 2) изменение направления указанных осей происходит в направлении момента внешней силы, приложенной к гироскопу.

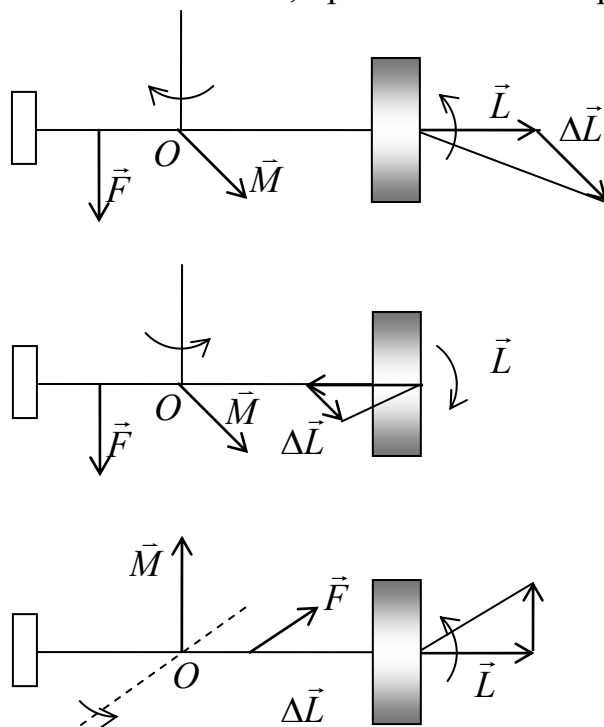


Рис.9.7.Вращение гироскопа под действием внешней силы

Определим угловую скорость прецессии. Пусть ось момента импульса под действием момента сил \vec{M} за время dt поворачивается на угол $d\varphi$ (рис.9.6). Приращение $d\vec{L}$ лежит в плоскости, перпендикулярной вектору \vec{L} , и, следовательно, изменяет его направление, а не величину. Из рисунка 9.6 видно, что

$$dL = Ld\varphi. \quad (9.8)$$

Подставив это значение dL в равенство (9.1), получим

$$M = L \frac{d\varphi}{dt}. \quad (9.9)$$

Но $\frac{d\varphi}{dt} = \omega_n$ – угловой скорости вращения оси момента импульса, т. е. угловой скорости прецессии. Таким образом

$$M = L \cdot \omega_n,$$

или

$$\omega_n = \frac{M}{L} = \frac{M}{I\omega}, \quad (9.10)$$

где I – момент инерции гироскопа, ω – его угловая скорость.

Практическая часть

Описание экспериментальной установки

Общий вид гироскопа ФРМ-10 показан на рис.9.8. Установка состоит из основания 1, на котором жестко закреплены блок управления 14 и вертикальная стойка 2. На стойке жестко закреплен кронштейн 3, на котором укреплен гироскоп. В качестве гироскопа используется ротор 6 асинхронного электродвигателя, частота вращения которого достигает $10 \cdot 10^3$ об/мин. На ось двигателя насажен массивный маховик 8, защищенный экраном 9. С противоположной стороны на статоре двигателя укреплен стержень 10 с делениями и грузом 11. Двигатель закреплен на кронштейне 7 таким образом, что может поворачиваться вокруг горизонтальной оси. Угол поворота гироскопа вокруг горизонтальной оси можно считывать с помощью указателя 13 с диска 12, на котором нанесена измерительная шкала. Диск 12 имеет отверстия через каждые 5^0 , которые подсчитываются фотоэлектрическим датчиком 4. Информация об угле поворота гироскопа передается в блок управления 14. Маховик 8 также имеет по окружности отверстия, которые подсчитываются фотоэлектрическим датчиком 5. Информация о скорости оборотов электродвигателя передается в блок управления и измерений.

Упражнение 1. Определение момента импульса гироскопа

1. Перемещением груза 11 уравновесьте гироскоп, т. е. добейтесь того, чтобы штанга 10 заняла строго горизонтальное положение.

