Министерство высшего и среднего специального образования
РСФСР

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени авиационный
институт имени академика С.П.Королева

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В МАШИННОЙ ГРАФИКЕ

Куйбышев 1984

УДК 681.3

В работе рассмотрены различные виды преобразований геометрических объектов в машинной графике: перенос объекта, масштабирование, вращение вокруг осей координат, ортогональное и центральное проецирование. Для студентов, выполняющих самостоятельную работу по геометрическим преобразованиям, приведена схема индивидуального задания и набор вариантов исходных данных.

Методические указания разработаны на кафедре конструкции и проектирования летательных аппаратов Куйбышевского авиационного института и предназначены для студентов 0535 специальности, изучающих курс "Основы САПР", а также могут быть использованы при обучении студентов других машиностроительных специальностей, на ФПК ИТР и преподавателей.

Составители: А.В.Соловов,
В.П.Пересыпкин

Рецензенты: В.Я.Щеголев,
кафедра технической кибернетики Куйбышевского авиационного института

Цель работы: познакомить студентов с геометрическими преобразованиями, используемыми в машинной графике, и привить практические навыки в проведении геометрических преобразований.

Порядок проведения занятия:

1. Студенты предварительно, во внеаудиторное время, изучают данное руководство и выполняют самостоятельное задание, выданное заранее, на предыдущем занятии.

2. Во время проведения аудиторного занятия студенты заканчивают выполнение самостоятельного задания и сдают его преподавателю.

3. При сдаче выполненного индивидуального задания производится опрос по контрольным вопросам с целью выявления степени самостоятельности при выполнении задания и качества усвоения теоретического материала.

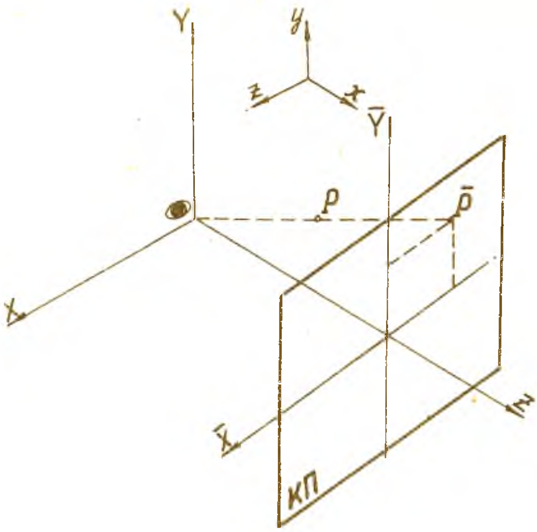
Примечание. При контрольном опросе учитывается не только правильность выполнения, но также и качество оформления задания: четкость поясняющих рисунков, аккуратность в написании формул и т.д.

1. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

1.1. Термины и определения

Реальное пространство (РП). Это трехмерное пространство, в котором существует геометрический объект. Положение объекта в РП определяется в декартовой системе координат xyz.

Система координат наблюдателя. Представляет собой левую прямоугольную систему координат XYZ, начало которой находится в точке зрения наблюдателя. Ось Z направлена вперед по лучу зрения, ось X – вправо, ось Y – вверх(рис.1).



Р и с. I. Системы координат машинной графики

Система координат наблюдателя жестко связана с положением точки зрения наблюдателя: при перемещении глаза и поворотах головы эта система координат также перемещается и поворачивается.

К а р т и н н а я п л о с к о с т ь (КП). Это плоскость РП, на которую проецируется изображаемый объект. КП ортогональна оси Z системы координат наблюдателя. Положение образа объекта на КП определяется двумерными координатами $\bar{X}$ и $\bar{Y}$. Начало системы координат КП располагается в точке пересечения КП с осью Z, а направления осей $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ этой системы координат совпадают с направлением осей X и Y системы координат наблюдателя (см. рис.I).

