МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

КУЙБЫШЕВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ имени С. П. КОРОЛЕВА

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ СТРУКТУРНЫХ СИСТЕМ

КУЙБЫШЕВ 1982

Министерство высшего и среднего специального образования
Р С Ф С Р

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени авиационный
институт имени академика С.П.Королева

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ СТРУКТУРНЫХ СИСТЕМ

Куйбышев 1982

УДК 621.396.934

Составитель В.Г.Н и к и т и н

Рецензент А.Я.О б о и м о в

Утверждены редакционным советом института
в качестве методических указаний к лабораторной работе
16.12.81 г.

Ц е л ь р а б о т ы - нахождение оптимальной (в смысле среднеквадратичной погрешности) передаточной функции; теоретическое и)экспериментальное определение среднеквадратической ошибки САР с оптимальной передаточной функцией.

Некоторые сведения из теории случайных процессов в САР

Оптимизацию САР целесообразно производить в случае, когда одновременно с полезным сигналом на систему действует паразитное возмущающее воздействие (помеха). Помеха практически всегда носит случайный характер. Полезное входное воздействие также может быть случайным процессом. Таким образом, определить оптимальную передаточную функцию системы - это значит отыскать такую структуру САР, которая обеспечивает минимальную среднеквадратичную погрешность при внешних воздействиях, являющихся случайными процессами.

Случайный процесс описывается некоторой случайной функцией, изменяющейся во времени. Случайный процесс в совокупности представляется рядом функций $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ на $[t_0, t_n]$, каждая из которых случайна, называемых реализациями случайного процесса. Совокупность значений реализаций в некоторый момент $t_0 \leqslant t_i \leqslant t_n$; $x_1(t_i), x_2(t_i), \ldots, x_n(t_i)$ является случайной величиной с некоторым законом распределения с соответствующими моментами, в частности математическим ожиданием $M[x(t_i)]$ и дисперсией $\mathcal{D}[x(t_i)]$.

Случайный процесс принято характеризовать рядом параметров, основные из которых следующие.

Математическое ожидание случайного процесса $M[x(t)]$ в общем случае является неслучайной детерминированной функцией времени. $M[x(t)]$ может быть получено определением при непрерывном изменении t_i в диапазоне $[t_0, t_n]$.

Дисперсия случайного процесса $\mathcal{D}[x(t)]$ - в общем случае детерминированная функция времени, которая может быть получена анало-

2-1180

гично математическому ожиданию.

Автокорреляционная функция случайного процесса $R(t_1, t_2)$ определяется следующим выражением:

$$R(t_1,t_2)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i(t_1)x_i(t_2). \qquad (1)$$

Взаимная корреляционная функция двух случайных процессов $x(t), y(t)$ определяется выражением

$$R[x(t_1),y(t_2)]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i(t_1)y_i(t_2).$$

Следует отметить, что при нулевом первом начальном моменте $M[x(t)$ автокорреляционная функция для $t_1=t_2$ превращается в дисперсию:

$$R(t,t)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2(t)=\mathcal{D}[x(t)]. \qquad (3)$$

Если закон распределения и математическое ожидание и дисперсия случайного процесса остаются постоянными для всех значений в диапазоне $[t_0, t_n]$, то случайный процесс носит название стационарного.

Стационарный процесс обладает свойством эргодичности, если у него статистические характеристики при усреднении по ансамблю совпадают со статистическими характеристиками при усреднении по времени.

Автокорреляционная функция при усреднении по времени имеет вид

$$R(t,\tau)=\lim_{(t_n-t_0)\to\infty}\frac{1}{t_n-t_0}\int_{t_0}^{t_n} x(t)\,x(t-\tau)dt \qquad (4)$$

Взаимная корреляционная функция при усреднении по времени имеет вид

$$R[x(t),y(t)]=R_{x,y}[t,\tau]=\lim_{(t_n-t_0)\to\infty}\frac{1}{t_n-t_0}\int_{t_0}^{t_n} x(t)y(t-\tau)dt. \qquad (5)$$

Для стационарного процесса автокорреляционная функция зависит только от параметра τ:

$$R(\tau)=\lim_{(t_n-t_0)\to\infty}\frac{1}{t_n-t_0}\int_{t_0}^{t_n} x(t)x(t-\tau)dt \qquad (6)$$

При $\tau = 0$ автокорреляционная функция

$$R(0)=\lim_{(t_n-t_0)\to\infty}\frac{1}{t_n-t_0}\int_{t_0}^{t_n} x^2(t)dt=\mathcal{D}[x(t)]. \qquad (7)$$

Пользуясь аппаратом Фурье преобразований, можно показать, что

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)\cos\omega\tau\, d\omega \qquad (8)$$

где $S(\omega)$ – спектральная плотность случайного процесса.