2. Включите электромотор, отрегулируйте обороты двигателя в пределах $3000 \div 5000$ об/мин и убедитесь, что в этом случае прецессия гироскопа отсутствует. Проверьте, достаточно ли быстро вращается ротор мотора: при легком постукивании по штанге она не должна менять своего по-

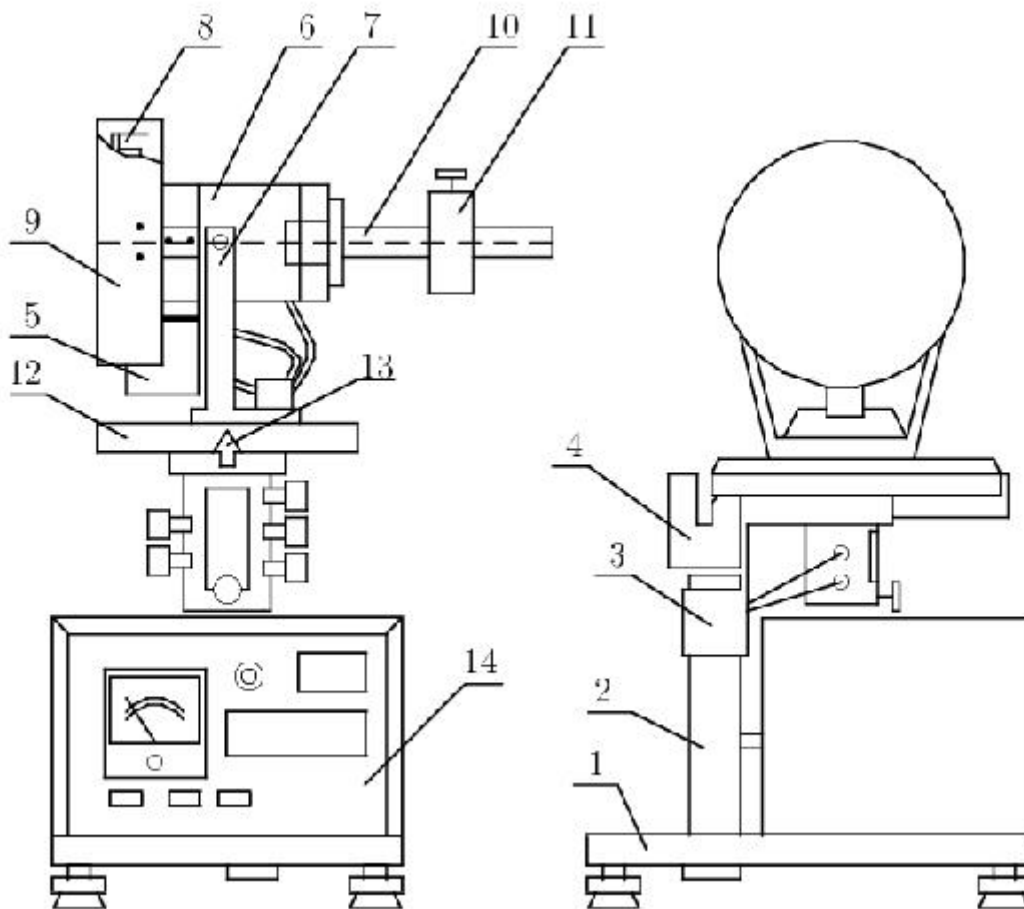


Рис.9.8. Установка ФПМ -10

ложения. Заметьте отсчет a_0 по шкале 10, соответствующий начальному положению груза.

3. Переместите груз 11 по стержню примерно на 2 см влево или вправо, создавая момент сил M ; при этом должна начаться прецессия гироскопа (стержень с грузом должен быть горизонтальным). Момент сил равен

$$M = mg(a - a_0), \quad (9.11)$$

где m – масса груза, a – отсчет по шкале, соответствующий данному положению груза.

4. Нажмите кнопку «Сброс» и после поворота гироскопа на некоторый угол ($>30^\circ$) нажмите кнопку «Стоп». Отсчитайте угол поворота α и время прецессии t .

