

Министерство высшего и среднего специального  
образования РСФСР

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени  
авиационный институт имени академика С.П.Королева

ИССЛЕДОВАНИЕ ЦИФРОВЫХ РЕЗОНАТОРОВ

У т в е р ж д е н о  
редакционно-издательским  
советом института  
в качестве  
методических указаний  
для студентов

Куйбышев 1989

Составитель В.Д.Кузнецов

УДК 681.327.8

Исследование цифровых резонаторов: Метод. указания  
/Сост. В.Д.Кузнецов; Куйб. авиац. ин-т. Куйбышев,  
1989. 16 с.

Приводятся краткие сведения из теории цифровых фильтров, излагается методика проведения эксперимента.

Предназначается для студентов, обучающихся по специальности "Радиотехника".

Рецензенты: М.Н.Пиганов, Ю.И.Чекин

Ц е л ь р а б о т ы: а) ознакомление с простейшими моделями цифровых фильтров (ЦФ) и способами их программной реализации; б) практическое исследование на ЭВМ свойств и особенностей частотных и временных характеристик цифровых резонаторов.

## 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

В настоящей работе изучаются свойства и особенности линейных дискретных систем на примере цифровых резонаторов. Цифровым резонатором (ЦР) называют рекурсивный ЦФ (линейную дискретную систему) второго порядка. Сначала приведем некоторые общие сведения, относящиеся к рекурсивным ЦФ, а затем обратимся к ЦР. Существует несколько способов описания цифровых фильтров. Во временной области ЦФ описываются разностным уравнением или импульсной характеристикой. Для рекурсивного ЦФ разностное уравнение имеет вид

$$y(n) = \sum_{m=0}^M a_m x(n-m) - \sum_{k=1}^N b_k y(n-k), \quad (1)$$

где  $x(n), y(n)$  - отсчеты входного и выходного сигналов соответственно;  $a_m, b_k$  - коэффициенты (константы). Как видно из (1), рекурсивный ЦФ является системой с обратной связью: значение отсчета выходного сигнала в текущем моменте времени определяется взвешенной суммой входного отсчета в текущем времени  $x(n)$ ,  $M$  предшествующих входов  $x(n-m)$  и  $N$  отсчетов выходного сигнала в предшествующих тактах  $y(n-k)$ .

Второй вид описания ЦФ во временной области - импульсная характеристика  $h(n)$  представляет собой отклик фильтра на дискретный дельта-импульс  $\delta(n)$ . Можно показать, что импульсная характе-

ристика рекурсивных ЦФ имеет бесконечную длительность. Это означает, что такой ЦФ обладает бесконечной памятью. Отсюда следует второе название рекурсивных ЦФ – БИХ-фильтры.

В области отображений (частотной области) ЦФ описываются передаточной функцией или частотными характеристиками. Передаточная функция  $H(z)$  рекурсивного цифрового фильтра имеет вид

$$H(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{\sum_{m=0}^M a_m z^{-m}}{1 + \sum_{k=1}^N b_k z^{-k}}, \quad (2)$$

где  $A(z), B(z)$  – полиномы переменной  $z^{-1}$ .

Как видно, передаточная функция  $H(z)$  – это суть дробно-рациональная функция комплексного переменного  $z^{-1}$ . Заметим, что выражение (2) нетрудно получить из уравнения (1), применив к последнему операцию  $Z$ -преобразования.

Значения передаточной функции (2), взятые в комплексной  $z$ -плоскости на окружности единичного радиуса  $|z|=1$ , составляют комплексную частотную характеристику. Формально эту характеристику можно получить, подставив в выражение (2)  $z = e^{j\omega}$ :

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{m=0}^M a_m e^{-j\omega m}}{1 + \sum_{k=1}^N b_k e^{-j\omega k}}. \quad (3)$$

Заметим, что в выражениях (1), (3) и далее, если не оговорено особо, шаг дискретизации по времени полагается  $T=1$ . Соответственно для частоты дискретизации можно написать  $f_0 = 1/T = 1$  и  $\omega_0 = 2\pi$ . При этом дискретное время в (1) и частота в (3) оказываются безразмерными переменными.

