МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С. П. КОРОЛЕВА

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА. АРИФМЕТИЧЕСКАЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИИ

Методические указания и контрольные задания

Издание второе, исправленное

Самара 2001

Составители: *Л.И. Калинкина, Е.В. Лямин, С.А. Стукалов*

УДК 510.22 (075)

Иррациональные уравнения и неравенства. Арифметическая и геометрическая прогрессии: Метод. указания и контрольные задания / Самар. гос. аэрокосм. ун-т ; Сост.: *Л.И. Калинкина, Е.В.Лямин, С.А. Стукалов*. Самара, 2001. 46 с.

Методические указания и контрольные задания являются третьей частью методического обеспечения подготовки слушателей заочных подготовительных курсов к вступительному экзамену по математике.

Содержат краткий теоретический материал, разбор примеров, упражнения для самостоятельной работы и задание для контрольной работы.

Предназначены для эффективного повторения в сжатые сроки школьного курса математики и подготовки к вступительному экзамену по математике.

Печатаются по решению редакционно-издательского совета Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П. Королева

Рецензент: Г. Н. Горелов

СОДЕРЖАНИЕ

1. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Иррациональными называются уравнения, в которых неизвестные величины находятся под знаком корня (радикала). Рассмотрим некоторые особенности решения иррациональных уравнений.

Прежде всего вспомним, какой смысл придаётся математическим символам $\sqrt{\ }$, $\sqrt[3]{\ }$, $\sqrt[4]{\ }$, ... Для этого решим несколько простейших алгебраических уравнений. Сначала рассмотрим случаи с ***нечетными*** степенями:

$x^3 = 8 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{8} = 2$;

$x^3 = -27 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{-27} = -3$;

$x^5 = 32 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[5]{32} = 2$.

Вообще, если $x^n = a$, где x^n - ***нечётная*** степень, то при любых a уравнение имеет единственный действительный корень: $x = \sqrt[n]{a}$.

Рассмотрим случаи с ***четными*** степенями:

$x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{0} = 0$;

$x^4 = 81 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[4]{81} = 3$ или $x = -\sqrt[4]{81} = -3$;

$x^6 = -1 \quad \Rightarrow$ нет решений.

Вообще, если $x^n = a$, где x^n - ***четная*** степень, то:

- при $a > 0$ уравнение имеет два действительных корня: положительный и отрицательный:

$x^n = a \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt[n]{a}$ или $x = -\sqrt[n]{a}$;

- при $a = 0$ уравнение имеет один действительный корень:

$x^n = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$;

- при $a < 0$ действительных корней нет.

Неотрицательный корень $x = \sqrt[n]{a}$ при четных n называют <u>арифметическим корнем</u>.

Таким образом, знаки радикалов имеют следующие особенности.

Корни нечетных степеней : $\sqrt[3]{\ }$, $\sqrt[5]{\ }$, $\sqrt[7]{\ }$, ...

Здесь под корнем могут стоять отрицательные и неотрицательные значения. И сами корни принимают при этом, соответственно, отрицательные и неотрицательные значения.

Например, $\sqrt[3]{-8}=-2$; $\sqrt[3]{0}=0$; $\sqrt[3]{8}=2$.

Корни чётных степеней : $\sqrt{\ }$, $\sqrt[4]{\ }$, $\sqrt[6]{\ }$, ...

Так обозначают *неотрицательные, то есть арифметические* корни. Под корнем могут стоять только неотрицательные значения, и сами корни принимают только неотрицательные значения.

Например: $\sqrt{9}=3$ (но не ± 3 !); $\sqrt[4]{0}=0$; $\sqrt[6]{-1}$ - не существует.

Теперь отметим другое обстоятельство, связанное с методом решения иррациональных уравнений. В процессе решения, чтобы избавиться от радикалов, приходится возводить обе части уравнения в квадрат, куб или другие степени. Такое преобразование не всегда является равносильным - **при возведении в четную степень могут возникать посторонние решения, входящие в область допустимых значений (ОДЗ).** Это будет видно из примера, который мы сейчас рассмотрим.

ПРИМЕР 1. Решите уравнение $\sqrt{x+1}=11-x$.

Ниже приведены два способа решения уравнения. Только освоив оба, вы можете уверенно решать подобные уравнения. Оказывается, в одних случаях больше подходит первый способ, в других - второй.

Решение 1. (*С проверкой*)

ОДЗ: $x+1>0$, то есть $x>-1$.

Возведём обе части уравнения в квадрат, применив формулы

$\left(\sqrt{a}\right)^2=a$; $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$;

$x+1=121-22x+x^2$.

Решим полученное квадратное уравнение:

$x^2-23x+120=0$;

$D=529-480=49$; $x_{1,2}=\dfrac{23\pm 7}{2}$; $x_1=8$; $x_2=15$.

Сделаем проверку: $x=8$, $\sqrt{8+1} = 11-8$, $3 = 3$ - верно.

$x=15$, $\sqrt{15+1} = 11-15$, $4 = -4$ - неверно.

Ответ: $x = 8$.

Обратите внимание: $x=15 \in$ ОДЗ, тем не менее это постороннее решение и от него удалось избавиться только при помощи проверки. Постараемся найти причину появления полученного постороннего решения. Если подставить в исходное уравнение значения $x = 15$, то получится неверное равенство $4 = -4$, однако в ходе решения обе части уравнения возводились в квадрат (четную степень!), при этом неверное равенство стало верным: $4^2 = (-4)^2$. Таким образом, постороннее решение возникает, когда левая и правая части исходного уравнения равны по модулю, но имеют разные знаки. Этого можно избежать, если поставить условие, чтобы обе части уравнения были одного знака. Решение, основанное на этом приеме, приведено далее.

Решение 2. *(Равносильные преобразования)*

Составим систему уравнений и неравенств, равносильную исходному уравнению:

$$\sqrt{x+1} = 11 - x \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+1 \ge 0, \\ 11 - x \ge 0, \\ x+1 = (11-x)^2. \end{cases}$$

Поясним:

$x+1 \ge 0$ - выражение под знаком квадратного корня должно быть неотрицательным (так определяется ОДЗ);

$11 - x \ge 0$ - правая часть уравнения должна быть неотрицательна, потому что левая часть как корень четной степени неотрицательна;

$x+1 = (11-x)^2$ - при выполнении первых двух условий обе части уравнения возвели в квадрат.

Далее в результате равносильных преобразований получим

$$\begin{cases} x \ge -1, \\ x \le 11, \\ x+1 = 121 - 22x + x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -1, \\ x \le 11, \\ x^2 - 23x + 120 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [-1;\ 11], \\ \left[\begin{array}{l} x = 8 \\ x = 15 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 8.$$

О т в е т: $x=8$.

Сравнивая два приведенных выше решения, можно сделать вывод, что решение 1 несколько проще, поскольку проверку корней в данном случае сделать легче, чем решать систему уравнений и неравенств. Однако в других примерах решение 2 может оказаться более эффективным. Поэтому полезно научиться решать иррациональные уравнения тем и другим способами.

Материал не может считаться усвоенным, пока вы сами не решите подобное уравнение. Поэтому вам нужно самостоятельно (в данном случае двумя способами) решить уравнение 1 в конце раздела, там, где приведены "Задачи для самостоятельного решения" (с . 15).

ПРИМЕР 2. Решите уравнение $2\sqrt{x^2 - 3x + 2} = -x + 5$.

Р е ш е н и е. Составим равносильную систему уравнений и неравенств и решим её:

$$2\sqrt{x^2 - 3x + 2} = -x + 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 2 \ge 0, \\ -x + 5 \ge 0, \\ 4\left(x^2 - 3x + 2\right) = x^2 - 10x + 25\ . \end{cases}$$

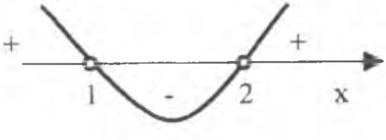
Найдем решение неравенств и уравнения из системы:

1) $x^2 - 3x + 2 \ge 0$;

корни квадратного трехчлена:

$x_1 = 1$, $x_2 = 2$, поэтому

$x \in (-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$;



2) $-x + 5 \ge 0 \Leftrightarrow x \le 5$;

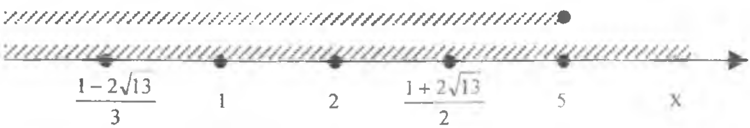
3) $4x^2 - 12x + 8 = x^2 - 10x + 25$;

$3x^2 - 2x - 17 = 0$;

$D = 4 + 204 = 208$; $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm 2\sqrt{13}}{3}$.

Таким образом получили систему:

$$\begin{cases} x \in (-\infty;1] \cup [2;5] \\ x_{1,2} = \dfrac{1 \pm 2\sqrt{13}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm 2\sqrt{13}}{3} .$$



Здесь представляет определённую трудность показать, что оба корня принадлежат множеству (- ∞; 1] U [2; 5].