5. Вычислите угловую скорость прецессии

$$\omega_n = \frac{\alpha}{57,3 \cdot t}. \quad (9.12)$$

6. Перемещая груз по стержню, повторите п. п. 3 - 5 при 5-ти различных положениях груза. Результаты опыта представьте в виде графика $\omega_n = f(M)$.

7. Вычислите момент импульса гироскопа

$$L = \frac{M}{\omega_n}. \quad (9.13)$$

Оцените точность полученного результата. Результаты измерений и вычислений занесите в табл.9.1.

Таблица 9.1

		$a_0 =$				$m =$			
№ п/п	a (м)	$a-a_0$ (м)	M (Н·м)	α	t (с)	ω_n (с ⁻¹)	L (кг·м ² ·с ⁻¹)	ε_L (%)	$L \pm \Delta L$ (кг·м ² ·с ⁻¹)
1									
2									
3									
4									
5									
							L_{cp}		

Упражнение 2. Определение момента инерции гироскопа

1. Установите гироскоп при оборотах двигателя $\omega_0 \approx 3000$ об/мин и определите угловую скорость прецессии ω_n по методике, описанной в п.п. 4 – 5 *Упражнения 1*.

2. Не меняя момент внешней силы M , измените ручкой «Рег. скорости» скорость вращения электродвигателя ω_0 . Определите скорость прецессии ω_n .

3. Повторите измерения, меняя 4 ÷ 5 раз угловую скорость вращения гироскопа ω_0 (в пределах 3000 ÷ 7000 об/мин). Результаты опыта представьте в виде графика $\omega_n = f(\omega_0)$.

4. Вычислите момент инерции гироскопа по формуле

$$I = \frac{M}{\omega_n \cdot \omega_0}. \quad (9.14)$$

Оцените точность полученного значения. Результаты измерений и вычислений занесите в табл.9.2.

Таблица 9.2

№ опыта	$a_0 =$			$m =$		$M =$			
	ω_0 (1/с)	α (град)	t (с)	ω_n (1/с)	I (кг·м ²)	$\sqrt{\frac{\sum \Delta I_i^2}{n(n-1)}}$	ΔI (кг·м ²)	ε_I (%)	$I \pm \Delta I$ (кг·м ²)
1									
2									
3									
4									
5									
					I_{cp}				

Контрольные вопросы

1. Что собой представляет гироскоп? Каковы его основные свойства?
2. Объясните возникновение прецессии. От чего зависит скорость прецессии?
3. Получите формулу (9.10) для вычисления угловой скорости прецессии.
4. Как в установке можно создать вращательный момент?
5. Получите формулу для момента импульса гироскопа (9.13).
6. Как определить момент инерции гироскопа? От чего он зависит? Получите формулу (9.14)

Библиографический список

1. Иродов И. Е. Основные законы механики. М., «Высшая школа», 1985, с 132-161.
2. Стрелков С. П. Механика. М., «Наука», 1975, с.175-267
3. Сивухин Д. В. Общий курс физики, т.1, механика. М., «Наука», 1974, с.230-301.

Лабораторная работа № Д-10

АБСОЛЮТНО УПРУГИЙ И НЕУПРУГИЙ УДАРЫ

При соударении тел друг с другом они претерпевают деформации. При этом кинетическая энергия, которой обладали тела перед ударом, частично или полностью переходит в потенциальную энергию упругой деформации и внутреннюю энергию тела. Существует два предельных типа удара: абсолютно упругий и абсолютно неупругий.

Абсолютно упругим называется такой удар, при котором кинетическая энергия тел не переходит в другие (не механические) виды энергии. При таком ударе кинетическая энергия переходит полностью или частично в потенциальную энергию упругой деформации. Затем тела возвращаются к первоначальной форме, отталкивая друг друга. В итоге потенциальная энергия упругой деформации снова переходит в кинетическую энергию и тела разлетаются со скоростями, величины и направления которых определяются двумя условиями: сохранением полной механической энергии и сохранением импульса систем тел.