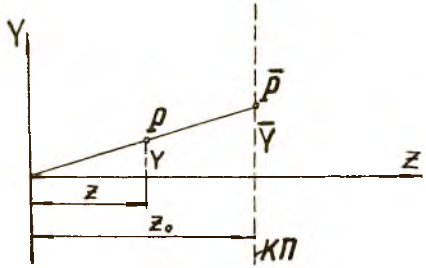
В и д ы п р о е ц и р о в а н и я. Изображение можно построить, непосредственно проецируя каждую точку объекта P из начала системы координат наблюдателя на КП (см. рис.I). Полученная таким образом проекция (точка $\bar{P}$) называется центральной проекцией, а соответствующий вид проецирования называется центральным проецированием (ЦП).

Координаты проецируемых точек при ЦП вычисляются достаточно просто. Если рассмотреть плоскость, образованную осями Y и Z, то из условия геометрического подобия (рис.2) можно записать следующее выражение, связывающее координаты точки P и ее центральной проекции $\bar{P}$:

$$\frac{\bar{Y}}{Z_0} = \frac{Y}{Z}. \qquad (1)$$

Отсюда

$$\bar{Y} = \frac{Z_0}{Z} Y. \qquad (2)$$



Р и с.2. Определение координат при центральном проецировании

Аналогично можно получить и выражение для вычисления второй координаты точки $\bar{P}$:

$$\bar{X} = \frac{Z_0}{Z} X. \qquad (3)$$

В частном случае, когда точка зрения наблюдателя находится в бесконечности и $Z_0 \approx Z$, а $Z_0/Z \to 1$ выражения (2) и (3) упрощаются и

$$\bar{X} = X; \quad \bar{Y} = Y. \qquad (4)$$

Такое проецирование принято называть ортогональным проецированием(ОП), а соответствующее изображение объекта - его ортогональной проекцией.

Следует отметить , что центральная или, как ее еще называют, перспективная проекция создает фактор глубины изображения, и поэтому часто при изображении пространственных объектов оказывается более наглядной, чем ортогональная проекция.

З а д а ч а г е о м е т р и ч е с к и х п р е о б р а з о в а н и й в м а ш и н н о й г р а ф и к е. Как уже отмечалось выше, изображение объекта на КП является двумерным, в то время как сам объект располагается в трехмерном РП. Образ объекта на КП зависит от вида проецирования (ЦП или ОП) и от положения точки зрения наблюдателя при ЦП или направления луча зрения при ОП.

Процесс преобразования координат x, y, z точек объекта в РП в координаты X, Y соответствующих точек изображения на КП и является задачей геометрических преобразований в машинной графике.

Следует отметить, что для получения изображения на экране дисплея или на столе чертежно-графического автомата в ряде случаев приходится еще решать задачи отсечения фрагментов изображения, не попавших в кадр, удаления невидимых линий, создания полутоновых изображений и др.

1.2. Геометрические преобразования

Геометрические преобразования могут быть четырех типов: преобразование переноса, масштабирование, поворот и преобразование проецирования.

П е р е н о с. Перенос системы координат производится путем вычитания из каждой координаты точек объекта положительной или отрицательной константы. Если обозначить параметры переноса через T_x (перенос в направлении оси x), T_y (перенос в направлении оси y), T_z (перенос в направлении оси z), то можно получить новые координаты точки в перенесенной системе координат:

$$[x_T\, y_T\, z_T] = [x\, y\, z] - [T_x\, T_y\, T_z] \tag{4}$$

или

$$P_T = P - T, \tag{5}$$

где $P_T = [x_T\, y_T\, z_T]$; $P = [x\, y\, z]$; $T = [T_x\, T_y\, T_z]$.