Убедимся, например, что $2 < \dfrac{1+2\sqrt{13}}{3} < 5$. Для этого умножим все части этого неравенства на 3 и вычтем из каждой части неравенства по 1:

$6 < 1 + 2\sqrt{13} < 15$, $5 < 2\sqrt{13} < 14$. Затем возведем в квадрат все части неравенства: 25 < 52 < 196. Так как получили верное неравенство, то исходное неравенство тоже является верным.

Ответ: $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm 2\sqrt{13}}{3}$.

Из примера 2 видим, что, во - первых, при возведении в квадрат не всегда возникают посторонние решения, а во - вторых, проверка решений в некоторых случаях настолько трудоемка (здесь корни имеют громоздкое выражение), что проще решить систему уравнений и неравенств, чем делать проверку.

Теперь, когда вы разобрались с решением данного примера, таким же способом решите уравнение 2 на с. 15. И в дальнейшем установите для себя такой порядок: разобрав решение примера, найдите в конце раздела подобный пример с таким же номером и решите его. Сравните полученный ответ с приведенным там же ответом.

Подведем некоторые итоги. Мы убедились, что при возведении обеих частей уравнения в квадрат или другую четную степень могут возникать посторонние решения, причем нахождение ОДЗ не позволяет их выявить. Это происходит, когда перед возведением в степень левая и правая части уравнения равны по модулю, но имеют противоположные знаки.

Посмотрим, что происходит при возведении в разные степени: в квадрат, в куб и другие. В примере 1 при подстановке определённого значения x в уравнение возникло неверное равенство: $4 = -4$. Следовательно, данное значение x не является решением.

При возведении в квадрат неверное равенство $4 = -4$ становится верным: $16 = 16$. Получаем постороннее решение.

Если бы неверное равенство $4 = -4$ возвели в куб, то равенство осталось бы неверным: $64 = -64$. При этом постороннее решение не возникает.

Обобщив эти рассуждения, сформулируем правила решения иррациональных уравнений путем уединения радикала и возведения в степень. Здесь подразумевается, что преобразования проводятся в области допустимых значений, то есть после нахождения ОДЗ.

Возведение в куб или другие нечётные степени является равносильным преобразованием. В этом случае посторонние решения не возникают.

Возведение в квадрат и другие чётные степени является равносильным преобразованием, только если обе части уравнения неотрицательны. При этом надо записать эти условия неотрицательности в виде неравенств и решить их.

Если же возведение в квадрат или другие чётные степени производилось без учёта условий неотрицательности обеих частей уравнения, то следует сделать проверку полученных решений, подставляя их в *исходное* уравнение.

<u>ПРИМЕР 3.</u> Решите уравнение $2\sqrt{x+7} + x - 8 = 0$.

Решение. Уединим корень: $2\sqrt{x+7} = 8 - x$.

Возведем обе части уравнения в квадрат. Получившиеся при этом посторонние решения исключим при проверке:

$4(x+7)=64-16x+x^2$; $x^2-20x+36=0$;

$D=400-144=256$; $x_{1,2}=\dfrac{20\pm\sqrt{256}}{2}$; $x_1=2$, $x_2=18$.

Проверка: $x=2$; $2\sqrt{2+7}+2-8=0$; $0=0$ - верно.

$x=18$; $2\sqrt{18+7}+18-8=0$; $20=0$ - неверно.

Ответ: $x=2$.

ПРИМЕР 4. Решите уравнение

$$\sqrt{2x+3}+\sqrt{x-2}=2\sqrt{x+1}\ .$$

Решение. Обе части неравенства неотрицательны. Возведем в квадрат:

$$2x+3+2\sqrt{(2x+3)(x-2)}+x-2=4(x+1).$$

Приведем подобные члены: $2\sqrt{2x^2-x-6}=x+3$.

Еще раз возведем обе части уравнения в квадрат. Получающиеся при этом посторонние решения исключим при проверке:

$$4\left(2x^2-x-6\right)=x^2+6x+9\ ; \quad 7x^2-10x-33=0\ .$$

Поскольку коэффициенты в уравнении довольно большие, для упрощения вычислений при нахождении корней воспользуемся формулой

$$x_{1,2}=\frac{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{D_1}}{a}\ ,\ \text{где}\ \ D_1=\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac;$$

$D_1=25+231=256$; $x_{1,2}=\dfrac{5\pm16}{7}$; $x_1=-\dfrac{11}{7}$, $x_2=3$.

Проверка: $x=-\dfrac{11}{7}$: $\sqrt{-2\cdot\dfrac{11}{7}+3}+\sqrt{-\dfrac{11}{7}-2}=2\sqrt{-\dfrac{11}{7}+1}$ - здесь подкоренные выражения отрицательны - неверно.

$x=3$; $\sqrt{6+3}+\sqrt{3-2}=2\sqrt{3+1}$; $4=4$ - верно.

Ответ: $x=3$.

ПРИМЕР 5. Решите уравнение $\sqrt[3]{x^3-5x^2+24}=x-2$.

Решение. ОДЗ: $x \in R$.

Возведём обе части уравнения в куб, применив формулы:

$\left(\sqrt[3]{a}\right)^3=a$; $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$; получим

$x^3-5x^2+24=x^3-6x^2+12x-8$;

$x^2-12x+32=0$.

Решив квадратное уравнение, получим $x_1=4$, $x_2=8$. Поскольку возведение обеих частей уравнения в куб - равносильное преобразование, проверку можно не делать.

Ответ: $x=4$, $x=8$.

ПРИМЕР 6. Решите уравнение $\sqrt[3]{x+34}-\sqrt[3]{x-3}=1$.

Решение. Уединим корень, преобразуем уравнение к виду $\sqrt[3]{x+34}=1+\sqrt[3]{x-3}$.

Возведем обе части уравнения в куб. Напомним, что при возведении обеих частей уравнения в нечетную степень посторонние решения не возникают:

$$x+34=1+3\sqrt[3]{x-3}+3\sqrt[3]{(x-3)^2}+x-3;$$

$$3\sqrt[3]{(x-3)^2}+3\sqrt[3]{x-3}-36=0;$$

$$\sqrt[3]{(x-3)^2}+\sqrt[3]{x-3}-12=0.$$

Обозначив $y=\sqrt[3]{x-3}$, получим квадратное уравнение:

$y^2+y-12=0$, которое имеет корни $y_1=3$, $y_2=-4$.

Таким образом, исходное уравнение эквивалентно совокупности уравнений: $\left[\begin{array}{l}\sqrt[3]{x-3}=3\\ \sqrt[3]{x-3}=-4.\end{array}\right.$

Возведя обе части каждого из этих уравнений в третью степень, получим

$$\sqrt[3]{x-3}=3 \quad \Leftrightarrow \quad x-3=27 \quad \Leftrightarrow \quad x=30;$$

$$\sqrt[3]{x-3}=-4 \quad \Leftrightarrow \quad x-3=-64 \quad \Leftrightarrow \quad x=-61.$$

Ответ: $x=30$, $x=-61$.

При решении иррациональных уравнений иногда бывает очень полезно заменить какое-нибудь повторяющееся выражение новой неизвестной. Этот метод называют методом подстановки. Попробуем применить этот метод в следующих примерах.

ПРИМЕР 7. Решите уравнение $\sqrt[4]{x} + \sqrt[8]{x} - 2 = 0$.

Решение. ОДЗ: $x \geq 0$. Введем новую неизвестную: $a = \sqrt[8]{x}$.

Получим уравнение: $a^2 + a - 2 = 0$; $a_1 = 1$ или $a_2 = -2$.

Отсюда $\left[\begin{array}{l} \sqrt[8]{x} = 1 \\ \sqrt[8]{x} = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ \text{нет решений} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 1$.

Ответ: $x = 1$.

ПРИМЕР 8. Решите уравнение $2\sqrt{3x+1} - \dfrac{4}{\sqrt{3x+1}} = 7$.

Решение. ОДЗ: $3x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > -\dfrac{1}{3}$.

Умножим уравнение на $\sqrt{3x+1} > 0$, получим

$2(3x+1) - 7\sqrt{3x+1} - 4 = 0$.

Пусть $\sqrt{3x+1} = a$ $(a > 0)$. Тогда $2a^2 - 7a - 4 = 0$.

$D = 49 + 32 = 81$, $a_{1,2} = \dfrac{7 \pm 9}{4}$, $a_1 = -\dfrac{1}{2}$, $a_2 = 4$.

$\left[\begin{array}{l} \sqrt{3x+1} = -\dfrac{1}{2} \\ \sqrt{3x+1} = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \text{нет решений} \\ 3x+1 = 16 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 5 \in \text{ОДЗ}$.

В данном случае все преобразования были равносильными, поэтому проверка необязательна.

Ответ: $x = 5$.

ПРИМЕР 9*. Решите уравнение

$(x+5)(x-2) - 8 + 4\sqrt{x^2 + 3x - 6} = 0$.