Абсолютно неупругий удар характеризуется тем, что потенциальной энергии деформации не возникает, кинетическая энергия полностью или частично превращается во внутреннюю энергию. После удара столкнувшиеся тела либо движутся с одинаковой скоростью, либо покоятся. При абсолютно неупругом ударе выполняется лишь закон сохранения импульса, закон же сохранения механической энергии не выполняется.

Упражнение 1. Определение времени соударения упругого шара о стенку

Методика эксперимента

Установка для измерения времени удара представлена на рис.10.1. На массивном основании 1 закреплена стойка 4 с кронштейном 6, в котором закреплен стержень 5. На стержне бифилярно подвешен стальной шар 10. Шар может отводиться на угол в пределах $0 - 30^{\circ}$ от вертикального положения. Угол отсчитывается по шкале 9. Шар удерживается в исходном положении электромагнитом 8, укрепленным на штанге 7. На основании установки размещен куб 3, с укрепленными на нем образцами различных материалов 2. Куб обладает большой массой и может служить неподвижной стенкой для удара шара. Куб можно поворачивать вокруг своей оси и фиксировать его грани перпендикулярно направлению удара с помощью винта 12.

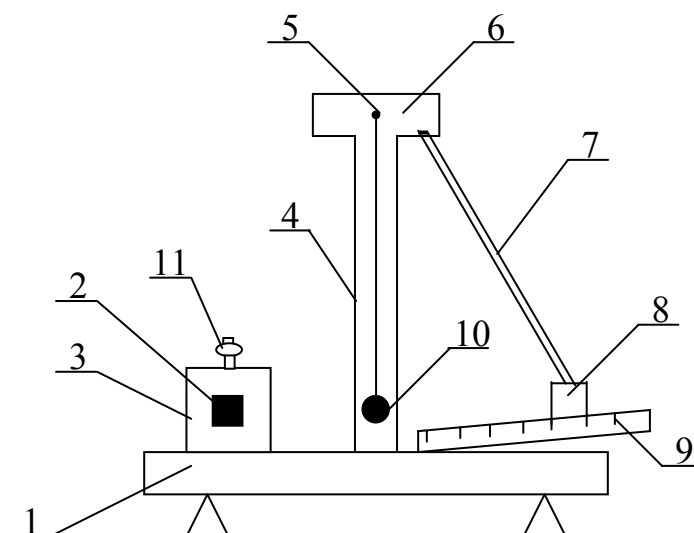


Рис.10.1.Установка для определения времени соударения

Время удара шара о стенку зависит от скорости шара во время удара, от радиуса шара и от упругих постоянных как шара, так и стенки. Если шар и стенку (куб) соединить проводником с заряженным конденсатором, то во время удара конденсатор будет разряжаться. Поэтому время удара можно отождествить со временем разрядки конденсатора. Конденсатор разряжается по закону

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/RC}, \quad (10.1)$$

где C – емкость конденсатора, R – сопротивление цепи при разрядке, t – время разрядки, Q_0 – начальный заряд на конденсаторе, $Q(t)$ – заряд, оставшийся на конденсаторе к моменту времени t . Следовательно, время удара

$$t = RC \ln \frac{Q_0}{Q(t)}. \quad (10.2)$$

Очевидно, что величина заряда Q пропорциональна напряжению на емкости U . Таким образом

$$t = RC \ln \frac{U_0}{U(t)}. \quad (10.3)$$

Этой зависимостью и пользуются в настоящей работе при измерении времени удара.

Практическая часть

Принципиальная схема электрической измерительной цепи показана на рис.10.2, где 1, 2 – клеммы «Электромагнит», 3, 4 – «Зарядка емкости», 5, 6 – «Батарея», 7, 8 – «Измерения», k_3 – замыкатель цепи «шар – образец».