М а с ш т а б и р о в а н и е. Преобразование масштабирования выполняется с помощью операции

$$[x_S\, y_S\, z_S] = [x\, y\, z] \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & S_z \end{bmatrix} \tag{6}$$

или

$$P_S = P\,S. \tag{7}$$

Компоненты S_x, S_y, S_z матрицы масштабирования S являются масштабными множителями соответственно в x, y и z – направлениях. Если масштабные множители по модулю меньше единицы, то РП и изображение сжимаются; если они по модулю больше единицы, то РП и изображение растягиваются. Если $S_x = S_y = S_z$, то РП и изображение объекта растягиваются или сжимаются одинаково по всем направлениям. Отрицательные диагональные коэффициенты матрицы S можно использовать не только для масштабирования, но и для смены направления осей координат. Например, с помощью матрицы

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

можно произвести преобразование координат из правой системы координат в левую и наоборот – из левой в правую.

П о в о р о т ы. Преобразование общего поворота вокруг центра, совпадающего с началом системы координат, можно получить суперпозицией (наложением) трех последовательных вращений вокруг трех координатных осей. Например, при вращении системы координат вокруг оси z (рис.3) новые координаты точек объекта

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha, \\ y' &= x\sin\alpha + y\cos\alpha, \\ z' &= z. \end{aligned} \qquad (8)$$

Здесь и далее все расчетные формулы преобразований поворота получены для левой системы координат. Угол поворота считается положительным, если смотреть с конца оси вращения и поворачивать систему координат против часовой стрелки (так на рис.3 ось z направлена от чертежа в сторону наблюдателя).

Выражения (8) можно объединить в единую матричную формулу

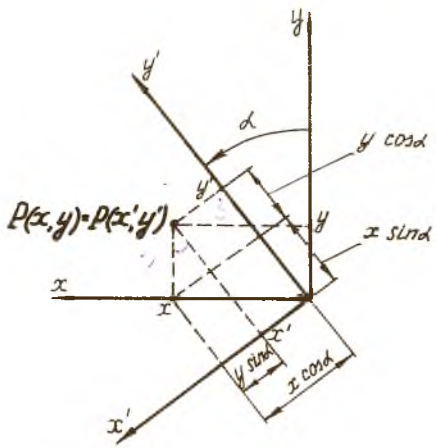
$$[x'y'z']_z = [xyz]\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (9)$$

или

$$P'_z = PR_z. \qquad (10)$$

Аналогично можно получить матричные формулы для поворота системы координат вокруг оси y на угол β :

$$[x'y'z']_y = [x\,y\,z]\begin{bmatrix}\cos\beta & 0 & -\sin\beta\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\beta & 0 & \cos\beta\end{bmatrix} \qquad (11)$$



Р и с.3. Поворот системы координат вокруг оси z

или

$$P'_y = PR_y, \qquad (12)$$

а также формулы для поворота системы координат вокруг оси x на угол γ:

$$[x'y'z']_x = [x\,y\,z]\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\gamma & \sin\gamma\\ 0 & -\sin\gamma & \cos\gamma\end{bmatrix} \qquad (13)$$

или

$$P'_x = PR_x \qquad (14)$$

Преобразование общего поворота системы координат относительно начала координат можно осуществить последовательным наложением трех поворотов. Математически это осуществляется с помощью простого перемножения матриц R_x, R_y, R_z. Следует, однако, иметь в виду, что перемножение матриц не является коммутативной операцией. Поэтому последовательность перемножения матриц должна соответствовать последовательности плоских поворотов. Например, если повороты выполняются последовательно вокруг оси z, затем вокруг оси y, а затем вокруг оси x, то матрица преобразования общего поворота

$$R = R_z R_y R_x , \tag{15}$$

а координаты точки в новой, повернутой системе координат

$$P' = P R. \tag{16}$$

П р е о б р а з о в а н и е   п р о е ц и р о в а н и я. Выше было показано, как получить координаты изображения в случае центральной проекции. Однако существенным недостатком формул (2) и (3), несмотря на их кажущуюся простоту, является нелинейность преобразования, обусловленная делением на координату z. Она не позволяет получить матрицу преобразования подобно тому, как это было сделано в других видах преобразований. Устранить этот недостаток можно, если все точки объекта представить в однородных координатах.