Частотная характеристика (3) является комплексной функцией вещественного аргумента  $\omega$ . Эту функцию можно записать в показательной форме  $H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)}$ . Модуль передаточной функции  $A(\omega) = |H(e^{j\omega})|$  составляет АЧХ, а аргумент  $\varphi(\omega) = \arg H(e^{j\omega})$  – ФЧХ фильтра. Имея в виду выражение (3), нетрудно получить выражение для АЧХ

$$A(\omega) = \frac{\left[ \left( \sum_{m=0}^M a_m \cos m\omega \right)^2 + \left( \sum_{m=0}^M a_m \sin m\omega \right)^2 \right]^{1/2}}{\left[ \left( 1 + \sum_{k=1}^N b_k \cos k\omega \right)^2 + \left( \sum_{k=1}^N b_k \sin k\omega \right)^2 \right]^{1/2}} \quad (4)$$

и для ФЧХ

$$\varphi(\omega) = -azctg \frac{\sum_{k=1}^N b_k \sin k\omega}{1 + \sum_{k=1}^N b_k \cos k\omega} + azctg \frac{\sum_{m=0}^M a_m \sin m\omega}{\sum_{m=0}^M a_m \cos m\omega} \quad (5)$$

Частотные характеристики дискретных систем являются периодическими функциями частоты  $\omega$ . Период этой периодичности равен частоте дискретизации и составляет  $\omega_0 = 2\pi$ .

Третьим способом, с помощью которого может быть определена линейная дискретная система, является диаграмма распределения полюсов и нулей передаточной функции в комплексной  $z$ -плоскости. Нули и полюсы являются соответственно корнями уравнений:

$$A(z) = \sum_{m=0}^M a_m z^{-m} = 0,$$

$$B(z) = \sum_{k=0}^N b_k z^{-k} = 0.$$

Решив эти уравнения, передаточную функцию (2) можно записать в виде

$$H(z) = H_0 \frac{\prod_{m=1}^M (1 - c_m z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})} = H_0 \frac{\prod_{m=1}^M (z - c_m)}{z^{M-N} \prod_{k=1}^N (z - d_k)}, \quad (6)$$

где  $H_0$  - константа,  $d_k$  - полюсы и  $c_m$  - нули передаточной функции  $H(z)$ .

АЧХ и ФЧХ цифрового фильтра можно получить путем графоаналитического расчета непосредственно по диаграмме нулей и полюсов. Для этого предварительно в выражении (6) положим  $z = e^{j\omega}$  и представим сомножители этого выражения в показательной форме:

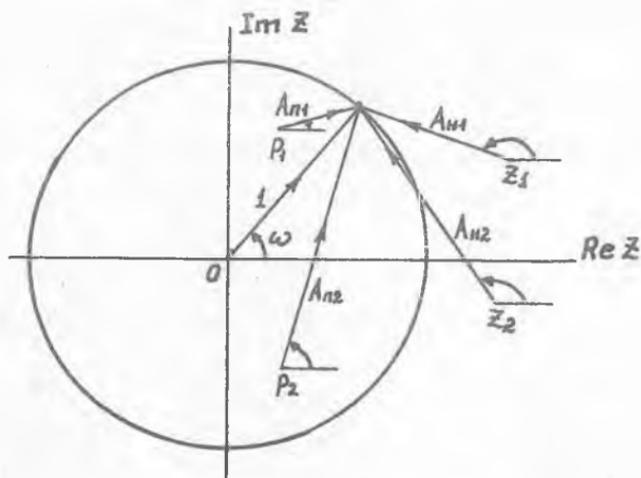
$$e^{j\omega} - c_m = A_{nm} e^{j\varphi_{nm}} \quad \text{и} \quad e^{j\omega} - d_k = A_{nk} e^{j\varphi_{nk}}.$$

Здесь индексы  $n$  и  $k$  означают соответственно "нуль" и "полюс". В результате получим

$$A(\omega) = H_0 \prod_{m=1}^M A_{nm} / \prod_{k=1}^N A_{pk} ; \quad (7)$$

$$\varphi(\omega) = \sum_{m=1}^M \varphi_{nm} - \sum_{k=1}^N \varphi_{pk} - \omega(M-N). \quad (8)$$

Формулы (7), (8) удобны для графоаналитического расчета АЧХ и ФЧХ фильтра. Модули  $A_{nm}$ ,  $A_{pk}$  и углы  $\varphi_{nm}$ ,  $\varphi_{pk}$  векторов в (7) определяются по векторной диаграмме, которая строится на основе распределения нулей и полюсов передаточной функции на  $Z$ -плоскости. Пример такой диаграммы показан на рис. 1. АЧХ и ФЧХ можно получить по (7), (8), повторяя процедуру определения векторов для ряда точек на единичной окружности, соответствующих различным значениям частоты  $\omega$ . Ясно, что вычисления по формулам (4), (5) и (7), (8) должны приводить к адекватным результатам (с точностью до масштабного множителя).