Решение. Не будем находить ОДЗ. Получающиеся посторонние решения исключим в результате проверки.

Сначала непонятно, какую подстановку здесь можно сделать. Раскроем скобки и выделим многочлен x^2+3x-6:

$$x^2+3x-6-12+4\sqrt{x^2+3x-6}=0.$$

Теперь подстановка очевидна. Обозначив $a=\sqrt{x^2+3x-6}$, получим квадратное уравнение $a^2+4a-12=0$, которое имеет корни $a_1=-6$, $a_2=2$.

Таким образом, исходное уравнение эквивалентно совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2+3x-6}=-6\\ \sqrt{x^2+3x-6}=\ \ 2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\text{нет решений}\\ x^2+3x-6=4\end{array}\right. \Leftrightarrow x^2+3x-10=0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\ x_1=-5,\ x_2=2.$

Проверка:

$x=-5;\quad (-5+5)(-5-2)-8+4\sqrt{5^2-3\cdot5-6}=0;$

$0=0$ - верно.

$x=2;\quad (2+5)(2-2)-8+4\sqrt{2^2+3\cdot2-6}=0;$

$0=0$ - верно.

Ответ: $x=-5$, $x=2$.

ПРИМЕР 10*. Решите уравнение

$$\frac{x^2}{\sqrt{2x+15}}+\sqrt{2x+15}=2x.$$

Решение. Не будем находить ОДЗ. Получающиеся посторонние решения исключим в результате проверки.

Здесь, так же как и в предыдущем примере, непонятно, какую подстановку можно сделать. Разделим левую и правую части уравнения на x. Вообще при делении уравнения на какое-либо выражение возможна потеря решений. Однако здесь значение $x=0$ не является решением, что легко проверяется подстановкой ($\sqrt{15}=0$ - неверно), следовательно, при делении уравнения на x потери решений не происходит. Уравнение примет вид

$$\frac{x}{\sqrt{2x+15}}+\frac{\sqrt{2x+15}}{x}=2 .$$

Теперь, обозначив $a=\dfrac{x}{\sqrt{2x+15}}$, получим уравнение $a+\dfrac{1}{a}=2$, которое преобразуем к квадратному: $a^2-2a+1=0$. Это уравнение имеет два одинаковых корня: $a=1$.

Таким образом, $\dfrac{x}{\sqrt{2x+15}}=1$; $x=\sqrt{2x+15}$.

Возведём обе части уравнения в квадрат: $x^2=2x+15$. Отсюда $x^2-2x-15=0$; $x_1=-3$, $x_2=5$.

Проверка:

$x=-3$; $\dfrac{9}{\sqrt{-6+15}}+\sqrt{-6+15}=-6$; $6=-6$ - неверно.

$x=5$ $\dfrac{25}{\sqrt{10+15}}+\sqrt{10+15}=10$; $10=10$ - верно.

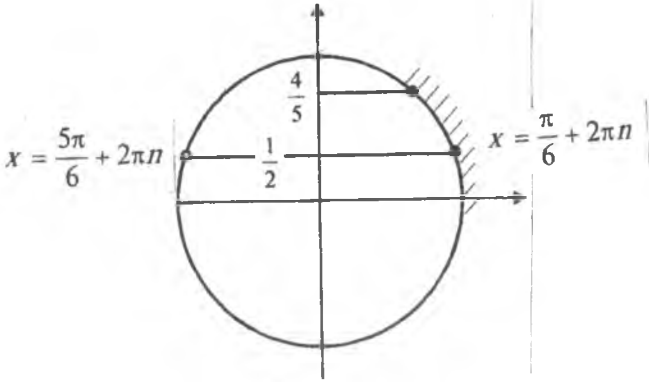
Ответ: $x=5$.

ПРИМЕР 11*. Решите уравнение $\sqrt{2-2,5\sin x}=\cos x$.

Решение. Составим систему, равносильную данному уравнению:

$$\begin{cases} 2-2{,}5\sin x\ge 0 \\ \cos x\ge 0 \\ 2-2{,}5\sin x=\cos^2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x\le \dfrac{4}{5} \\ \cos x\ge 0 \\ \sin^2 x-2{,}5\sin x+1=0. \end{cases}$$

Первым двум неравенствам соответствует заштрихованная часть на тригонометрическом круге:



Решим уравнение $\sin^2 x - 2{,}5 \sin x + 1 = 0$.

Обозначим $\sin x = a$. Тогда $a^2 - 2{,}5a + 1 = 0$ или

$2a^2 - 5a + 2 = 0$. Найдя дискриминант, получим корни: $a_1 = \frac{1}{2}$; $a_2 = 2$.

Отсюда $\left[\begin{array}{l} \sin x = \frac{1}{2} \\ \sin x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$.

На заштрихованную часть попадают только решения

$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Уравнение $\sin x = 2$ не имеет решений.

О т в е т: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in Z$.

Задачи для самостоятельного решения

Решите уравнения:

1) $\sqrt{x - 1} = x - 3$;

2) $2\sqrt{2x^2 - 5x + 2} = 2 - 3x$;

3) $3\sqrt{2x + 2} + x - 7 = 0$;

4) $\sqrt{41 - 3x} - \sqrt{9 - 3x} = 2\sqrt{5 + x}$;

5) $\sqrt[3]{16+9x^2-8x^3}=1-2x$;

6) $\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x-17}=1$;

7) $\sqrt[3]{x-5}+2\sqrt[3]{(x-5)^2}-3=0$;

8) $2\sqrt{x-1}-5=\dfrac{3}{\sqrt{x-1}}$;

9)* $(x+3)(x+2)-4\sqrt{x^2+5x+2}=4$;

10)* $\dfrac{2x^2}{\sqrt{3+x}}+3x=2\sqrt{3+x}$;

11)* $\sqrt{5-7\cos x}=\sqrt{3}\sin x$.

Ответы:

1) $x=5$; 2) $-x=4\pm\sqrt{5}$; 3) $x=1$;

4) $x=\pm 3$; 5) $x=1\pm\sqrt{6}$; 6) $x=-10$, $x=25$;

7) $x=\dfrac{13}{8}$, $x=6$; 8) $x=10$;

9) $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{17}}{2}$; $x=-7$; $x=2$;

10) $x=-2$; $x=1$; 11) $x=\arccos\dfrac{1}{3}+2\pi k$, $k\in Z$.

2. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Вы знаете, что обычно решениями неравенств являются промежутки или совокупности промежутков, например, $x \in (1;3) \cup [4;+\infty)$. Поэтому проверку решений сделать невозможно (как проверить бесконечное количество точек?). Выход здесь один: все преобразования должны быть равносильными, то есть в процессе преобразований не должны теряться решения неравенств и не должны появляться посторонние решения.

ПРИМЕР 1. Решите неравенство $\sqrt{x^2 - x - 6} - x + 2 > 0$.

Решение. Уединим корень: $\sqrt{x^2 - x - 6} > x - 2$.

Ясно, что для нахождения решения обе части неравенства нужно возводить в квадрат. Но это можно делать только при условии, что они неотрицательны, иначе возможны ошибки. Вы можете в этом убедиться сами, если возведёте в квадрат верное неравенство, например, 3>–5. Получите $9 > 25$, что неверно.

Таким образом, сначала рассмотрим случай с неотрицательной правой частью. Это составит I часть решения.

I часть. $x - 2 \geq 0$, т. е. $x \in [\,2\,;+\infty)$.

При таком условии обе части исходного неравенства неотрицательны (левая часть неотрицательна как квадратный корень), поэтому их можно возвести в квадрат. Составим систему неравенств:

$$\begin{cases} x - 2 \geq 0, \\ x^2 - x - 6 \geq 0, \\ x^2 - x - 6 > (x-2)^2 . \end{cases}$$

Поясним смысл каждого неравенства:

- первое - записали условие, когда обе части исходного неравенства неотрицательны;

- второе - записали ОДЗ;

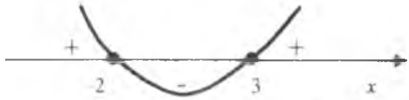
- третье - возвели обе части неравенства в квадрат.

Найдём решения этих неравенств:

1) $x-2\geq 0$; $x\geq 2$;

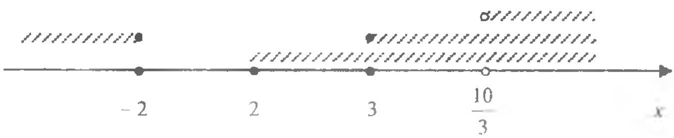
2) $x^2-x-6\geq 0$; $x_1=-2$; $x_2=3$;

$x\in(-\infty;-2]\cup[3;+\infty)$;



3) $x^2-x-6>(x-2)^2$; $x^2-x-6>x^2-4x+4$; $3x>10$; $x>\dfrac{10}{3}$

Найдём пересечение полученных трёх решений:



Получили решение неравенства для неотрицательной правой части:

$x\in\left(\dfrac{10}{3};\ +\infty\right)$.