Из последнего выражения, полагая $\tau = 0$, получаем:

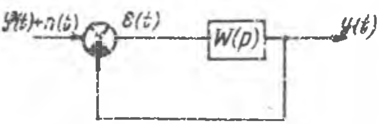
$$R(0) = D[x(t)] = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)\, d\omega \qquad (9)$$

Среднеквадратическое отклонение определяется выражением

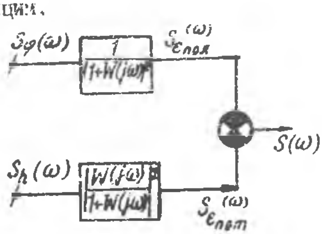
$$\mathcal{E}_{ск} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)\, d\omega} \qquad (10)$$

Понятие погрешности САР при случайных воздействиях

На рис. I приведена структурная схема линейной САР, на вход которой подаются два случайных внешних воздействия, одно из которых $\varphi(t)$ является полезным входным сигналом, а другое $n(t)$ – паразитным внешним возмущением (помехой). В этой системе с отрицательной обратной связью должно отрабатываться равенство выходного сигнала $y(t)$ и полезного входного $\varphi(t)$. Так как система линейна, то к ней применим принцип суперпозиции.



Р и с. I.



Р и с. 2

Рассмотрим сначала прохождение полезного сигнала, так как регулирование целесообразно рассматривать по полезному входному сигналу:

$$\mathcal{E}_{пол}(t) = \varphi(t) - y_{пол}(t)\,, \qquad (II)$$

где $\mathcal{E}_{пол}(t)$ – ошибка системы, на которую действует только полезный сигнал;

$y_{пол}(t)$ – выходной сигнал САР, на которую действует только полезный сигнал.

Так как входной сигнал по нашему условию носит случайный характер, то в качестве $\varepsilon_{пол}(t)$ естественно принять среднеквадратическую ошибку. Ранее было показано, что среднеквадратическое отклонение сигнала может быть выражено через его спектральную плотность. Поэтому для получения $\bar{\varepsilon}_{пол}(t)$ можно предварительно определить выражение для спектральной плотности через спектральную плотность входного сигнала:

$$S_{\varepsilon_{пол}}(\omega) = \frac{1}{|1+W(j\omega)|^2} S_{\varphi}(\omega) \qquad (12)$$

Здесь $W(j\omega)$ – частотная передаточная функция системы;

$S_{\varphi}(\omega)$ – спектральная плотность входного сигнала;

$S_{\varepsilon_{пол}}(\omega)$ – спектральная плотность ошибки в предположении отсутствия помехи.

При учете воздействия помехи на САР и ввиду справедливости для линейных систем принципа суперпозиции спектральная плотность погрешности системы будет

$$S_{\varepsilon}(\omega) = S_{\varepsilon_{пол}}(\omega) + S_{\varepsilon_{пом}}(\omega), \qquad (13)$$

где $S_{\varepsilon_{пом}}(\omega)$ – спектральная плотность сигнала в месте приложения разностного сигнала $\varepsilon_{пол}(t)$, полученная за счет помехи.

В выражении (13) делается общепринятое предположение об отсутствии корреляции полезного сигнала и помехи.

Выражение для $S_{\varepsilon_{пом}}(\omega)$ имеет вид

$$S_{\varepsilon_{пом}}(\omega) = \left| \frac{W(j\omega)}{1+W(j\omega)} \right|^2 S_n(\omega), \qquad (14)$$

где $S_n(\omega)$ есть спектральная плотность помехи $n(t)$.

В выражении (12) и (14) использованы разные передаточные функции замкнутой системы, так как в уравнении (14) учитывается преобразование сигнала помехи на входе САР по отношению к управляющему разностному сигналу $\varepsilon_{пол}(t)$, в то время как в выражении (12) определяется характеристика собственно управляющего разностного сигнала. Это обстоятельство может быть условно пояснено схемой, изображенной на рис.2.

Окончательно спектральная плотность ошибки системы с учетом воздействия помех имеет вид

$$S_\varepsilon(\omega) = \frac{1}{|1+W(j\omega)|^2} S_\varphi(\omega) + \left|\frac{W(j\omega)}{1+W(j\omega)}\right|^2 S_n(\omega) \qquad (15)$$

Собственно среднеквадратическая ошибка определяется по формуле (10).

