Государственный комитет РСФСР
по делам науки и высшей школы

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени
авиационный институт имени академика С.П.Королева

ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРА ПОВЕДЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ КРИВЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ I-ГО ПОРЯДКА МЕТОДОМ ИЗОКЛИН

Методические указания

Самара 1991

ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРА ПОВЕДЕНИЯ
ИНТЕГРАЛЬНЫХ КРИВЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ I-ГО ПОРЯДКА
МЕТОДОМ ИЗОКЛИН

Составитель Б е з м е н о в Виталий Михайлович

Редактор Н.Д.Ч а й н и к о в а
Техн.редактор Н.М.К а л е н ю к
Корректор Е.Г.Ф и л и п п о в а

Подписано в печать 05.06.91. Формат 60x84 1/16.
Бумага оберточная. Печать оперативная. Усл.п.л. 0,93.
Усл.кр.-отт. 1,05. Уч.-изд.л. 0,80.
Тираж 200 экз. Заказ 134 Бесплатно.
Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени
авиационный институт имени академика С.П.Королева.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

Участок оперативной полиграфии Куйбышевского
авиационного института. 443001 Самара, ул.Ульяновская, 18.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Дано дифференциальное уравнение I-го порядка

$$y' = f(x, y). \tag{I}$$

Требуется:

построить п о л е   н а п р а в л е н и й, определяемое данным уравнением;

исследовать характер поведения интегральных кривых уравнения;

построить графики некоторых интегральных кривых;

найти особые точки уравнения и указать их тип.

Задачи к индивидуальному заданию приведены в конце методических указаний.

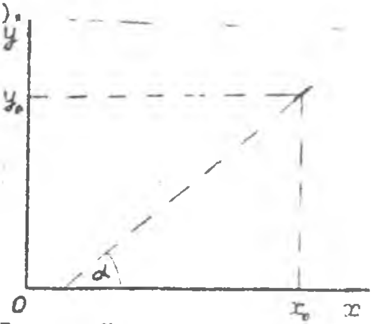
КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Н а п р а в л е н и е в точке $(x_0, y_0) \in G$ изображается отрезком небольшой длины с центром в данной точке и определяется углом α наклона отрезка к оси Ox (рис.I).

Уравнение (I) задает в области G п о л е   н а п р а в л е н и й, для которого

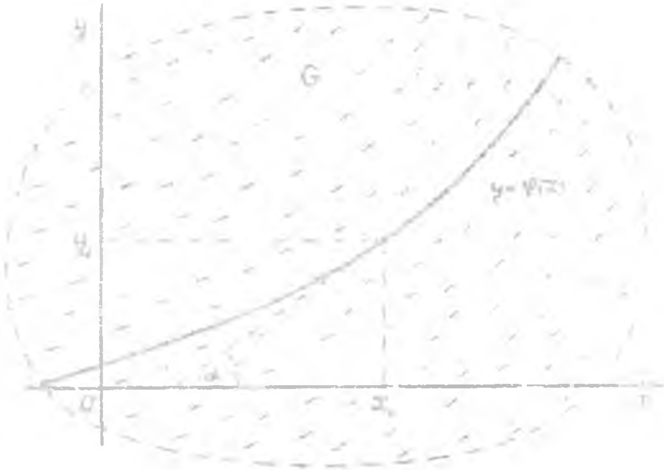
$$tg\,\alpha = f(x, y). \tag{2}$$

Интегральная кривая $y = \varphi(x)$ уравнения (I) имеет в каждой своей точке (x, y) касательную, направление которой совпадает с направлением п о л я   н а п р а в л е н и й (2) данного уравнения (рис.2).