$P_1; P_2$  - полюсы,  $z_1, z_2$  - нули

Р и с. 1.

В настоящей работе, как уже отмечалось, изучаются ЦФ второго порядка (ЦФ). Такой выбор сделан по двум причинам: во-первых, эти фильтры достаточно просты для первоначального ознакомления и во-вторых, большое число реальных физических систем могут рассматриваться в качестве ЦФ.

Рассмотрим фильтр, передаточная функция которого

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1} e^{-\sigma} \cos \Omega}{1 - 2z^{-1} e^{-\sigma} \cos \Omega + z^{-2} e^{-2\sigma}} \quad (9)$$

Фильтр с передаточной функцией вида (9) носит название фильтра Лернера. Эти фильтры по сравнению с другими ЦФ обладают фазовой характеристикой с достаточно высокой степенью линейности и приемлемой избирательностью [3], а поэтому имеют практический интерес.

Как видно из (9), фильтр Лернера имеет один вещественный нуль

$$z_H = e^{-\sigma} \cos \Omega \quad (10)$$

и пару комплексно-сопряженных полюсов

$$z_{n1,2} = e^{-(\sigma \pm j\Omega)} = e^{-\sigma} \cos \Omega \pm e^{-\sigma} \sin \Omega \quad (11)$$

Передаточную функцию (9) фильтра Лернера можно также представить в виде суммы:

$$H(z) = \frac{1/2}{1 - e^{-(\sigma + j\Omega)} z^{-1}} + \frac{1/2}{1 - e^{-(\sigma - j\Omega)} z^{-1}} \quad (12)$$

Для получения импульсной характеристики фильтра используем обратное  $z$ -преобразование:

$$h(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} H(z) z^{n-1} dz \quad (13)$$

При вычислении контурного интеграла (13) удобно воспользоваться представлением передаточной функции в виде (12)

$$h(n) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} \frac{z^n dz}{z - z_{n1}} + \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|=1} \frac{z^n dz}{z - z_{n2}} \right\}, \quad (14)$$

где полюсы  $z_{n1,2}$  определяются выражением (11). Контурные интегралы в (13) вычисляются с помощью теоремы о вычетах. Так как подынтегральные выражения в (14) имеют один простой вычет, то получим

$$h(n) = \frac{1}{2}(z_{n1}^n + z_{n2}^n) = \frac{1}{2}[e^{-(\sigma+j\Omega)n} + e^{-(\sigma-j\Omega)n}] = e^{-\sigma n} \cos \Omega n, \quad (15)$$

Учитывая выражения (1), (2), (9), нетрудно получить для фильтра Лернера разностное уравнение

$$y(n) = x(n) + a_1 x(n-1) - b_1 y(n-1) - b_2 y(n-2), \quad (16)$$

где

$$a_1 = -e^{-\sigma} \cos \Omega, \quad b_1 = -2e^{-\sigma} \cos \Omega, \quad b_2 = e^{-2\sigma}.$$

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ, ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

В настоящей работе ставятся следующие конкретные задачи: а) исследование характеристик фильтра Лернера; б) исследование программной реализации фильтра Лернера.

Первая задача состоит из двух частей: экспериментальной и расчетной. В экспериментальной части проводится исследование АЧХ, ФЧХ и импульсных характеристик ЦР при различных исходных данных. Это исследование проводится на цифровой модели. Для этого машинного эксперимента используется программа *REZONANT*. Эта программа предлагается студентам в законченном виде. Краткие сведения о программе и особенности работы с ней приведены ниже в разд. 4.

При использовании готового математического обеспечения машинный эксперимент состоит в подготовке исходных данных, прогоне программы с этими данными на ЭВМ, фиксации и анализе результатов. При прогоне программы исходные данные варьируются, в результате чего просчитывается несколько вариантов задачи.