<u>II часть.</u> $x-2<0$, т. е. $x\in(-\infty;\ 2)$.

В этом случае неравенство нельзя возводить в квадрат, потому что правая часть отрицательна. Но в этом и нет необходимости, т.к. при всех допустимых значениях x неотрицательная левая часть будет больше отрицательной правой. Запишем систему неравенств:

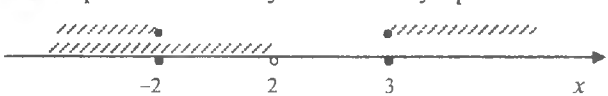
$$\begin{cases} x-2<0, \\ x^2-x-6\geq 0 \quad (\text{ОДЗ}). \end{cases}$$

Найдём решения каждого неравенства:

1) $x-2<0$; $x<2$;

2) $x^2-x-6\geq 0$. Решение этого неравенства получено в первой части: $x\in(-\infty;-2]\cup[3;+\infty)$.

Найдём пересечение полученных двух решений:



Получаем: $x \in (-\infty\,;\ -2]$.

Решением исходного неравенства будет объединение решений из первой и из второй части.

О т в е т: $x \in (-\infty\,;\ -2] \cup \left(\dfrac{10}{3};\ +\infty\right)$.

Обобщим наши рассуждения, приведенные в решении примера 1. Запишем равносильные системы неравенств:

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \ge 0 \\ f(x) \ge 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases} \\ \\ \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \ge 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases} \\ \\ \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \ge 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

При последнем переходе в первой системе отброшено неравенство $f(x) \ge 0$. Оно автоматически выполняется, поскольку имеется неравенство $f(x) > g^2(x) \ge 0$. Заметим, что при решении примера 1 неравенство $f(x) \ge 0$ не отбрасывалось. Это, очевидно, не повлияло на результат. Поэтому оставляем на ваше усмотрение - записывать указанное неравенство или опускать его. С одной стороны, решение будет короче, с другой - можно по ошибке отбросить не то, что нужно. Если вы уверены в себе, смело отбрасывайте указанное неравенство!

<u>ПРИМЕР 2.</u> Решите неравенство $\sqrt{x^2 - x - 6} - x + 2 < 0$.

Обратите внимание, примеры *1* и *2* очень похожи друг на друга. Отличие только в знаке неравенства. Однако в примере *2* не только другой ответ, но в некоторой степени и другой ход решения.

Р е ш е н и е . Уединим корень: $\sqrt{x^2 - x - 6} < x - 2$.

<u>I часть.</u> $x - 2 \ge 0$, т. е. $x \in [2\,; +\infty)$.

Запишем систему неравенств:

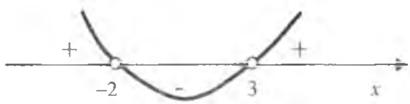
$$\begin{cases} x-2\ge 0 \\ x^2-x-6\ge 0 \qquad (\text{ОДЗ}) \\ x^2-x-6<(x-2)^2 \end{cases}$$

Найдём решения каждого неравенства:

1) $x-2\ge 0$; $x\ge 2$.

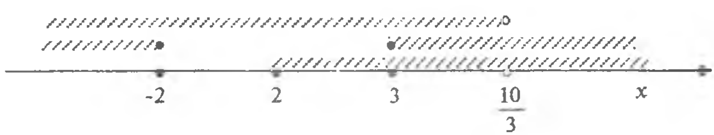
2) $x^2-x-6\ge 0$; $x_1=-2$; $x_2=3$

$x\in(-\infty\,;\,-2]\cup[3\,;\,+\infty)$



3) $x^2-x-6<(x-2)^2$; $x^2-x-6<x^2-4x+4$; $3x<10$; $x<\dfrac{10}{3}$.

Найдём пересечение полученных трёх решений:



Получили решение неравенства для неотрицательной правой части:

$x\in\left[3\,;\,\dfrac{10}{3}\right)$.

II часть. $x-2<0$, т. е. $x\in(-\infty\,;\,2)$.

Здесь нет решений, т. к. неотрицательная левая часть (арифметический квадратный корень!) ни при каких значениях x не может быть меньше отрицательной правой части.

Ответ: $x\in\left[3\,;\,\dfrac{10}{3}\right)$.

Теперь обобщим наши рассуждения, приведенные в решении примера 2. Запишем равносильную систему неравенств:

$$\sqrt{f(x)} < g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) \geq 0 \\ f(x) < g^2(x). \end{cases}$$

При $g(x) < 0$ решений нет.

<u>***ПРИМЕР 3.***</u> Решите неравенство

$$\sqrt[3]{x^3 + 7x^2 + 11x - 31} - x - 1 < 0 .$$

Р е ш е н и е . Корень кубический извлекается как из неотрицательных, так и из отрицательных чисел. Поэтому область допустимых значений - все действительные числа. ОДЗ: $x \in R$.

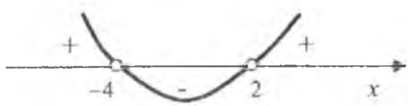
Уединим корень: $\sqrt[3]{x^3 + 7x^2 + 11x - 31} < x + 1$.

Возведение неравенства в куб - равносильное преобразование, посторонние решения не возникают:

$x^3 + 7x^2 + 11x - 31 < x^3 + 3x^2 + 3x + 1$;

$4x^2 + 8x - 32 < 0$; $x^2 + 2x - 8 < 0$;

$x_1 = -4$; $x_2 = 2$.



О т в е т: $x \in (-4 ; 2)$.

Решим теперь несколько более простых неравенств, которые могут встречаться как элементы решения в конкурсных задачах.

<u>***ПРИМЕР 4.***</u> Решите неравенство $\sqrt{x - 4} > 2$.

Р е ш е н и е . Здесь обе части неравенства неотрицательны. Можно возвести в квадрат при условии, что подкоренное выражение неотрицательно:

$$\begin{cases} x - 4 \geq 0 \quad \text{(ОДЗ)} \\ x - 4 > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ x > 8 \end{cases} \Leftrightarrow x > 8 .$$

О т в е т: $x \in (8 ; +\infty)$.

ПРИМЕР 5. Решите неравенство $\sqrt[4]{x-5} < -2$.

Решение. Неравенство не имеет решений, т. к. ни при каких x неотрицательная левая часть (корень чётной степени!) не будет меньше отрицательной правой части.

Ответ: нет решений.

ПРИМЕР 6. Решите неравенство $\sqrt{2x-16} > -2$.

Решение. Неравенство будет выполняться при всех допустимых значениях x, так как неотрицательная левая часть всегда больше отрицательной правой. Поэтому достаточно найти ОДЗ:

$2x-16 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 8.$

Ответ: $x \in [8; +\infty)$.

ПРИМЕР 7. Решите неравенство $\sqrt[3]{x-5} > -2$.

Решение. ОДЗ: $x \in R$.

Возведение неравенства в куб - равносильное преобразование, поэтому

$\sqrt[3]{x-5} < -2 \quad \Leftrightarrow \quad x-5 > -8 \quad \Leftrightarrow \quad x > -3.$

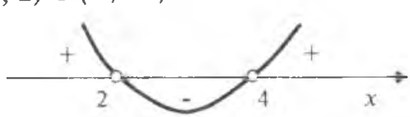
Ответ: $x \in (-3; +\infty)$.

ПРИМЕР 8. Решите неравенство $\sqrt{x-4} + \dfrac{8}{\sqrt{x-4}} > 6$.

Решение. ОДЗ: $x>4$. Умножим неравенство на $\sqrt{x-4} > 0$: $x-4-6\sqrt{x-4}+8 > 0$.

Обозначим $a = \sqrt{x-4}$.

Тогда $a^2 - 6a + 8 > 0$, корни квадратного трехчлена $a_1 = 2$; $a_2 = 4$.
Поэтому $a \in (-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$



$a < 2 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x-4} < 2 \quad \Leftrightarrow \quad x-4 < 4 \quad \Leftrightarrow \quad x < 8$ или

$a > 4 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x-4} > 4 \quad \Leftrightarrow \quad x-4 > 16 \quad \Leftrightarrow \quad x > 20.$

Ответ: $x \in (4; 8) \cup (20, +\infty)$.

ПРИМЕР 9. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{x+5}-1}{\sqrt{x+6}-2} \geq 0$.

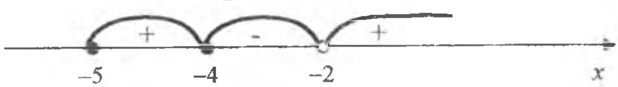
Решение.

$$\text{ОДЗ}: \begin{cases} x+5 \geq 0 \\ x+6 \geq 0 \\ \sqrt{x+6}-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -5 \\ x \geq -6 \\ x \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-5;-2) \cup (-2;+\infty).$$

Применим метод интервалов. Для этого найдём те значения x, при которых числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль:

$\sqrt{x+5}-1=0$; $x=-4$; $\sqrt{x+6}-2=0$; $x=-2$.