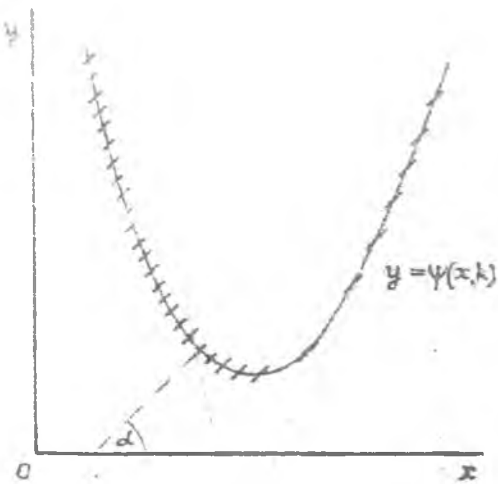


Р и с.I.Направление в точке (x_0, y_0)

Чтобы провести интегральные кривые уравнения (1), надо построить соответствующее этому уравнению поле направлений (2).



Р и с. 2. Поле направлений уравнения (1)



Р и с.3. Изоклина с данным направлением

Поле направлений удобно строить с помощью изоклин. **Изоклина** — кривая $y = \varphi(x,k)$, в точках которой поле направлений (2) имеет постоянное значение $tg\alpha = k$ (рис.3).

Для практического построения поля направлений в области G следует построить изоклины $y = \varphi(x,k)$ с различными значениями k (например, $k = 0$; ∞; $\pm 0,5$; ± 1; ± 2) и отметить на них соответствующие направления.

Регулярная точка дифференциального уравнения (I) – точка $(x,y)\in G$, через которую проходит единственная интегральная кривая этого уравнения.

О с о б а я   т о ч к а дифференциального уравнения (I) – точка (x,y), которая не является регулярной. Через особую точку либо проходит несколько интегральных кривых (или даже бесконечно много), либо не проходит ни одной интегральной кривой.

Особой точкой дифференциального уравнения

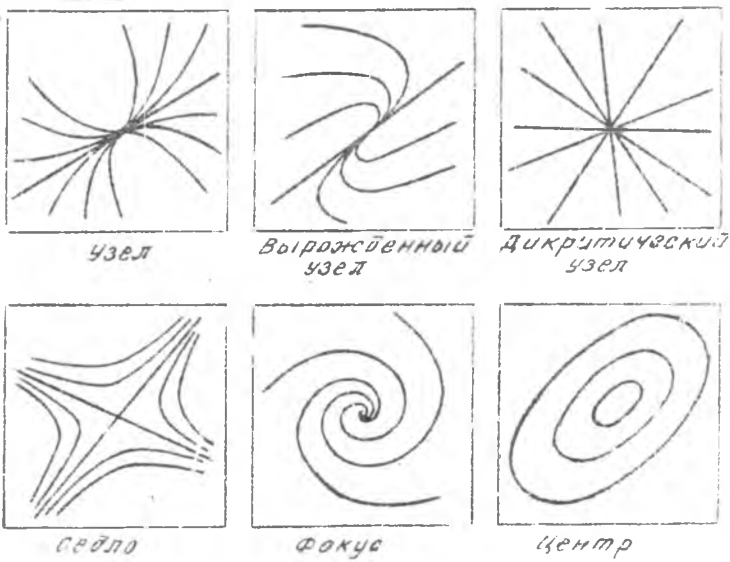
$$y' = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)} \tag{3}$$

является точка (x,y), в которой выполняется

$$P(x,y) = Q(x,y) = 0.$$

Тип особой точки уравнения (3) определяется характером поведения интегральных кривых в некоторой окрестности этой точки.

Основные типы особых точек изображены на рис. 4.



Р и с. 4. Основные типы особых точек

Ниже приводятся примеры исследования характера поведения интегральных кривых дифференциальных уравнений I-го порядка и построения их графиков с применением метода изоклин.

Пример I

Построить поле направлений и характерные интегральные кривые уравнения

$$y' = y - x^2 + 2x - 2.$$

Р е ш е н и е:

$y' = k \Rightarrow y = x^2 - 2x + 2 - k$ – уравнение изоклин.

$y'' = 0 \Rightarrow y = x^2$ – линия точек перегиба интегральных кривых.