Машинный эксперимент проводится в три шага. В первом из них берется одно значение модуля полюса  $e^{-\sigma}$  и 4...6 значений аргумента  $\Omega$  на интервале  $0-\pi$ . На втором шаге, наоборот, выбирается одно значение полярного угла и 2...3 значения модуля. Благодаря этому имеется возможность проследить закономерность между расположением полюсов и параметрами характеристик фильтра. Выводная информация выдается в виде графиков АЧХ, ФЧХ и импульсных характеристик. Частотные характеристики строятся на интервале частот  $0-2\pi$ .

Графики выводятся на дисплей для визуального наблюдения. При анализе результатов этой части эксперимента следует прежде всего обратить внимание на особенности характеристик: наличие выбросов и провалов АЧХ, их положение на частотной шкале, величину полосы пропускания фильтра, вид ФЧХ, структуру и длительность импульсной характеристики. Результаты этого наблюдения следует отразить в отчете по работе.

На третьем шаге эксперимента, учитывая результаты первых двух этапов, выбирается одно значение модуля  $e^{-\sigma}$  полярного угла  $\Omega$  и производится повторный расчет характеристик. После просмотра характеристик их таблицы следует вывести на печать и приложить к отчету.

Обратимся к расчетной части задачи исследования характеристик ПФ Лернера. Цель этих расчетов состоит в том, чтобы убедиться в адекватности приведенных выше способов описания фильтров. В машинном эксперименте характеристики фильтров рассчитываются по формулам (4), (5). В отличие от этого предлагается провести расчет частотных характеристик графоаналитическим методом. Для этого на миллиметровой бумаге вычерчивается диаграмма полюсов и нулей вида, подобного приведенному на рис. 1. В качестве исходных берутся данные, для которых ранее получена распечатка характеристик. Далее выбираются 10-15 значений частоты  $\omega$  на интервале  $0-2\pi$  и на единичной окружности  $|z|=1$  диаграммы отмечаются точки, соответствующие этим частотам. Затем непосредственно по чертежу измеряются модули (длины) векторов  $A_n, A_{n1,2}$  [см рис. 1 и формулу (7)] для каждой из выбранных частот. Далее по формуле (7) рассчитывается АЧХ и по полученным точкам строится график частотной характеристики. Результаты этих измерений и вычислений оформляются в виде таблицы. Рассчитанную таким образом характеристику нужно сравнить с полученной ранее путем моделирования на ЭВМ и дать заключение о их соответствии.

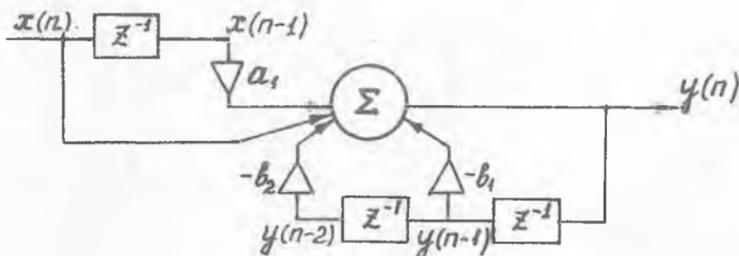
По результатам машинного эксперимента следует определить зависимость от значений параметров  $\sigma$  и  $\Omega$  полюсов следующих параметров фильтра: наличие, амплитуду выброса АЧХ, положение его на шкале частот; полосу пропускания фильтра; длительность, структуру импульсной характеристики, характерные параметры ФЧХ. Определить значение произведения полосы пропускания на длительность импульсной характеристики при различных значениях  $\sigma$  и  $\Omega$ . Дать собственное суждение о причинности и закономерностях изменения характеристик фильтра.

### 3. ИССЛЕДОВАНИЕ СПОСОБОВ ПРОГРАММНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ

Перейдем ко второй части работы – исследованию программной реализации фильтра Лернера.

Под реализацией ЦФ понимают некоторую совокупность технических средств, с помощью которых выполняется алгоритм цифровой фильтрации сигналов. Существуют два основных способа реализации: аппаратный и программный. При аппаратной реализации алгоритм цифровой фильтрации, подобно обычным электронным устройствам, однозначно определяется схемой технического устройства. При программной реализации ЦФ выполняется на основе универсальной и специализированной микроЭВМ. В этом случае алгоритм цифровой фильтрации жестко не связан с построением процессора и определяется программой, вносимой в память микроЭВМ. В настоящей работе изучаются простейшие способы программной реализации ЦФ.