I.3. Единая матрица геометрических преобразований

О д н о р о д н ы е   к о о р д и н а т ы. Эти координаты играют основную роль в проективной геометрии. Хотя в рамках машинной графики рассматривается евклидова геометрия, а проективная геометрия не затрагивается, в данном случае полезно использовать однородные координаты как искусственный прием, с помощью которого производится линеаризация преобразования проецирования.

При использовании однородных координат вводится вектор $[z, s, t, u]$, который называется однородным вектором точки $[X\ Y\ Z]$. При этом $X = z/u$, $Y = s/u$, $Z = t/u$ или

$$[X\ Y\ Z\ 1] = \frac{1}{u}[z\ s\ t\ u]. \tag{17}$$

Величина u может быть выбрана произвольно с единственным ограничением $u \neq 0$. В дальнейшем используется значение $u = 1$.

8-6413

Рассматривая однородные координаты, можно все геометрические преобразования: центральное проецирование, поворот, перенос и масштабирование - представить в виде линейного преобразования однородных координат, т.е. получить единую матрицу преобразования размером (4x4).

Центральное проецирование. При центральном проецировании точка объекта, заданная в однородных координатах, отображается в точку проекции, получаемую также в однородных координатах, с помощью матрицы (4x4)

$$PT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/Z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad (18)$$

где Z_0 - расстояние от точки зрения наблюдателя до КП.

Умножение однородных координат точки объекта дает однородные координаты точки проекции на КП:

$$[X, Y, Z, Z/Z_0] = [X, Y, Z, 1]\, PT. \qquad (19)$$

Используя переход к обычным декартовым координатам (17), можно получить

$$\left[X\frac{Z_0}{Z}, Y\frac{Z_0}{Z}, Z_0, 1\right], \qquad (20)$$

что соответствует формулам (2) и (3).

Выражение (20) содержит три компоненты координат проекции точки на КП в системе координат наблюдателя. Первые две компоненты этого выражения являются координатами проекции точки в системе координат КП и используются непосредственно для построения изображения. Поскольку изображение является двумерным, то третья компонента координат (20) для всех точек одинакова и равна расстоянию от точки зрения наблюдателя до КП.

Обычно при переходе от однородных координат (19) к координатам (20) производят деление только первых двух компонент X и Y на четвертую компоненту Z/Z_0. Третью компоненту Z оставляют неизменной. Она определяет расстояние от точки зрения наблюдателя до соответствующих точек объекта и может использоваться для удаления невидимых линий на изображении.

Ортогональное проецирование. Является частным случаем центрального проецирования, когда $Z_0 \to \infty$. Матрица PT в случае ортогонального проецирования имеет вид

$$PT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (21)$$

П е р е н о с. Для переноса однородных координат используется матрица (4x4)

$$\bar{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -x_T & -y_T & -z_T & 1 \end{bmatrix}. \qquad (22)$$

М а с ш т а б и р о в а н и е. Осуществляется с помощью матрицы (4x4)

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (23)$$

П о в о р о т. Матрицы поворота R_x, Ry, R_z (см. выражения(8)-(14) для однородных координат точки объекта $[x\ y\ z\ 1]$ трансформируются в матрицы размером (4x4)

$$\bar{R}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ 0 & -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad (24)$$

$$\bar{R}_y = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad (25)$$

$$\bar{R}_z = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (26)$$

С учетом этих изменений выражение (15) выглядит как

$$\bar{R} = \bar{R}_z \bar{R}_y \bar{R}_x , \qquad (27)$$

где

$$\bar{R} = \begin{bmatrix} & R & & 0 \\ & & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (28)$$

– матрица преобразования (4x4) общего поворота для однородных координат точек объекта.

<u>Примечание</u>. Матрицы (22)-(26) даны без доказательства. Их правильность легко можно проверить, умножив однородные координаты точки $[x\ y\ z\ 1]$ поочередно на матрицы $\bar{T}, \bar{S}, \bar{R}_x, \bar{R}_y, \bar{R}_z$ и сопоставив полученные выражения с соответствующими выражениями (4-14).