Поле направлений и графики характерных интегральных кривых приведены на рис. 5.

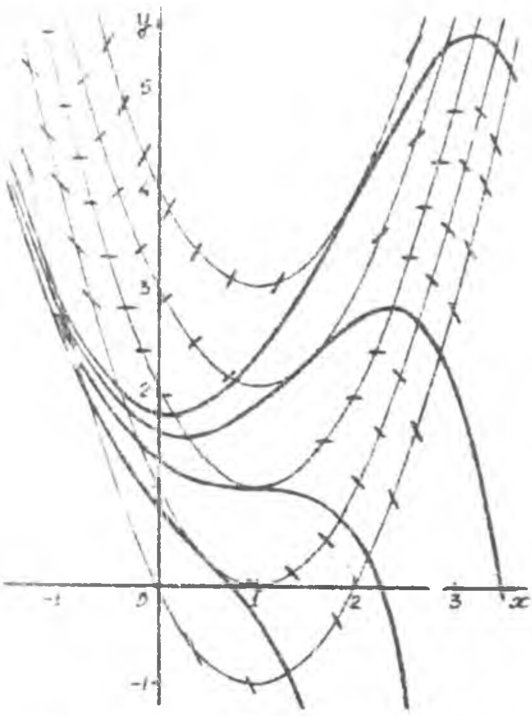


Рис.5. Интегральные кривые уравнения $y' = y - x^2 + 2x - 2$

Интегральные кривые, проходящие выше точки (I,I), имеют экстремумы, точки которых лежат на параболе $y = x^2 - 2x + 2$; при $x < 1$ – это минимумы, а при $x > 1$ – максимумы.

Интегральная кривая, проходящая через точку (I,I), а также все интегральные кривые, лежащие ниже этой кривой, экстремумов не имеют.

В о п р о с ы:

I. Имеют ли интегральные кривые данного уравнения вертикальные асимптоты?

2. Имеются ли интегральные кривые без точек перегиба?

3. Имеются ли интегральные кривые с двумя точками перегиба?

Пример 2

Исследовать интегральные кривые уравнения

$y' = \sin(x+y)$.

Р е ш е н и е. Пусть $y = kx + b$ – интегральная кривая данного уравнения. Следовательно,

$$\forall x:\ k = \sin((k+1)x + b) \Rightarrow k = -1,\ b = -\pi/2 + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Рассматриваем полосу $-\pi/2 \leqslant y + x \leqslant \frac{3\pi}{2}$;

а) $y' = 0$: $y = -x$ – геометрическое место точек минимумов интегральных кривых; $y = \pi - x$ – геометрическое место точек максимумов;

б) $y' = -1$: $y = -x - \pi/2$, $y = -x + \frac{3\pi}{2}$ – интегральные кривые данного уравнения;

в) $y' = 1$, $y'' = 0$: $y = \frac{\pi}{2} - x$ – прямая, на которой расположены точки перегиба интегральных кривых.

Поле направлений и графики интегральных кривых в рассматриваемой полосе изображены на рис. 6.