Рассмотрим сначала некоторые общие вопросы реализации ЦФ. Рекурсивные ЦФ второго порядка могут быть построены по прямой и канонической формам. Структурная схема ЦФ Лернера в прямой форме показана на рис. 2. Компонентами этой схемы являются элементы задержки на один такт синхронизации (прямоугольники с символом  $z^{-1}$ ), умножители (треугольники) с помеченными коэффициентами умножения и сумматор. Прямая форма, как нетрудно убедиться, непосредственно следует из выражений (16) для разностного уравнения и (9) для передаточной функции.



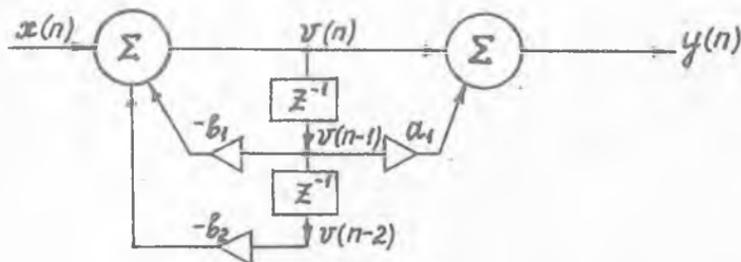
Р и с. 2.

Каноническая форма ЦФ показана на рис. 3. Эту схему можно получить путем несложного видоизменения передаточной функции ЦФ [1]. Алгоритм фильтрации в этом случае имеет вид:

$$v(n) = x(n) - b_1 v(n-1) - b_2 v(n-2), \quad (17)$$

$$y(n) = v(n) + a_1 v(n-1),$$

где  $v(n)$  - вспомогательная "внутренняя" переменная. Как видно в канонической форме, за счет увеличения количества сумматоров до 2 уменьшается число элементов задержки (ячеек памяти микроЭВМ, используемых для хранения данных).



Р и с. 3.

Структурная схема программы моделирования ЦФ Лернера в прямой форме показана на рис. 4. На схеме, помимо собственно фильтра, показан генератор входного сигнала, предназначенный для моделирования сигнала  $x(n)$ .

Структурная схема программы моделирования фильтра в канонической форме приведена на рис. 5.

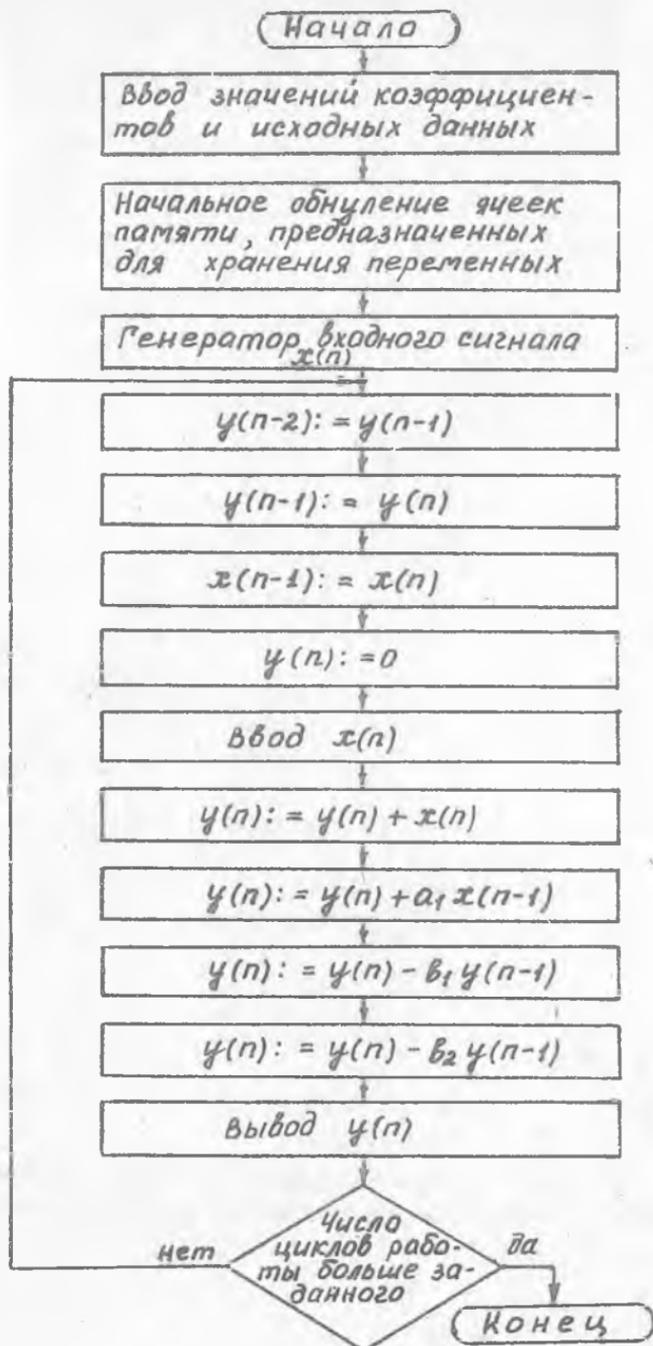
В качестве входного сигнала следует взять какой-либо тест-сигнал. Простейшими такого рода сигналами являются  $\delta$  - импульс