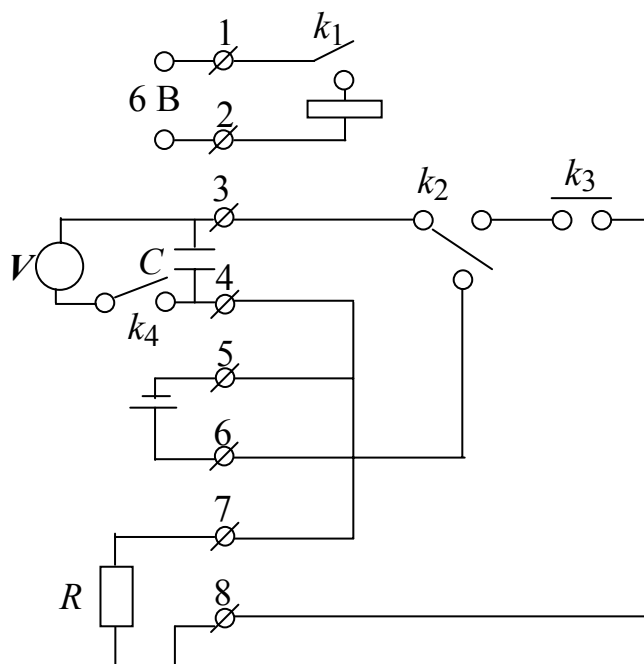


Рис.10.2.Электрическая схема измерительной цепи

1. Отведите стальной шар в правое крайнее положение и включите ключом k_1 электромагнит для его удержания.

2. Включите клемму «Зарядка емкости» (ключ k_2), затем переключите ее на «измерение»; ключом k_4 соедините конденсатор с вольтметром и измерьте напряжение на емкости U_0 .

3. Вновь зарядите конденсатор и переключите клемму на «Измерение». Клеммой «электромагнит» выключите электромагнит, удерживающий шар. После одного удара шара о куб поймайте шар и, включив электромагнит, снова отведите его в крайнее правое положение. Соедините конденсатор с вольтметром и измерьте напряжение на емкости $U(t)$.

4. Время соударения определите по формуле (10.3). Все измерения повторите 3 – 5 раз.

5. Поверните куб на 90^0 , открепив винт 12. Поставьте плоский образец перпендикулярно направлению удара. Определите время удара стального

шара о различные плоские образцы в соответствии с п. п. 1 – 4. Материалы плоских образцов: сталь, латунь, сплав алюминия, свинец.

6. Оцените точность измерений времени удара, используя формулы:

$$\Delta t = RC \sqrt{\left(\frac{\Delta U_0}{U_0}\right)^2 + \left(\frac{\Delta U}{U}\right)^2}, \quad \varepsilon_t = \frac{\Delta t}{t} \cdot 100\%.$$

7. Результаты измерений и вычислений занесите в таблицы для каждого образца. (Образец заполнения — табл.10.1).

Таблица 10.1

Материал образца	R =			C =			
	№ опыта	U_0 (В)	U (В)	t (с)	Δt (с)	ε_t (%)	$t \pm \Delta t$ (с)
	1						
	2						
	3						
		U_{0cp}	U_{cp}				

Упражнение 2. Проверка закона сохранения импульса

Методика эксперимента

Закон сохранения импульса можно использовать при рассмотрении как упругого, так и неупругого удара, поскольку время удара мало (об этом можно судить по результатам первого упражнения). Рассмотрим удар упругих шаров. Если шар массой m_1 , движущийся со скоростью \vec{v}_1 , упруго соударяется с неподвижным шаром массой m_2 , то согласно закону сохранения импульса, справедливо следующее равенство:

$$m_1 \vec{v}_1 = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2, \quad (10.4)$$