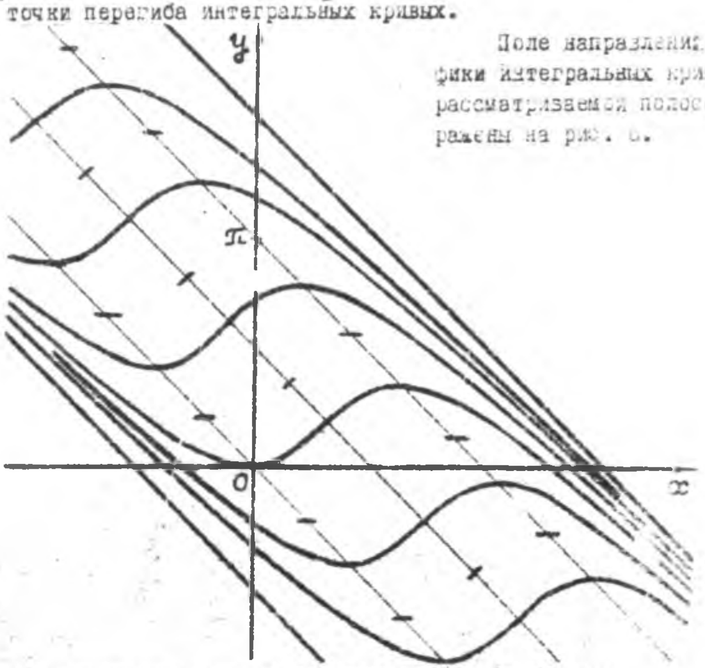


Рис.6. Интегральные кривые уравнения $y' = \sin(x+y)$

В других полосах $-\frac{\pi}{2}+2\pi n < x+y < \frac{3\pi}{2}+2\pi n$, $n=\pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ картина поведения интегральных кривых аналогичная.

Упражнения:

1. Показать, что прямые $y=-x-\frac{\pi}{2}$ и $y=-x+\frac{3\pi}{2}$ являются асимптотами интегральных кривых, лежащих в полосе $-\frac{\pi}{2}<y+x<\frac{3\pi}{2}$.

2. Показать, что все интегральные кривые в какой-либо полосе получаются из одной кривой параллельным переносом

$\xi = x - a$, $\eta = y + a$.

3. Показать, что график интегральной кривой, проходящей через точку $(a, \frac{\pi}{2} - a)$, симметричен относительно этой точки.

Пример 2

Исследовать поведение интегральных кривых в окрестности особой точки уравнения $y' = \frac{y-x}{y+x}$.

Решение: $(0;0)$ - особая точка данного уравнения;

$y' = k$: $(1-k)y=(1+k)x$ - уравнение изоклины;

$y' = 0$: $y = x$ - прямая, на которой расположены экстремумы интегральных кривых: минимумов при $x<0$; максимумов при $x>0$:

$y' = \infty$: $y = -x$;

$y' = 1$: $x = 0$;

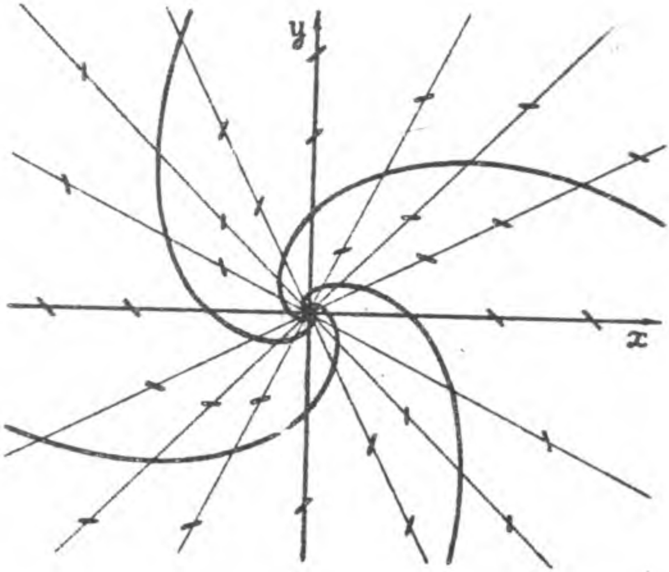
$y' = -1$: $y = 0$.

Поле направлений и интегральные кривые данного уравнения изображены на рис. 7.