Нанесём найденные значения на числовую ось и с учётом ОДЗ построим интервалы знакопостоянства функции, стоящей в левой части неравенства. Затем выберем промежутки с неотрицательными значениями функции.



Ответ: $x \in [-5;-4] \cup (-2;+\infty)$.

ПРИМЕР 10. Решите неравенство

$\sqrt{4\sin x+7} \leq 1+4\,\mathrm{tg}\,x \cdot \cos x$.

Решение. $\sqrt{4\sin x+7} \leq 1+4\dfrac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos x$.

Очевидно, что $4\sin x+7>0$, поскольку $|\sin x| \leq 1$. С учётом этого запишем ОДЗ: $\cos x \neq 0$; $x \neq \dfrac{\pi}{2}+\pi n$, $n \in Z$.

После сокращения на $\cos x$ получим неравенство $\sqrt{4\sin x+7} \leq 1+4\sin x$, которое равносильно системе неравенств:

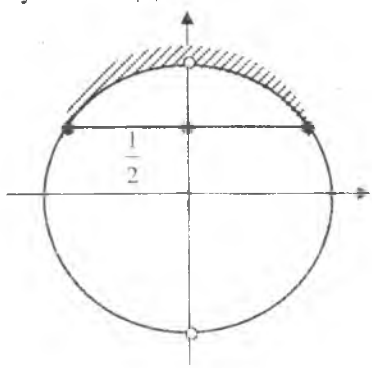
$$\begin{cases} 1+4\sin x \geq 0 \\ 4\sin x+7 \leq 1+8\sin x+16\sin^2 x. \end{cases}$$

Обозначим $\sin x = a$, получим систему:

$$\begin{cases} 1+4a \geq 0 \\ 16a^2+4a-6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq -\dfrac{1}{4} \\ a \in \left(-\infty; -\dfrac{3}{4}\right] \cup \left[\dfrac{1}{2}; +\infty\right) \end{cases} \Leftrightarrow a \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x \geq \frac{1}{2}.$$

Используем тригонометрический круг. Решению неравенства соответствует заштрихованная часть на круге. При записи ответа необходимо учесть ОДЗ.



Ответ:

$$x \in \left[\frac{\pi}{6}+2\pi k; \frac{\pi}{2}+2\pi k\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{5\pi}{6}+2\pi k\right], \ k \in Z.$$

Задачи для самостоятельного решения

Решить неравенства:

1) $\sqrt{x^2+2x-8}-x+1>0$;

2) $\sqrt{x^2-x-2}-x+1<0$;

3) $\sqrt[3]{x^3-5x^2+9x-18}-x+2>0$;

4) $\sqrt{36-2x}<4$;

5) $\sqrt{2x-10} \le 0$;

6) $\sqrt[4]{15-3x} \ge -3$;

7) $\sqrt[3]{2x-15} < -3$;

8) $\sqrt{x+2} + \dfrac{4}{\sqrt{x+2}} > 5$;

9) $\dfrac{1-\sqrt{x-2}}{2-\sqrt{x-1}} \ge 0$;

10) $\sqrt{19-12\cos x} \le 6\operatorname{ctg} x \cdot \sin x - 1$.

Ответы:

1) $x \in (-\infty; -4] \cup \left(\dfrac{9}{4}; +\infty\right)$;

2) $x \in [2; 3)$;

3) $x \in (-\infty; -2) \cup (5; +\infty)$;

4) $x \in (10; 18]$;

5) $x = 5$;

6) $x \in (-\infty; 5]$;

7) $x \in (-\infty; -6)$;

8) $x \in (-2; -1) \cup (14; +\infty)$;

9) $x \in [2; 3] \cup (5; +\infty)$;

10) $x \in [-\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k; 2\pi k) \cup (2\pi k; \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k]$, $k \in Z$.

3. СИСТЕМЫ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

ПРИМЕР 1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{3x-2y}{2x}} + \sqrt{\dfrac{2x}{3x-2y}} = 2. \\ x-y=5. \end{cases}$$

Решение. Здесь важно заметить, что в левой части первого уравнения системы слагаемые являются взаимно обратными величинами. Обозначим $\sqrt{\dfrac{3x-2y}{2x}} = a$. Тогда первое уравнение в системе примет вид: $a + \dfrac{1}{a} = 2$, откуда

$$a^2 - 2a + 1 = 0; \quad a = 1; \quad \sqrt{\dfrac{3x-2y}{2x}} = 1.$$

Возведём в квадрат (потом сделаем проверку, чтобы исключить посторонние решения, если они появятся), после преобразований получим $x - 2y = 0$. Теперь система имеет вид $\begin{cases} x-2y=0 \\ x-y=5. \end{cases}$ Решив её, получим $x = 10$; $y = 5$.

Проверка: $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{3\cdot 10 - 2\cdot 5}{2\cdot 10}} + \sqrt{\dfrac{2\cdot 10}{3\cdot 10 - 2\cdot 5}} = 2 & \text{– верно.} \\ 10-5=5 & \text{– верно.} \end{cases}$

Ответ: $x = 10$; $y = 5$.

ПРИМЕР 2. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 5 \\ x+y=35. \end{cases}$

Решение. ОДЗ: $x \in R$; $y \in R$.

Обозначим $a = \sqrt[3]{x}$; $b = \sqrt[3]{y}$. Получим систему уравнений

$$\begin{cases} a+b=5 \\ a^3+b^3=35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=5 \\ (a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)=35 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=5 \\ 5\left(a^2-ab+b^2\right)=35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=5-a \\ a^2-5a+a^2+25-10a+a^2=7. \end{cases}$$

Решим второе уравнение:

$3a^2-15a+18=0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2-5a+6=0 \quad \Leftrightarrow \quad a_1=2;\ a_2=3.$

С помощью уравнения $b=5-a$ найдём $b_1=3;\ b_2=2.$

Таким образом, получим две системы: $\begin{cases} \sqrt[3]{x}=2 \\ \sqrt[3]{y}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=8 \\ y=27 \end{cases};$

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x}=3 \\ \sqrt[3]{y}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=27 \\ y=8. \end{cases}$$

Ответ: $(8;\ 27);\ (27;\ 8).$

ПРИМЕР 3*. Решите систему уравнений. Найдите область допустимых значений и изобразите её на координатной плоскости:

$$\begin{cases} \sqrt{x-y+6}=3 \\ \sqrt{x+y-4}=y-2 \end{cases}.$$

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} x-y+6 \ge 0 \\ x+y-4 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \le x+6 & (1) \\ y \ge 4-x & (2) \end{cases}.$

Границами области допустимых значений являются прямые $y=x+6;\qquad y=4-x.$

Построим их, взяв для каждой прямой по две точки:

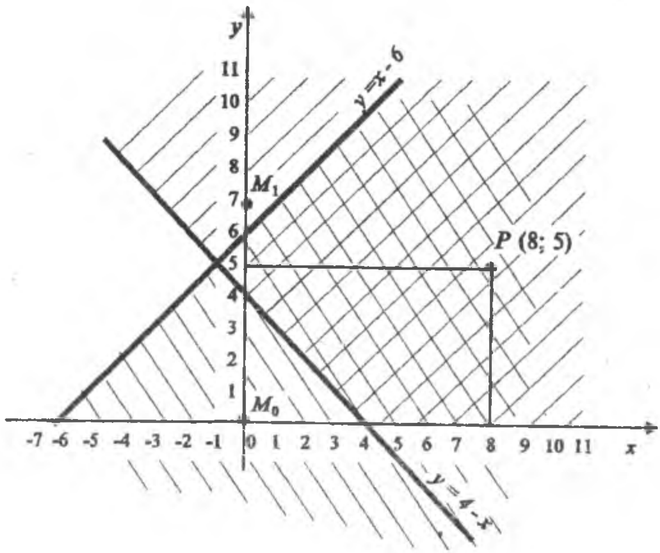
x	0	-6
$y=x+6$	6	0

x	0	4
$y=4-x$	4	0

Прямая $y=x+6$ разделяет координатную плоскость на две части. Выберем две пробные точки: одну ниже прямой, например, $M_0(0;\ 0)$, другую выше, например, $M_1(0;7)$ и поставим их координаты в неравенство (1):

$M_0(0;\ 0);\quad 0 \le 0+6$ - верно. Следовательно, все точки, лежащие ниже прямой и на самой прямой, удовлетворяют неравенству (1). Заштрихуем эту область.

$M_1(0\,;\,7)$; $7 \le 0+6$ - неверно. Следовательно, все точки, лежащие выше прямой, не удовлетворяют неравенству (1).



Прямая $y = 4 - x$ также разделяет координатную плоскость на две части. Взяв две пробные точки, можно убедиться, что неравенству (2) удовлетворяют все точки, лежащие на прямой $y = 4 - x$ и выше этой прямой. Заштрихуем эту область. Часть координатной плоскости, отмеченная двойной штриховкой, включающая границы, является областью допустимых значений.