$$x(n) = \delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

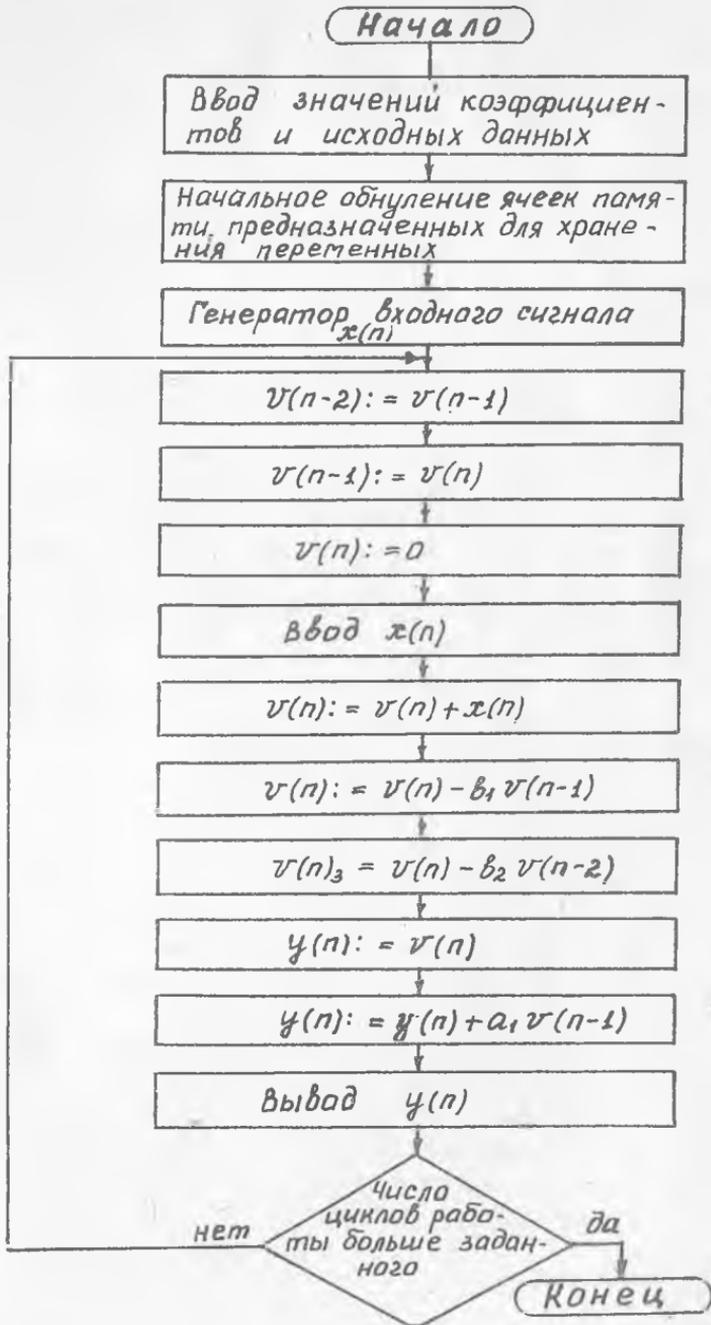
или единичная ступень

$$x(n) = u(n) = \begin{cases} 1 & \text{при } n \geq 0, \\ 0 & \text{при } n < 0. \end{cases}$$

Ясно, что при сигнале первого вида выходом ЦФ будет его импульсная характеристика, а при сигнале второго вида - переходная функция.