Однородная матрица переноса, масштабирования, поворота и перспективы. Если предположить, что последовательно выполняются следующие преобразования: перенос, масштабирование, поворот и проецирование, то однородные координаты проекции точки объекта получаются путем умножения координат точки объекта на матрицу размером (4x4):

$$[X, Y, Z, Z/Z_0] = [x, y, z, 1]\, PR , \tag{29}$$

где

$$PR = \bar{T}\,\bar{S}\,\bar{R}\, PT \tag{30}$$

называется однородной матрицей геометрических преобразований. При ортогональном проецировании две первые компоненты результата матричного умножения (29) равны координатам соответствующей точки на КП. В случае центрального проецирования картинные координаты $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ получаются делением двух первых компонент на четвертую компоненту однородных координат.

2. ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ

В данной работе, в качестве объекта, для которого проводят геометрические преобразования, используют куб с ребром, равным 2 (рис.4).

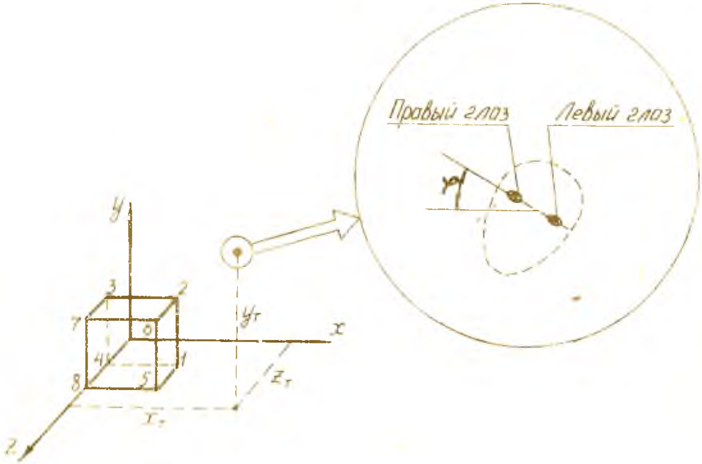


Рис.4. Положение куба и наблюдателя в исходной системе координат

В центр этого куба помещено начало исходной системы координат xyz. Координаты вершин куба даны в табл.I. Положение наблюдателя определяется параметрами x_T, y_T, z_T, φ (см.рис.4). Кроме этих параметров, в качестве исходных данных используется коэффициент растяжения S. Варианты исходных данных приведены в табл.2.

При выполнении задания необходимо получить координаты и нарисовать соответствующие изображения ортогональной и центральной проекций куба для направления проецирования из точки зрения наблюдателя в начало исходной системы координат.

Т а б л и ц а I

Координаты вершин куба

Координаты	Номера вершин куба							
	I	2	3	4	5	6	7	8
x	I	I	-I	-I	I	I	-I	-I
y	-I	I	I	-I	-I	I	I	-I
z	-I	-I	-I	-I	I	I	I	I

Последовательность выполнения задания приведена в приложении.

Сначала из табл.2 выписывают исходные данные x_T, y_T, z_T, φ, S. Далее, с использованием формул (I8), (21-28),(30) вычисляют единые матрицы преобразований для ортогонального и центрального проецирований. Затем, в соответствии с выражением (29), определяют координаты вершин куба на картинной плоскости для ортогональной и центральной проекций. Результаты вычислений оформляют в виде таблицы и эскизов ортогональной и центральной проекций куба на картинную плоскость (см. приложение).