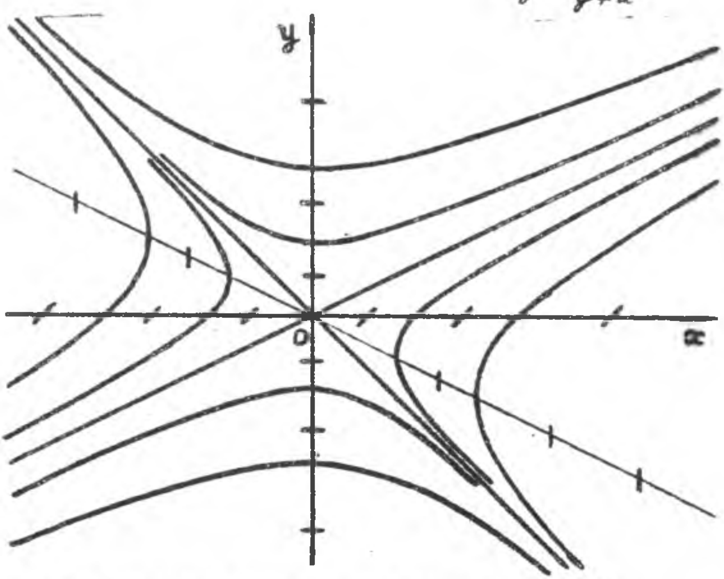
Особая точка $(0,0)$ - фокус.

Вопрос. В каких точках плоскости поле направлений данного уравнения не определено?

Упражнение. Показать, что все интегральные кривые данного уравнения получаются из одной кривой поворотом ее на некоторый угол относительно начала координат.



Р и с. 7. Интегральные кривые уравнения $y' = \frac{y-x}{y+x}$



и с. 8. Интегральные кривые уравнения $y' = \frac{x}{x+2y}$

Пример 4

Построить интегральные кривые и установить тип особой точки уравнения

$$y' = \frac{x}{x+2y}.$$

Р е ш е н и е: (0;0) – особая точка данного уравнения. Прямые $y = -x$ и $y = \frac{x}{2}$ являются интегральными кривыми данного уравнения. Поле направлений и интегральные кривые уравнения изображены на рис.8.

Особая точка (0,0) – седло.

У п р а ж н е н и я:

I. Показать, что интегральные кривые данного уравнения, пересекающие верхнюю полуось Oy, имеют на этой полуоси точки минимумов.

2. Показать, что интегральные кривые не имеют точек перегиба.

3. Показать, что прямые $y = -x$ и $y = \frac{x}{2}$ являются асимптотами интегральных кривых.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

I. Что называется п о л е м н а п р а в л е н и й дифференциального уравнения I-го порядка?

2. Имеет ли поле направлений дифференциальное уравнение 2-го порядка?

3. Что называется и з о к л и н о й поля направлений?

4. Может ли изоклина поля направлений быть интегральной кривой данного уравнения?

5. Могут ли изоклины данного поля направлений пересекаться?

6. Могут ли пересекаться интегральные кривые дифференциального уравнения I-го порядка?

7. [illegible] частное решение дифференциального уравнения

$$y' = \frac{ax+by}{cx+dy},$$

[illegible] является линейной функцией? Сколько может быть та[illegible]

8. Что называется особой точкой дифференциального уравнения?

9. Есть ли особая точка у дифференциального уравнения

$$y' = \frac{ax + by + c}{dx + ey + f} ?$$

Как найти эту точку геометрически?

10. Для какого дифференциального уравнения особая точка (0,0) является дикритическим узлом?

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задачи

А. Построить приближенно интегральные кривые уравнений:

1) $y' = \dfrac{y(2y - x)}{x^2}$;

2) $y' = \dfrac{y(2y^2 - x^2)}{x^2(2y - x)}$;

3) $y' = \dfrac{xy}{x + y}$;

4) $y' = \dfrac{y^2}{y + x^2}$;

5) $y' = \dfrac{xy}{y - x^2}$;

6) $y' = \dfrac{2y^2 - x^2}{xy}$;

7) $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$;

8) $y' = \dfrac{x + y^2}{x^2 + y}$;

9) $y' = \dfrac{2xy}{x^2 + y}$;

10) $y' = \dfrac{4y^2 - x^2}{2xy - 4y - 8}$

Б. Найти особые точки уравнений и установить их тип*:

1) $y' = \dfrac{y + \sqrt{1 + 2x^2}}{x + y + 1}$;