Р и с . 4 .



Р и с. 5.

В случае использования тест-сигнала первого вида импульсную характеристику, полученную при моделировании ЦФ, следует сравнить с характеристикой, полученной на первом этапе работы.

При написании программы модели ЦФ следует предусмотреть начальное обнуление всех переменных. В противном случае фильтр будет системой с ненулевыми начальными условиями.

В программе следует предусмотреть также массив чисел для хранения отсчетов выходного сигнала и оператор (операторы) вывода содержимого этого массива на дисплей и печать.

Перечислим содержание второго этапа работы:

1. Выбрать вид структурной схемы ЦФ (прямую или каноническую).
2. Составить программу, моделирующую ЦФ, на каком-либо алгоритмическом языке высокого уровня (выбор языка согласовать с преподавателем).
3. Программу ввести в ЭВМ с клавиатуры. Ввести также значения коэффициентов фильтра, полученные ранее на первом этапе работы.
4. Результатом этого шага работы является создание исходного модуля программы.
5. Создать объектный и загрузочный модули, проверив попутно отсутствие ошибок.
6. Провести решение, вывести результаты на печать.
7. Проанализировать результаты, убедиться, что программа реализует алгоритм цифрового резонатора.

Результаты работы отразить в отчете.

#### 4. ПРАКТИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ РАБОТЫ.

##### СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

Программа *REZONT* написана на алгоритмическом языке ФОРТРАН и реализована на миниЭВМ типа ДВК-2. Работа с программой проводится в диалоговом режиме. Для ввода данных используются операторы бесформатного ввода. При таком способе в случае, если вводятся с помощью одного оператора несколько чисел, то эти числа в строке разделяются запятыми. Например: 5,0.95, 0.85, 0.65, 0.45, 0.25. Количество вариантов решаемых задач не должно превышать 8.

Отчет по работе должен включать в себя:

1. Наименование работы.

2. Исходные данные, используемые на первом этапе работы.
3. Установленные в эксперименте зависимости характеристик ЦФ от значений модуля и фазы полюсов.
4. Распечатку характеристик.
5. Графоаналитический расчет АЧХ.
6. Программу цифровой модели.
7. Распечатку результатов моделирования.
8. Выводы по работе.

#### КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие существуют способы описания цифровых фильтров и в чем их особенности?
2. Какова сущность графоаналитического расчета характеристик ЦФ по диаграмме нулей и полюсов?
3. Каково влияние модуля полюсов ЦФ на его характеристики?
4. Каково влияние аргумента полюсов ЦФ?
5. Какие структурные схемы реализации ЦФ Вам известны? В чем их особенность?

#### Библиографический список

1. Кузенков В.Д. Методы и устройства цифровой обработки сигналов: Учеб. пособие / Куйбыш. авиац. ин-т. Куйбышев, 1988. 95 с.
2. Гольденберг Л.М., Матюшкин Б.Д., Поляк М.П. Цифровая обработка сигналов: Справочник. М.: Радио и связь, 1986. 312 с.
3. Лэм Г. Аналоговые и цифровые фильтры / Пер. с англ. М.: Мир, 1982. 592 с.

Составитель Виктор Дмитриевич Кузнецов

ИССЛЕДОВАНИЕ ЦИФРОВЫХ РЕЗОНАТОРОВ

Редактор Т.К.Кретьнина  
Техн.редактор Н.М.Каленюк  
Корректор Н.Д.Чайникова

Подписано в печать 5.04.89 г. Формат 60x84<sup>I</sup>/16  
Бумага оберточная белая. Печать офсетная.  
Усл.п.л. 0,93. Уч.-изд.л. 0,9. Т. 250 экз.  
Заказ № 5772.

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени  
авиационный институт имени академика С.П.Королева.  
443001, г. Куйбышев, ул. Молодогвардейская, 151.

Типография им. В.П.Мяги Куйбышевского полиграфического  
объединения. 443099, г. Куйбышев, ул. Венцека, 60.