Таблица 2

Варианты исходных данных

Номера вариантов	Параметры					Номера вариантов	Параметры					Номера вариантов	Параметры				
	X_T	Y_T	Z_T	φ°	S		X_T	Y_T	Z_T	φ°	S		X_T	Y_T	Z_T	φ°	S
I	3	3	3	0	I	II	-3	0	-3	0	0,5	2I	3	0	0	45	2
2	3	3	0	0	2	I2	-3	0	3	0	1,5	22	-3	0	0	45	1,5
3	3	3	-3	0	I	I3	3	-3	3	0	I	23	0	3	0	45	I
4	0	3	-3	0	I,5	I4	3	-3	0	0	2	24	0	-3	0	45	0,5
5	-3	3	-3	0	I	I5	3	-3	-3	0	I	25	0	0	3	45	2
6	-3	3	0	0	0,5	I6	0	-3	-3	0	0,5	26	2	2	2	0	2
7	-3	3	3	0	I	I7	-3	-3	-3	0	I						
8	0	3	3	0	2	I8	-3	-3	0	0	2						
9	3	0	3	0	2	I9	-3	-3	3	0	I						
I0	3	0	-3	0	2	20	0	0	3	0	2						

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

I.Как связаны между собой система координат наблюдателя и картинная плоскость?

2.Какие виды проецирования используют для построения изображений пространственных объектов?

3. Какой из двух видов проецирования (ЦП и ОП) является общим, а какой - частным?

4. Укажите виды геометрических преобразований.

5. Как осуществляются преобразования переноса, вращения, масштабирования и проецирования?

6. Чем отличаются однородные координаты от обычных трехмерных координат?

7. Какова связь трехмерных и однородных координат?

ЛИТЕРАТУРА

Ньюмен У.,Спрулл Р. Основы интерактивной машинной графики:Перевод с англ.-М.:Мир,1976.-573с.

Гилой В. Интерактивная машинная графика:Перевод с англ.-М.:Мир, 1981.-380с.

ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ ИНДИВИДУАЛЬНОГО ЗАДАНИЯ

Вариант № 26

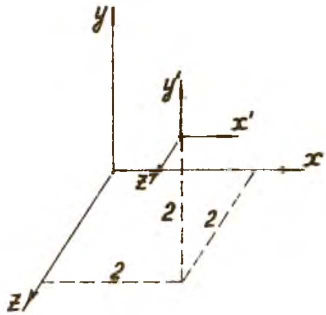
Исходные данные

$x_T=2 \quad y_T=2 \quad z_T=2 \quad \varphi=0 \quad S=2$

Перенос начала координат в точку зрения наблюдателя

$\bar{T}$ =

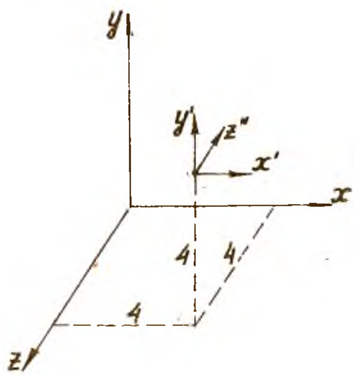
1	0	0	0
0	1	0	0
0	0	1	0
-2	-2	-2	1



Масштабирование и переход к левой системе координат

$\bar{S}$ =

2	0	0	0
0	2	0	0
0	0	-2	0
0	0	0	1



Произведение $\bar{T}\bar{S}\bar{R}$

$$\bar{T}\bar{S}\bar{R} = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -2 & 0 \\ \hline -4 & -4 & 4 & 1 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ \hline 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ \hline \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \sqrt{2} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & -2\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ \hline 0 & 2\frac{\sqrt{6}}{3} & -2\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ \hline -\sqrt{2} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & -2\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 4\sqrt{3} & 1 \\ \hline \end{array}$$

Матрицы проецирования

$$PT_{оп} = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \qquad PT_{цп} = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4\sqrt{3}} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Матрица преобразования для ортогональной проекции

$$PR_{оп} = \bar{T}\bar{S}\bar{R}\,PT_{оп} = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \sqrt{2} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & -2\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ \hline 0 & 2\frac{\sqrt{6}}{3} & -2\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ \hline -\sqrt{2} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & -2\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 4\sqrt{3} & 1 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \sqrt{2} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & -2\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ \hline 0 & 2\frac{\sqrt{6}}{3} & -2\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ \hline -\sqrt{2} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & -2\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 4\sqrt{3} & 0 \\ \hline \end{array}$$