где \vec{u}_1 и \vec{u}_2 – скорости шаров после удара. Так как после удара шары разлетаются в разные стороны, то векторное уравнение (10.4) в проекции на выбранное направление (направление движения бьющего шара до удара) будет иметь вид

$$m_1 v_1 = -m_1 u_1 + m_2 u_2. \quad (10.5)$$

Пусть шары висят на нитях длиной l (рис.10.3). Скорости шаров до и после удара

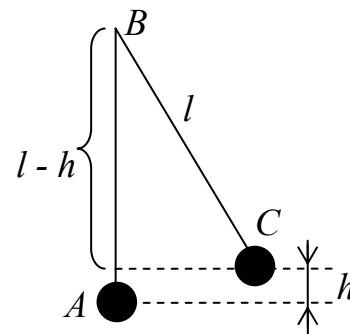


Рис.10.3. Шарик, поднятый на высоту h

можно определить, зная высоту, с которой первый шар начинает движение, и высоту подъема шаров после удара. Найдем скорость первого шара до соударения. Для этого запишем закон сохранения энергии для движения этого шара без учета потерь энергии на преодоление сил сопротивления:

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = mgh, \quad (10.6)$$

где $v_1 = \sqrt{2gh}$ – скорость первого шара до удара (в точке A), h – высота, на которую был поднят шар до удара (точка C) при отклонении его на угол α_0 .

Аналогично для шаров после удара можно записать:

$$u_1 = \sqrt{2gh_1}, \quad u_2 = \sqrt{2gh_2}, \quad (10.7)$$

где h_1 и h_2 – высоты, на которые поднялись шары после удара. Из треугольника ABC находим

$$l - h = l \cos \alpha_0, \quad h = l(1 - \cos \alpha_0) = 2l \sin^2 \frac{\alpha_0}{2}, \quad (10.8)$$

где l – длина подвеса. Тогда

$$v_1 = 2 \sin \frac{\alpha_0}{2} \sqrt{gl}, \quad (10.9)$$

а скорости шаров после удара

$$u_1 = 2 \sin \frac{\alpha_1}{2} \sqrt{gl}, \quad u_2 = 2 \sin \frac{\alpha_2}{2} \sqrt{gl}, \quad (10.10)$$

где α_1 и α_2 – углы отклонения шаров после удара.

Формулы (10.9) и (10.10) получены в предположении, что сил трения нет. В действительности на шары действуют силы трения о воздух, и трение есть в точках подвеса. В результате будут наблюдаться колебания, затухающие по экспоненциальному закону, которые характеризуются декрементом затухания δ :

$$\delta = \frac{1}{N} \ln 2, \quad (10.11)$$

где N – число полных колебаний, после которых амплитуда уменьшается в два раза. Чтобы учесть затухание колебаний, амплитудное значение скоростей до и после удара нужно умножить на величину $e^{-\delta/4}$. Следовательно, формулы (10.9) и (10.10) будут иметь вид

$$\begin{aligned}
v_1 &= 2e^{-\delta_1/4} \sin \frac{\alpha_0}{2} \sqrt{gl}, \\
u_1 &= 2e^{-\delta_1/4} \sin \frac{\alpha_1}{2} \sqrt{gl}, \\
u_2 &= 2e^{-\delta_2/4} \sin \frac{\alpha_2}{2} \sqrt{gl},
\end{aligned}
\tag{10.12}$$

где δ_1 и δ_2 – декременты затухания для первого и второго шара. Подставляя значения скоростей из (10.12) в уравнение (10.5), получим

$$m_1 e^{-\delta_1/4} \sin \frac{\alpha_0}{2} = -m_1 e^{-\delta_1/4} \sin \frac{\alpha_1}{2} + m_2 e^{-\delta_2/4} \sin \frac{\alpha_2}{2}.
\tag{10.13}$$

Это равенство можно привести к виду

$$m_1 e^{-\delta_1/4} \left(\sin \frac{\alpha_0}{2} + \sin \frac{\alpha_1}{2} \right) = m_2 e^{-\delta_2/4} \sin \frac{\alpha_2}{2}
\tag{10.14}$$

и проверить его на опыте.

Рассмотрим теперь удар неупругих шаров. В этом случае шары после удара «сцепляются» и далее двигаются как одно целое. Запишем для этого случая закон сохранения импульса:

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) u,
\tag{10.15}$$

где u – общая скорость шаров после удара. Следовательно

$$m_1 e^{-\delta_1/4} \sin \frac{\alpha_0}{2} = (m_1 + m_2) e^{-\delta_3/4} \sin \frac{\alpha}{2},
\tag{10.16}$$

где α – отклонение шаров после удара.