Найдём решение системы уравнений. Возведём первое уравнение в квадрат. Обе части уравнения положительны, поэтому такое преобразование является равносильным:

$\sqrt{x-y+6} = 3$; $x - y + 6 = 9$; $y = x - 3$.

Подставим $y = x - 3$ во второе уравнение, получим:

$\sqrt{2x-7} = x - 5$.

Решим полученное уравнение:

$$\begin{cases} 2x-7\ge 0 \\ x-5\ge 0 \\ 2x-7=x^2-10x+25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 3{,}5 \\ x\ge 5 \\ x^2-12x+32=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 3{,}5 \\ x\ge 5 \\ \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=8 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=8.$$

Таким образом, $x=8$; $y=5$. Покажем точку $P(8:5)$ на координатной плоскости. Убеждаемся, что она лежит в области допустимых значений.

Ответ: $x=8$; $y=5$.

ПРИМЕР 4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x+y+\sqrt{y^2-9x^2}=5, \\ y^3\sqrt{y^2-9x^2}=0. \end{cases}$$

Решение. ОДЗ не будем находить. В данном случае это довольно громоздко. После нахождения решений сделаем проверку. Второе равенство будет верным, если один из сомножителей равен нулю. Таким образом, исходная система равносильна совокупности двух систем уравнений.

Первая система:

$$\begin{cases} 2x+y+\sqrt{y^2-9x^2}=5 \\ y^3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+\sqrt{-9x^2}=5 \\ y=0. \end{cases}$$

Здесь нет решений. Единственное допустимое значение для x - нуль. При подстановке в первое уравнение получим $0+0=5$ - неверно.

Вторая система:

$$\begin{cases} 2x+y+\sqrt{y^2-9x^2}=5 \\ \sqrt{y^2-9x^2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=5 \\ y^2-9x^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=5 \\ (y-3x)(y+3x)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 5x=5 \\ y=3x \end{cases} \\ \begin{cases} -x=5 \\ y=-3x \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-5 \\ y=15 \end{cases} \end{array} \right. .$$

Проверка (сделайте её сами, подставив значения x и y в оба уравнения системы) показывает верность обоих решений.

Ответ: $(1;3)$; $(-5;15)$.

ПРИМЕР 5*. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+3x-10} > x+1 \\ xy\sqrt{y^2-3y-4} > 0 \end{cases}.$$

Решение. Решим отдельно первое неравенство:

$$\sqrt{x^2+3x-10} > x+1 .$$

Решение здесь состоит из двух частей (см. пример 1 на с.17):

$$\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x^2+3x-10 \geq 0 \\ x^2+3x-10 > x^2+2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \in (-\infty;\ -5] \cup [2;+\infty) \\ x > 11 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in (11;+\infty).$$

$$\begin{cases} x+1<0 \\ x^2+3x-10 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-1 \\ x \in (-\infty;-5] \cup [2;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in (-\infty;-5].$$

Таким образом, $x \in (-\infty;-5] \cup (11;+\infty)$.

Рассмотрим второе неравенство исходной системы.

При $x \in (-\infty;-5]$ получим $y\sqrt{y^2-3y-4} < 0$. Отсюда

$$\begin{cases} y<0 \\ y^2-3y-4>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y<0 \\ y \in (-\infty;-1) \cup (4;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad y \in (-\infty;\ -1).$$

При $x \in (11;\ +\infty)$ получим $y\sqrt{y^2-3y-4} > 0$. Отсюда

$$\begin{cases} y>0 \\ y^2-3y-4>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y>0 \\ y \in (-\infty;-1) \cup (4;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$y \in (4;\ +\infty)$.

Ответ: $\begin{cases} x \in (-\infty;-5] \\ y \in (-\infty;-1) \end{cases}$; $\begin{cases} x \in (11;+\infty) \\ y \in (4;+\infty) \end{cases}$.

Задачи для самостоятельного решения

Решите системы уравнений и неравенств:

1) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x+y}{2x-1}} + \sqrt{\dfrac{2x-1}{x+y}} = \dfrac{5}{2} \\ x+y=1 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 4 \\ x-y=28 \end{cases}$;

3)* $\begin{cases} \sqrt{x-y+7}=3 \\ \sqrt{x+y-3}=7-2x \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x-y+\sqrt{x^2-4y^2}=2 \\ x^5\sqrt{x^2-4y^2}=0 \end{cases}$;

5)* $\begin{cases} \sqrt{x^2+5x+4} > x+2 \\ x(y+3)\sqrt{y^2+4y-5} < 0. \end{cases}$

Ответы:

1) $\left(\dfrac{5}{2};-\dfrac{3}{2}\right)$; $\left(\dfrac{5}{8};\dfrac{3}{8}\right)$; 2) $(1;-27)$; $(27;-1)$;

3) $(3;1)$; 4) $(4;2)$; $\left(\dfrac{4}{3};-\dfrac{2}{3}\right)$;

5) $\begin{cases} x \in (-\infty;-4] \\ y \in (1;+\infty) \end{cases}$; $\begin{cases} x \in (0;+\infty) \\ y \in (-\infty;-5). \end{cases}$

4. АРИФМЕТИЧЕСКАЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИИ

Арифметическая прогрессия

Арифметической прогрессией называется числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с некоторым числом, например,

5 ; 8 ; 11 ; 14 ; ... - арифметическая прогрессия;

$a_1 = 5$ - первый член арифметической прогрессии;

$d = 3$ - разность арифметической прогрессии.

Таким образом, $a_n = a_{n-1} + d$.

Запишем арифметическую прогрессию двумя способами : сначала в общем виде, а затем с помощью первого члена и разности прогрессии:

$a_1;\quad a_2;\quad a_3;\quad a_4;\quad \ldots;\quad a_n; \ldots$

$a_1;\ a_1 + d;\ a_1 + 2d;\ a_1 + 3d;\ \ldots;\ a_1 + (n-1)d;\ \ldots$

Можно заметить закономерность: коэффициент перед разностью d на единицу меньше номера члена прогрессии:

$a_n = a_1 + (n-1)d$.

Сумма n первых членов арифметической прогрессии определяется по формулам:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n \quad \text{или} \quad S_n = \frac{2a_1 + (n-1)\,d}{2} n .$$

Сформулируем основное свойство арифметической прогрессии: каждый член прогрессии, начиная со второго, есть среднее арифметическое соседних с ним членов:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} .$$

Это свойство часто используют в качестве признака арифметической прогрессии.

Иногда используют обозначения прогрессий:

÷ |- арифметическая прогрессия;

∺ | - геометрическая прогрессия.

Здесь они не применяются. Оставляем на ваше усмотрение - использовать их или нет.

Рассмотрим примеры. Вам, по-видимому, будет интересно узнать, что большинство из них в последние годы в том или ином виде встречались на вступительных экзаменах в СГАУ.

ПРИМЕР 1. Сумма 3-го и 5-го членов убывающей арифметической прогрессии равна 20, а произведение 2-го и 6-го членов той же прогрессии равно 64. Найдите прогрессию.

Решение.

$$\begin{cases} a_3 + a_5 = 20 \\ a_2 \cdot a_6 = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + 2d + a_1 + 4d = 20 \\ (a_1 + d) \cdot (a_1 + 5d) = 64 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1 + 6d = 20 \\ a_1^2 + 6ad + 5d^2 = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 10 - 3d \\ a_1^2 + 6ad + 5d^2 = 64. \end{cases}$$

После подстановки получим уравнение $d^2 = 9$, откуда $d = \pm 3$. Так как по условию прогрессия убывающая, выберем $d = -3$, тогда $a_1 = 10 + 9 = 19$.

Ответ: $a_1 = 19$; $d = -3$.

ПРИМЕР 2. Вычислить: $5{,}3 + 7{,}1 + 8{,}9 + \ldots + 39{,}5$.

Решение. Последовательность чисел 5,3 ; 7,1 ; 8,9 ... является арифметической прогрессией, так как выполняется признак $7{,}1 = \dfrac{5{,}3 + 8{,}9}{2}$.

Первый член и разность арифметической прогрессии соответственно равны: $a_1 = 5{,}3$, $d = 7{,}1 - 5{,}3 = 1{,}8$.

Сумма прогрессии $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$. Количество членов прогрессии n найдём из равенства $a_n = a_1 + (n-1)d$. Подставив конкретные значения, получим $39{,}5 = 5{,}3 + (n-1) \cdot 1{,}8$, откуда $n = 20$.

Получилось, что n - целое число. Это подтверждает предположение, что у нас арифметическая прогрессия. Таким образом,

$$S_{20} = \frac{5,3 + 39,5}{2} \cdot 20 = 448 .$$

О т в е т: 448.

Обратите внимание на то, что при решении задач на арифметические прогрессии обычно приходится либо как окончательный, либо как промежуточный результат находить первый член a_1 и разность d арифметической прогрессии. Однако встречаются задачи, когда эти основные параметры арифметической прогрессии не удаётся однозначно определить. Тогда окончательный результат нужно получать без их помощи. Рассмотрим два таких примера.