2) $y' = \dfrac{e^{y^2 - x} - e}{\sqrt{(x-y)^2 + 3} - 2}$;

3) $y' = \dfrac{\operatorname{arctg} x(x+y)}{\sqrt{x^2 - y + 2} - 2}$;

4) $y' = \dfrac{x^2 - y^2}{\ln \frac{y^2 - y + 1}{3}}$;

5) $y' = \dfrac{xy - 2}{(2x - y)(x - 2)}$;

6) $y' = \dfrac{\ln \frac{1 - x + x^2}{3}}{x^2 - y}$;

7) $y' = \dfrac{e^x - e^y}{\ln(2 - y^2)}$;

8) $y' = \dfrac{3 - \sqrt{x^2 + 8y}}{\ln(1 - y + y^2)}$;

9) $y' = \dfrac{x^2 - (y-2)^2}{x^2 - y}$;

10) $y' = \dfrac{6x - 9y - 4xy + 5y^2}{6x - 6y + 5xy - 4x^2}$

* Указание. В окрестности особой точки числитель и знаменатель дифференциального уравнения разложить по формуле Тейлора, ограничиваясь членами I-го порядка.

Упражнения

1. Написать дифференциальное уравнение, изоклинами которого являются:

а) равнобочные гиперболы $xy = a$;

б) параболы $y^2 = 2px$;

в) окружности $x^2 + y^2 = R^2$.

2. Найти изоклины дифференциального уравнения семейства парабол $y = ax^2$.

3. Показать, что интегральные кривые уравнения $y' = 2x - y$ получаются из одной интегральной кривой путем параллельного переноса $\xi = x + a$, $\eta = y + b$. Каково при этом соотношение между a и b?

4. Указать линейное уравнение, изоклинами которого являются прямые.

5. Показать, что изоклинами однородного уравнения служат прямые, проходящие через начало координат. Доказать справедливость обратного утверждения.

6. Найти угол между интегральными кривыми уравнений $y' = x + y$ и $y' = x - y$ в точке (2;1).

7. Найти угол пересечения интегральной кривой уравнения $y' = x^2 + y^2 + 1$ с осью абсцисс в точке (0;0).

8. Найти геометрическое место точек экстремумов интегральных кривых уравнения $y' = x + 1$.

9. Найти геометрическое место точек перегиба интегральных кривых уравнения $y' = y - x^2$.

10. Найти прямолинейную интегральную кривую уравнения $y' = 2x - y$.

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ

Индивидуальное задание по теме данных методических указаний (представлено 30 вариантов) состоит из двух задач.

Поле направлений для каждого уравнения строится по изоклинам.

При исследовании характера поведения интегральных кривых данного уравнения следует установить, имеют ли эти кривые асимптоты, точки экстремумов и точки перегиба.

При выполнении индивидуального задания необходимо построить приближенные графики всех характерных интегральных кривых данного уравне-

При решении задачи №2 полезно вначале установить, является ли прямая $y = kx$ (для некоторого значения k) интегральной кривой данного уравнения.

В заключение необходимо ответить на приведенные в пособии контрольные вопросы.

Вариант I

1. [illegible]
2. $y' = \dfrac{x + 4y - 5}{2x + 3y - 5}$.

Вариант 2

1. $y' = 4x^2 - y^2 - 1$;
2. $y' = \dfrac{x - 2y - 3}{3x - 4y - 7}$.

Вариант 3

1. $y' = x^2 - 2x + y^2$;
2. $y' = \dfrac{4x - y - 3}{3x - 2y + 1}$.

Вариант 4

1. $y' = -4x^2 - y^2$;
2. $y' = \dfrac{2x - y - 7}{x - y - 1}$.

Вариант 5

1. $y' = x^2 + 4y^2 + 1$;
2. $y' = \dfrac{y - 2x + 5}{2y - 3x + 8}$.

Вариант 6

1. $y' = x + y - xy$;
2. $y' = \dfrac{x - 4y + 5}{2y - 3x + 5}$.