На рис.10.4 приведена схема установки, которая используется для проверки закона сохранения импульса. Установка представляет собой треногу 1 на трех подъемных винтах. На треноге укреплена труба 2, несущая бифилярный подвес шаров 3 и 4. Электромагнит 5, удерживающий шар, подвешен на штанге 6. Отсчет отклонений шаров производится по шкале 7, проградуированной в градусной мере. Шары подвешены в виде маятников и соударение между ними происходит в положении равновесия.

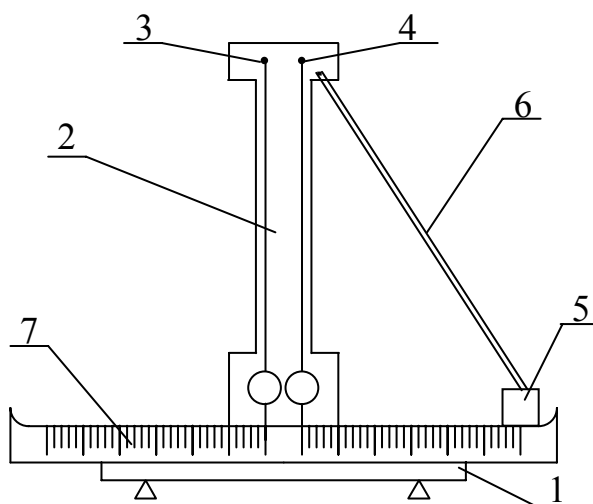


Рис.10.4.Установка для проверки закона сохранения импульса

Практическая часть

1. Получите логарифмический декремент затухания для каждого упругого шара. Для этого один шар отведите в сторону, а другой приведите в колебательное движение. Просчитайте число колебаний N , за которое амплитуда уменьшается в два раза. По формуле (10.11) вычислите логарифмические декременты затухания δ_1 и δ_2 .

2. Отведите упругий шар на максимальный угол α_0 и включите электромагнит, удерживающий шар в этом положении. При помощи ключа разомкните цепь электромагнита и отметьте отсчеты углов α_1 и α_2 , соответствующие максимальным отклонениям шаров после первого удара. Измерения повторите $3 \div 5$ раз.

3. Определите массы (m_1 и m_2) сталкивающихся упругих (стальных) и неупругих (пластилиновых) шаров взвешиванием на весах.

4. Используя средние значения полученных углов α_1 и α_2 , вычислите левую и правую части уравнения (10.14). Для удобства можно ввести соответствующие обозначения:

$$A = m_1 e^{-\delta_1/4} \left(\sin \frac{\alpha_0}{2} + \sin \frac{\alpha_1}{2} \right),$$

$$B = m_2 e^{-\delta_2/4} \sin \frac{\alpha_2}{2}.$$

Равенство $A = B$ в пределах точности измерений является доказательством того, что закон сохранения импульса справедлив для абсолютно упругого удара.

5. Оцените ошибки измерений левой и правой частей уравнения (10.14), считая, что в основном ошибки вызваны неточностью в измерении углов α . Используйте формулы

$$\varepsilon_A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{(\cos \alpha_0 / 2)^2 (\Delta \alpha_0)^2 + (\cos \alpha_1 / 2)^2 (\Delta \alpha_1)^2}{(\sin \alpha_0 / 2 + \sin \alpha_1 / 2)^2}} \cdot 100\%,$$

$$\Delta A = A \cdot \varepsilon_A \cdot 0,01$$

$$\varepsilon_B = \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha_2}{2} \cdot (\Delta \alpha_2)^2 \cdot 100\%, \quad \Delta B = B \cdot \varepsilon_B \cdot 0,01.$$

6. Результаты измерений и вычислений занесите в табл.10.2 и 10.3.