ПРИМЕР 3. Третий член арифметической прогрессии равен 8. Найти сумму первых пяти членов этой прогрессии.

Р е ш е н и е. В этой задаче можно составить только одно уравнение

$$a_1 + 2d = 8 .$$

Очевидно, отсюда нельзя однозначно определить основные параметры прогрессии a_1 и d. Но это и не требуется. Нужно найти сумму первых пяти членов:

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)\,d}{2}\,n \,; \quad S_5 = \frac{2a_1 + (5-1)d}{2} \cdot 5 \,;$$

$$S_5 = (a_1 + 2d) \cdot 5 \,; \qquad S_5 = 8 \cdot 5 = 40 .$$

Решение становится особенно понятным, если данную арифметическую прогрессию записать так:

$$a_1 \;;\; a_2 \;; a_3 ;\; a_4 \;;\; a_5$$

$$8 - 2d \,;\, 8 - d \,;\, 8 \,;\, 8 + d \,;\, 8 + 2d \,.$$

При сложении все слагаемые с d взаимно уничтожаются. Сумма равна 40.

О т в е т: $S_5 = 40$.

Следующая задача более трудная.

ПРИМЕР 4 *. Две арифметические прогрессии содержат одинаковое число членов. Отношение последнего члена первой прогрессии к первому члену второй прогрессии равно отношению последнего члена второй прогрессии к первому члену первой прогрессии и равно 6. Отношение суммы всех членов первой прогрессии к сумме всех членов второй прогрессии равно 3. Найдите отношение разностей этих двух прогрессий.

Решение.

$$\begin{cases} \dfrac{a_n}{b_1}=6 \\ \dfrac{b_n}{a_1}=6 \\ \dfrac{S_{an}}{S_{bn}}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1+(n-1)\,d_a=6b_1 \\ b_1+(n-1)\,d_b=6a_1 \\ 2a_1+(n-1)d_a=3(2b_1+(n-1)d_b) \end{cases}$$

Вычтем из 3-го уравнения 1-е: $a_1=3(n-1)d_b$ или $3(n-1)d_b=a_1$. Из полученного уравнения вычтем утроенное 2-е уравнение: $17a_1=3b_1$, отсюда $a_1=\frac{3}{17}b_1$. Перепишем 1-е и 2-е уравнения в виде:

$$\begin{cases} (n-1)d_a=6b_1-a_1, \\ (n-1)d_b=6a_1-b_1 \end{cases}$$

и разделим одно на другое: $\dfrac{d_a}{d_b}=\dfrac{6b_1-a_1}{6a_1-b_1}$. Сделаем подстановку

$a_1=\frac{3}{17}b_1$. Получим $\dfrac{d_a}{d_b}=\dfrac{6b_1-\frac{3}{17}b_1}{6\cdot\frac{3}{17}b_1-b_1}=\dfrac{99}{1}=99$.

Ответ: 99.

Подобная задача была в билетах абитуриентов, поступающих на 6-й факультет СГАУ в 1999 году. Задача оказалась достаточно трудной: в среднем только трое абитуриентов из десяти справлялись с ней в полной мере. Здесь не удаётся (и не требуется!) найти первый член и разность каждой прогрессии. Нужно составить систему уравнений и попытаться выразить искомую величину $\frac{d_a}{d_b}$ через отношения других величин.

Геометрическая прогрессия

Геометрической прогрессией называется числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на некоторое число, например:

$3 ; 6 ; 12 ; 24 ; ...$ - геометрическая прогрессия;

$b_1 = 3$ - первый член геометрической прогрессии;

$q = 2$ - знаменатель геометрической прогрессии.

Таким образом, $b_n = b_{n-1}\, q$.

Замечание. При определении *геометрической* прогрессии делается оговорка: ни первый член , ни знаменатель геометрической прогрессии не должны равняться нулю. Получается, что *геометрическая* прогрессия не может содержать нули. Отметим, что подобного ограничения нет у *арифметической* прогрессии.

Запишем геометрическую прогрессию двумя способами: сначала в общем виде, а затем с помощью первого члена и знаменателя прогрессии:

$b_1; \quad b_2; \quad b_3; \quad b_4; \quad ...; \quad b_n; \ ...$

$b_1; \quad b_1 q; \quad b_1 q^2; \quad b_1 q^3; \quad ...; \quad b_1 q^{n-1}; \ ...$

Можно заметить закономерность: показатель знаменателя q на единицу меньше номера члена прогрессии:

$$b_n = b_1 q^{n-1} .$$

Сумма n первых членов геометрической прогрессии определяется по формуле:

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} .$$

Геометрическая прогрессия, у которой $|q|<1$, называется <u>бесконечно убывающей</u>, а её сумма определяется по формуле:

$$S=\frac{b_1}{1-q}.$$

Сформулируем основное свойство геометрической прогрессии: каждый член прогрессии, начиная со второго, есть среднее геометрическое соседних с ним членов:

$$b_n^2=b_{n-1}b_{n+1}.$$

Это свойство часто используют в качестве признака геометрической прогрессии.

Рассмотрим примеры.

<u>ПРИМЕР 5.</u> Найти геометрическую прогрессию, состоящую из шести членов, если сумма первых трёх членов равна 28, а сумма последних трёх членов равна 224.

Решение. Геометрическая прогрессия содержит 6 членов. Запишем их в виде:

$$b_1;\ b_1q;\ b_1q^2;\ b_1q^3;\ b_1q^4;\ b_1q^5.$$

Для нахождения суммы первых трёх членов можно использовать формулу

$$S_n=\frac{b_1(1-q^n)}{1-q};$$

$$S_3=\frac{b_1(1-q^3)}{1-q}=\frac{b_1(1-q)(1+q+q^2)}{1-q}=b_1(1+q+q^2).$$

Но в данном случае проще выполнить непосредственное сложение:

$$S_3=b_1+b_1q+b_1q^2=b_1(1+q+q^2).$$

Аналогично найдём сумму последних трёх членов прогрессии:

$$b_1q^3+b_1q^4+b_1q^5=b_1q^3(1+q+q^2).$$

Составим систему уравнений: $\begin{cases} b_1(1+q+q^2)=28, \\ b_1q^3(1+q+q^2)=224. \end{cases}$

Разделим второе уравнение на первое, получим:

$$q^3 = 8\ ;\ q = 2\ ;\ b_1 = \frac{28}{1+2+4} = 4\ .$$

Найденные первый член и знаменатель определяют прогрессию.

О т в е т: $b_1 = 4\ ;\ q = 2$.

ПРИМЕР 6 . Дана бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Сумма её членов с нечётными номерами в два раза больше суммы членов с чётными номерами. Найдите прогрессию, если сумма первых трёх её членов равна 10,5.

Р е ш е н и е . Запишем геометрическую прогрессию в общем виде:

$$b_1\ ;\ b_1q\ ;\ b_1q^2\ ;\ b_1q^3\ ;\ b_1q^4\ ;\ b_1q^5\ ;\ \ldots\ .$$

Выпишем члены с нечётными номерами:

$$b_1\ ;\ b_1q^2\ ;\ b_1q^4\ ;\ldots$$

Получили геометрическую прогрессию, у которой первый член b_1, знаменатель q^2. Сумма членов этой бесконечно убывающей прогрессии

$$S_{\text{нечет.}} = \frac{b_1}{1-q^2}\ .$$

Выпишем члены с чётными номерами: $b_1q\ ;\ b_1q^3;\ b_1q^5;\ \ldots$

Получили геометрическую прогрессию, у которой первый член b_1q, знаменатель q^2. Сумма членов этой бесконечно убывающей прогрессии

$$S_{\text{чет.}} = \frac{b_1q}{1-q^2}\ .$$

По условию $S_{\text{нечет}} = 2\ S_{\text{чет}}$, то есть $\dfrac{b_1}{1-q^2} = \dfrac{2b_1q}{1-q^2}$.

Разделим равенство на $\dfrac{b_1}{1-q^2} \neq 0$, получим $q = 0{,}5$.

По условию сумма первых трёх членов исходной прогрессии равна $10,5$, следовательно, $b_1 + b_1q + b_1q^2 = 10,5$, откуда

$$b_1 = \frac{10,5}{1+q+q^2} = \frac{10,5}{1+0,5+0,5^2} = 6.$$

Ответ: $b_1 = 6$; $q = 0,5$.

Часто в одной задаче участвуют и арифметическая и геометрическая прогрессии. Рассмотрим такую типовую задачу.

ПРИМЕР 7. Арифметическая и возрастающая геометрическая прогрессии имеют одинаковые первые члены, равные 4. Их третьи члены также равны между собой. Второй член геометрической прогрессии на 2 меньше второго члена арифметической прогрессии. Найдите эти прогрессии.

Решение. Запишем арифметическую прогрессию в виде:

$4;\ 4+d;\ 4+2d$.