Вариант 7

1. $y' = 2y + x^2 + 1$;
2. $y' = \dfrac{2x + y + 3}{3x + 4y + 2}$.

Вариант 8

1. $y' = -x^2 + 2xy + 1$;
2. $y' = \dfrac{x + 1}{2x - y + 4}$.

Вариант 9

1. $y' = x^2 - 4y^2 - 1$;

2. $y' = \dfrac{16 - 6x - 5y}{x + 3y - 7}$.

Вариант 10

1. $y' = x^2 - y$;

2. $y' = \dfrac{4 - 2x - 2y}{2x + 5y - 7}$.

Вариант 11

1. $y' = -x^2 + 2xy + 1$;

2. $y' = \dfrac{2x + y + 5}{3x + 6}$.

Вариант 12

1. $y' = x - y + xy$;

2. $y' = \dfrac{y - x}{3x + y + 4}$.

Вариант 13

1. $y' = y^2 - 2xy$;

2. $y' = \dfrac{4y - 2x}{x + y - 3}$.

Вариант 14

1. $y' = 4x^2 + y^2 + 1$;

2. $y' = \dfrac{y - 2x - 5}{y + 1}$.

Вариант 15

1. $y' = -x^2 + 4y^2$;

2. $y' = \dfrac{2x - y - 3}{x - 2}$.

Вариант 16

1. $y' = x^2 - 4xy + 4y^2$;

2. $y' = \dfrac{2x + y}{y - x - 3}$.

Вариант 17

1. $y' = x^2 + 2xy$;

2. $y' = \dfrac{x + 2y - 1}{x - y + 2}$.

Вариант 18

I. $y' = 4x^2 + y^2 - 1;$

2. $y' = \dfrac{x - 2y + 4}{3x - 2y + 8}.$

Вариант 19

I. $y' = 4y^2 - x^2;$

2. $y' = \dfrac{2x + y}{x + y - 1}.$

Вариант 20

I. $y' = -x^2 + 4y^2 + 1;$

2. $y' = \dfrac{y - 3x - 5}{x + 3y + 7}.$

Вариант 21

I. $y' = x^2 + 2y - y^2;$

2. $y' = \dfrac{x - y}{x + y + 2}.$

Вариант 22

I. $y' = 1 - x^2 - 4y^2;$

2. $y' = \dfrac{3x - y - 2}{x + y - 2}.$

Вариант 23

I. $y' = 4x^2 + y^2;$

2. $y' = \dfrac{4x + y - 3}{x - 2y - 3}.$

Вариант 24

I. $y' = x^2 - 4y^2 + 1;$

2. $y' = \dfrac{x + y - 3}{y - x - 1}.$

Вариант 25

1. $y' = 1 - x^2 + 4y^2;$

2. $y' = \dfrac{2x + y}{x - y + 3}.$

Вариант 26

I. $y' = x^2 + 2xy + y^2;$

2. $y' = \dfrac{4x + y + 5}{x - 2y + 3}$

Вариант 27

I. $y' = 1 - x^2 - 4y^2$;

2. $y' = \dfrac{x + y + 1}{x - y + 3}$.

Вариант 28

I. $y' = -4x^2 + y^2 - 1$;

2. $y' = \dfrac{2x + y}{x - 2y + 5}$.

Вариант 29

I. $y' = x^2 + y + xy$;

2. $y' = \dfrac{2x - y}{x + y + 3}$.

Вариант 30

I. $y' = y^2 - 2x$;

2. $y' = \dfrac{y + 1}{x + y + 2}$.

Библиографический список

Б е р м а н Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М.: Наука, 1985.

Б у г р о в Я.С., Н и к о л ь с к и й С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. М.: Наука, 1989.

К р а с н о в М.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Высш. шк., 1983.

К р а с н о в М.Л., К и с е л е в А.И., М а к а р е н к о Г.И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Высш. шк., 1972.

Ф и л и п п о в А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1979.