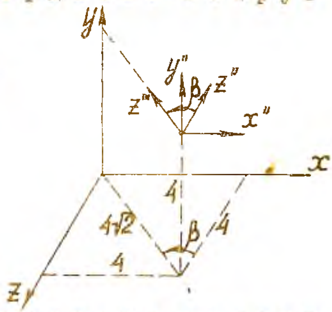
Матрица преобразования для центральной проекции

$$PR_{цп} = \bar{T}\bar{S}\bar{R}\,PT_{цп} = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \sqrt{2} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & -2\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ \hline 0 & 2\frac{\sqrt{6}}{3} & -2\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ \hline -\sqrt{2} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & -2\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 4\sqrt{3} & 1 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4\sqrt{3}} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \sqrt{2} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & -2\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{1}{6} \\ \hline 0 & 2\frac{\sqrt{6}}{3} & -2\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{1}{6} \\ \hline -\sqrt{2} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & -2\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{1}{6} \\ \hline 0 & 0 & 4\sqrt{3} & 1 \\ \hline \end{array}$$

Поворот системы координат вокруг оси y' на угол β

$$\cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\bar{R}_y = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Поворот системы координат вокруг оси x''' на угол $-\gamma$

$$\cos(-\gamma) = \frac{\sqrt{6}}{3} \qquad \sin(-\gamma) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\bar{R}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Матрица общего поворота

$$\bar{R} = \bar{R}_y \bar{R}_x = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Произведение $\bar{T}\bar{S}$

$$\bar{T}\bar{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ -4 & -4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Координаты объекта (куба) в системе координат наблюдателя для ортогональной проекции

$$
\begin{bmatrix} X & Y & Z & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \cdot PR_{оп} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & -2\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ 0 & 2\frac{\sqrt{6}}{3} & -2\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ -\sqrt{2} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & -2\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 4\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}
$$

Однородные координаты куба для центральной проекции

$$
\begin{bmatrix} X & Y & Z & Z/Z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \cdot PR_{цп} = \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & -2\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 2\frac{\sqrt{6}}{3} & -2\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\sqrt{2} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & -2\frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 4\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}
$$

Результаты геометрических преобразований в цифровом виде

Номера вершин куба	Исходные координаты			Ортогональная проекция					Центральная проекция					
				Координаты куба в системе координат наблюдателя			Координаты изображения в картинной плоскости		Однородные координаты				Координаты изображения в картинной плоскости	
	x	y	z	X	Y	Z	$\bar{X}$	$\bar{Y}$	X	Y	Z	Z/Z_0	$\bar{X}$	$\bar{Y}$
1	1	-1	-1	$2\sqrt{2}$	$-2\frac{\sqrt{6}}{3}$	$14\frac{\sqrt{3}}{3}$	$2\sqrt{2}$	$-2\frac{\sqrt{6}}{3}$	$2\sqrt{2}$	$-2\frac{\sqrt{6}}{3}$	$14\frac{\sqrt{3}}{3}$	7/6	$\frac{12}{7}\sqrt{2}$	$-\frac{4}{7}\sqrt{6}$
2	1	1	-1	$2\sqrt{2}$	$2\frac{\sqrt{6}}{3}$	$10\frac{\sqrt{3}}{3}$	$2\sqrt{2}$	$2\frac{\sqrt{6}}{3}$	$2\sqrt{2}$	$2\frac{\sqrt{6}}{3}$	$10\frac{\sqrt{3}}{3}$	5/6	$\frac{12}{5}\sqrt{2}$	$\frac{4}{5}\sqrt{6}$
3	-1	1	-1	0	$4\frac{\sqrt{6}}{3}$	$14\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$4\frac{\sqrt{6}}{3}$	0	$4\frac{\sqrt{6}}{3}$	$14\frac{\sqrt{3}}{3}$	7/6	0	$\frac{8}{7}\sqrt{6}$
4	-1	-1	-1	0	0	$18\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	0	0	0	$18\frac{\sqrt{3}}{3}$	9/6	0	0
5	1	-1	1	0	$-4\frac{\sqrt{6}}{3}$	$10\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-4\frac{\sqrt{6}}{3}$	0	$-4\frac{\sqrt{6}}{3}$	$10\frac{\sqrt{3}}{3}$	5/6	0	$-\frac{8}{5}\sqrt{6}$
6	1	1	1	0	0	$6\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	0	0	0	$6\frac{\sqrt{3}}{3}$	3/6	0	0
7	-1	1	1	$-2\sqrt{2}$	$2\frac{\sqrt{6}}{3}$	$10\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-2\sqrt{2}$	$2\frac{\sqrt{6}}{3}$	$-2\sqrt{2}$	$2\frac{\sqrt{6}}{3}$	$10\frac{\sqrt{3}}{3}$	5/6	$-\frac{12}{5}\sqrt{2}$	$\frac{4}{5}\sqrt{6}$
8	-1	-1	1	$-2\sqrt{2}$	$-2\frac{\sqrt{6}}{3}$	$14\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-2\sqrt{2}$	$-2\frac{\sqrt{6}}{3}$	$-2\sqrt{2}$	$-2\frac{\sqrt{6}}{3}$	$14\frac{\sqrt{3}}{3}$	7/6	$-\frac{12}{7}\sqrt{2}$	$-\frac{4}{7}\sqrt{6}$