Здесь d - разность арифметической прогрессии. По условию задачи у геометрической прогрессии первый и третий члены такие же, а второй на 2 меньше: $4;\ (4+d)-2;\ 4+2d$. Теперь используем свойство геометрической прогрессии $b_n^2 = b_{n-1}b_{n+1}$. Получим уравнение $(2+d)^2 = 4(4+2d)$, решив которое, найдём два значения d: $d_1 = -2$; $d_2 = 6$. Соответственно, рассмотрим два случая:

$d = -2$; арифметическая прогрессия: 4; 2; 0;
геометрическая прогрессия: 4; 0; 0.

Получили постороннее решение, так как геометрическая прогрессия по определению не может включать нули (арифметическая может!).

$d = 6$; арифметическая прогрессия: 4; 10; 16;
геометрическая прогрессия: 4; 8; 16.

Можно проверить и убедиться, что это решение удовлетворяет всем условиям задачи.

Ответ: арифметическая прогрессия: 4; 10; 16;
геометрическая прогрессия: 4; 8; 16.

ПРИМЕР 8. Даны две различные геометрические прогрессии, первые члены которых равны 1. Известно, что разность между вторым членом первой прогрессии и вторым членом второй прогрессии равна 4, а сумма третьих членов прогрессий равна 30. Найдите разность между четвёртым членом первой прогрессии и четвёртым членом второй прогрессии.

Р е ш е н и е. Запишем геометрические прогрессии в виде:

$1\ ;\ p\ ;\ p^2\ ;\ p^3\ ;\ \dots$

$1\ ;\ q\ ;\ q^2\ ;\ q^3\ ;\ \dots$

Здесь p ; q - знаменатели, соответственно, 1-й и 2-й прогрессий. Очевидно, из условий получается система уравнений:

$$\begin{cases} p-q=4, \\ p^2+q^2=30\ . \end{cases}$$

Эта система довольно легко решается. Единственная небольшая трудность заключается в том, что решения содержат квадратные корни, что усложняет дальнейшие вычисления. Мы приведем другое решение. В задаче, вообще говоря, не требуется искать отдельно p и q. Нужно найти разность четвертых членов p^3 - q^3. Разложим это выражение как разность кубов, при этом используем равенства из исходной системы уравнений:

$$p^3-q^3=(p-q)(p^2+pq+q^2)=4\,(30+pq)\,.$$

Чтобы найти произведение pq, возведём первое уравнение из системы в квадрат:

$$p^2-2pq+q^2\ =16\,.$$

Отсюда $pq=\dfrac{(p^2+q^2)-16}{2}=\dfrac{30-16}{2}=7\,.$

Тогда $p^3-q^3=\ 4\,(30+pq)=4(30+7)=148\,.$

О т в е т: 148.

Задачи для самостоятельного решения

1) Сумма 2-го и 4-го членов возрастающей арифметической прогрессии равна 14, а произведение 1-го и 5-го членов той же прогрессии равно 33. Найдите прогрессию.

2) Вычислить: $\frac{31}{5}+\frac{88}{15}+\frac{83}{15}+\ \ldots\ +\frac{1}{5}$.

3) Седьмой член арифметической прогрессии равен 9. Найти сумму первых тринадцати членов.

4)* Две арифметические прогрессии содержат одинаковое число членов. Отношение последнего члена первой прогрессии к первому члену второй прогрессии равно отношению последнего члена второй прогрессии к первому члену первой прогрессии и равно 4. Отношение суммы всех членов первой прогрессии к сумме всех членов второй прогрессии равно 2. Найдите отношение разностей этих двух прогрессий.

5) Записать четыре числа, образующих геометрическую прогрессию, если сумма первых двух чисел равна 16, а сумма последних двух равна 144.

6) Дана бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Сумма её членов с нечётными номерами в три раза больше суммы членов с чётными номерами. Найдите прогрессию, если сумма первых четырёх её членов равна 80.

7) Арифметическая и возрастающая геометрическая прогрессии имеют одинаковые первые члены, равные 6. Их третьи члены также равны между собой. Второй член геометрической прогрессии на 3 меньше второго члена арифметической прогрессии. Найдите эти прогрессии.

8) Даны две различные геометрические прогрессии, первые члены которых равны 1. Сумма вторых членов прогрессий равна 6, а сумма третьих членов равна 28. Найдите сумму четвёртых членов прогрессий.

Ответы:

1) $a_1 = 3$; $d = 2$;

2) $60{,}8$;

3) 117 ;

4) 26 ;

5) $4; 12; 36; 108$ или $-8; 24; -72; 216$;

6) $b_1 = 54$; $q = \dfrac{1}{3}$;

7) арифметическая прогрессия: 6; 15; 24;

   геометрическая прогрессия: 6; 12; 24;

8) 144 .

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3

Решите уравнения:

1. $2\sqrt{3x-2} - x + 3 = 0$.

2. $\sqrt{2x-1} = 2\sqrt{x-1} - \sqrt{x-4}$.

3. $\sqrt[3]{27x^3 - 52x^2 + 45x} = 3x - 2$.

4. $\sqrt[3]{59+x} + \sqrt[3]{4-x} = 3$.

5. $\dfrac{5}{\sqrt[3]{2x-1}} - 2\sqrt[3]{2x-1} = 9$.

6*. $\dfrac{x^2}{\sqrt{12-x}} - 8\sqrt{12-x} = 2x$.

7*. $\sqrt{1-4\cos x} = 2\sin x$.

Решите неравенства:

8. $x - 4 < \sqrt{x^2 - 6x + 5}$.

9. $\sqrt[3]{8x^3 - 9x^2 + 11x - 3} > 2x - 1$.

10. $\sqrt{x+8} + \dfrac{10}{\sqrt{x+8}} \geq 7$.

11. $\dfrac{\sqrt{x+3} - 2}{\sqrt{x+7} - 4} \geq 0$.

12. $\sqrt{49 - 16\sin x} \leq 8\operatorname{tg} x \cdot \cos x - 1$.

13*. Решите систему уравнений. Найдите область допустимых значений и изобразите её на координатной плоскости.

$$\begin{cases} \sqrt{y+3x+1} = 2, \\ \sqrt{2y-x+2} = 2-x \end{cases}.$$

Решите системы уравнений и неравенств:

14. $$\begin{cases} x+4y+\sqrt{x^2-25y^2} = 9 \\ x^3\sqrt{x^2-25y^2} = 0 \end{cases}.$$

15. $$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{3x+1}{x-y}} - \sqrt{\dfrac{4x-4y}{3x+1}} = -1 \\ x^2+y^2-2x-y=3 \end{cases}.$$

16*. $$\begin{cases} \sqrt{x^2-4x-5} > x-3 \\ (x-2)(y+1)\sqrt{y^2-y-12} < 0 \end{cases}.$$

Решите задачи:

17. Сумма 4-го и 6-го членов возрастающей арифметической прогрессии равна 18, а произведение 3-го и 7-го членов той же прогрессии равно 45. Найти прогрессию.

18. Вычислить $36,2 + 35,5 + 34,8 + \ldots + 22,9$.

19*. Две арифметические прогрессии содержат одинаковое число членов. Отношение последнего члена 1-й прогрессии к 1-му члену 2-й прогрессии равно отношению последнего члена 2-й прогрессии к 1-му члену 1-й прогрессии и равно 8. Отношение суммы всех членов 1-й прогрессии к сумме всех членов 2-й прогрессии равно 4. Найдите отношение разностей этих двух прогрессий.

20. Сумма первых трёх членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 14, а сумма всех членов этой же прогрессии равна 16. Запишите прогрессию.

21. Дана бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Сумма её членов с нечётными номерами в 4 раза больше суммы членов с чётными номерами. Найдите исходную прогрессию, если сумма первых четырёх её членов равна 42,5.

22. Арифметическая и убывающая геометрическая прогрессии имеют одинаковые первые члены, равные 27. Их третьи члены также равны между собой. Второй член геометрической прогрессии на 6 меньше второго члена арифметической прогрессии. Найдите эти прогрессии.

23. Даны две различные геометрические прогрессии, первые члены которых равны 1. Сумма вторых членов этих прогрессий равна 8, а сумма четвёртых равна 32. Найти сумму третьих членов прогрессий.

Учебное издание

**ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА.
АРИФМЕТИЧЕСКАЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИИ**

Методические указания и контрольные задания

Издание второе, исправленное

Составители: *Калинкина Людмила Ивановна*
Лямин Евгений Владимирович
Стукалов Сергей Алексеевич

Редактор Н. С. Куприянова

Компьютерная верстка Т. Е. Половнева

Лицензия ЛР № 020301 от 30.12.96 г.

Подписано в печать 28.08.2001 г. Формат 60x84 1/16.
Бумага газетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 2,8. Усл. кр.-отт. 2,9. Уч.-изд.л. 3,0.
Тираж 500 экз. Заказ 88.

Самарский государственный аэрокосмический
университет им. академика С. П. Королева.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

Отпечатано в УПЛ.
443001 Самара, ул. Молодогвардейская, 151.