Упругий удар

Таблица 10.2

№ опыта	n_1	n_2	δ_1	δ_2
1				
2				
3				
	n_{1cp}	n_{2cp}		

Таблица 10.3

№ опыта	$m_1 =$				$m_2 =$			
	α_0 (град.)	$\Delta \alpha_0$ (град.)	α_1 (град.)	$\Delta \alpha_1$ (град.)	α_2 (град.)	$\Delta \alpha_2$ (град.)	$A \pm \Delta A$ (кг)	$B \pm \Delta B$ (кг)
1								
2								
3								
	α_{0cp}		α_{1cp}		α_{2cp}			

7. Смените упругие шары на пластилиновые. Способом, описанным в п.1, определите логарифмический декремент затухания колебаний ударяющего шара δ_1 и обоих шаров вместе δ_3 .

8. Отведите неупругий шар на максимальный угол α_0 и включите электромагнит, удерживающий шар в этом положении. При помощи ключа

разомкните цепь электромагнита и отметьте отсчет угла α , соответствующий максимальному отклонению шаров после первого удара. Измерения повторите 3 ÷ 5 раз.

9. Используя средние значения угла α , вычислите левую и правую части уравнения (10.16). Для удобства введем обозначения:

$$A = m_1 e^{-\delta_1/4} \sin \frac{\alpha_0}{2},$$

$$B = (m_1 + m_2) e^{-\delta_3/4} \sin \frac{\alpha}{2}$$

Равенство $A = B$ в пределах точности измерений является доказательством того, что закон сохранения импульса справедлив для абсолютно неупругого удара.

10. Оцените ошибки измерений левой и правой частей уравнения (10.16), считая, что в основном ошибки вызваны неточностью в измерении углов α . Используйте формулы:

$$\varepsilon_A = \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha_0}{2} \cdot (\Delta\alpha_0)^2 \cdot 100\%, \quad \Delta A = A \cdot \varepsilon_A \cdot 0,01,$$

$$\varepsilon_B = \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} \cdot (\Delta\alpha)^2 \cdot 100\%, \quad \Delta B = B \cdot \varepsilon_B \cdot 0,01.$$

11. Результаты измерений и вычислений занесите в табл. 10.4 и 10.5.

Неупругий удар

Таблица 10.4

№ опыта	n_1	n_2	δ_1	δ_3
1				
2				
3				
	n_{1cp}	n_{2cp}		

Таблица 10.5

		$m_1 =$			$m_2 =$	
№ опыта	α_0 (град.)	$\Delta\alpha_0$ (град.)	α (град.)	$\Delta\alpha$ (град.)	$A \pm \Delta A$ (кг)	$B \pm \Delta B$ (кг)
1						
2						
3						
	α_{0cp}		α_{cp}			

Контрольные вопросы

1. Какой удар называется абсолютно упругим? Абсолютно неупругим?
2. Сформулируйте закон сохранения импульса.
3. При каких условиях можно применить закон сохранения импульса к системе тел?
4. От чего зависит время соударения шаров?
5. Проанализируйте возможные причины ошибок эксперимента.

Библиографический список

1. Хайкин С. Э. Физические основы механики. М. Физматгиз, 1963, гл.3, § 26, гл.4 §§ 32,33.
2. Стрелков С. П. Механика. М., «Наука», 1975, §§ 24, 25, 33-35.
3. Сивухин Д. В. Общий курс физики, т.1 Механика, Наука. М., 1974, гл.4 §§ 26, 27, 38.

Учебное издание

**Бирюков Александр Александрович
Воробьева Эмма Николаевна
Данилюк Борис Васильевич
Мартынова Галина Петровна**

ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Лабораторный практикум по общей физике

Механика

Печатается в авторской редакции
Компьютерная верстка, макет В.И. Никонов

Подписано в печать 25.10.05

Гарнитура Times New Roman. Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Печать оперативная.

Усл.-печ. л. 7,0. Уч.-изд. л. 5,11. Тираж 300 экз. Заказ № 547

Издательство «Универс групп», 443011, Самара, ул. Академика Павлова, 1

Отпечатано ООО «Универс групп»