а

б

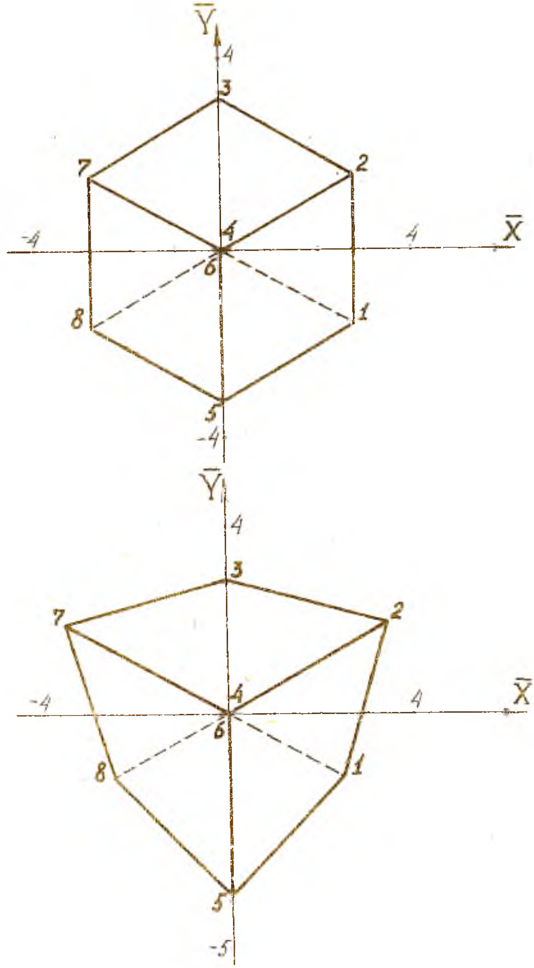


Рис. Результаты геометрических преобразований в графическом виде: а – ортогональная проекция, б – центральная проекция

С О Д Е Р Ж А Н И Е

Составители: Александр Васильевич
Соловов,
Владимир Павлович
Пересыпкин

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ
В МАШИННОЙ ГРАФИКЕ

Редактор Е.Д. А н т о н о в а
Техн. редактор Н.М. К а л е н ю к

Подписано в печать 12.09.84 г.
Формат 60х84 1/16. Бумага оберточная белая.
Печать оперативная.
Уч.-изд.л. 1,3. Усл. п.л. 1,39.
Т.500 экз. Заказ 6413 Бесплатно
Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени
авиационный институт имени академика С.П.Королева,
г.Куйбышев, ул.Молодогвардейская,151
Обл.тип. им. В.П.Мяги
г.Куйбышев, ул.Венцека,60