Постановка задачи о проектировании оптимальной структуры САР

Исходными данными для нахождения структуры (оптимальной в смысле среднеквадратичной ошибки САР) являются спектральные плотности входного полезного сигнала и помехи, а также тот оператор, который должна реализовать оптимальная САР. Этот оператор обозначим $H(p)$. Тогда система должна реализовать преобразование

$$L[h(t)] = H(p)L[\varphi(t)], \qquad (16)$$

где $h(t)$ – то значение выходного сигнала, которое должно быть на выходе САР в идеальном случае;

L – символ преобразования по Лапласу.

Очевидно, что реальный выходной сигнал САР $y(t)$ отличается от значения $h(t)$, следовательно, в качестве ошибки системы можно принять разность

$$\mathcal{E}(t) = h(t) - y(t), \qquad (17)$$

Выходная величина $y(t)$ может быть представлена через весовую функцию $\omega(t)$ (импульсную характеристику САР):

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-\tau)\omega(\tau)d\tau, \qquad (18)$$

где $f(t) = \varphi(t) + h(t)$.

С учетом выражений (7), (17) и (18) имеем:

$$R(0) = \lim_{(t_n-t_0)\to\infty} \frac{1}{t_n - t_0} \int_{t_0}^{t_n} [h(t) - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-\tau)\omega(\tau)d\tau]^2 d\tau. \qquad (19)$$

Задачей оптимального проектирования является определение такой передаточной функции замкнутой системы

$$W_з(j\omega) = \frac{W(j\omega)}{1+W(j\omega)}, \qquad (20)$$

которая минимизировала бы величину $\mathcal{E}_{ck} = \sqrt{D[x(t)]}$, представленную через выражение (19).

Введем в рассмотрение корреляционные функции:

$$R_h(\tau) = \lim_{(t_n - t_0) \to \infty} \frac{1}{t_n - t_0} \int_{t_0}^{t_n} h(t) h(t-\tau) dt; \quad (21)$$

$$R_f(\tau) = \lim_{(t_n - t_0) \to \infty} \frac{1}{t_n - t_0} \int_{t_0}^{t_n} f(t) f(t-\tau) dt; \quad (22)$$

$$R_{hf}(\tau) = \lim_{(t_n - t_0) \to \infty} \frac{1}{t_n - t_0} \int_{t_0}^{t_n} h(t) f(t-\tau) dt. \quad (23)$$

В соответствии с известными свойствами корреляционных функций

$$R_h(0) = \lim_{(t_n - t_0) \to \infty} \int_{t_0}^{t_n} h^2(t) dt, \quad (24)$$

$$R_f(\tau) = R_\varphi(\tau) + R_h(\tau) + R_{\varphi h}(\tau) + R_{h\varphi}(\tau), \quad (25)$$

$$R_{hf}(\tau) = \lim_{(t_n - t_0) \to \infty} \frac{1}{t_n - t_0} \int_{t_0}^{t_n} h(t) f(t-\tau) dt \quad (26)$$

Произведя преобразование выражения (21) с учетом (21) - (26), получим выражение для среднеквадратичной ошибки:

$$\mathcal{E}^2 = R_h(0) - 2\int_0^\infty R_{hf}(\lambda) \omega(\lambda) d\lambda + \int_0^\infty \omega(\lambda) d\lambda \int_0^\infty \omega(\nu) R_f(\lambda - \nu) d\nu \quad (27)$$

Показано [1] , что требуемая в задаче минимизация выражения (27) обеспечивается при такой весовой функции, которая является решением уравнения Винера-Хопфа:

$$R_{hf}(\tau) - \int_0^\infty R_f(\tau - \lambda) \omega(\lambda) d\lambda = 0 \quad (28)$$

при $\tau > 0$

Передаточная функция замкнутой системы выражается через весовую функцию следующим образом:

$$W_з(j\omega) = \int_0^\infty \omega(t) e^{-j\omega t} dt \quad (29)$$

Показано [2] , что оптимальная передаточная функция замкнутой системы, получающаяся подстановкой в выражение (29) решения уравнения (28), имеет вид

$$W_з(j\omega) = \frac{1}{2\pi \Psi(j\omega)} \int_0^\infty e^{-j\omega t} dt \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{S_{hf}(\omega)}{\Psi(-j\omega)} e^{j\omega t} d\omega, \quad (30)$$

где $S_{hf}(\omega)$ - спектральная плотность, соответствующая $R_{hf}(\tau)$;

$\Psi(j\omega)$ - определяется из выражения (3I);

$S_f(\omega)$ - спектральная плотность, соответствующая $R_f(\tau)$.

В частном случае, при оптимальном сглаживающем фильтре $H(p)=$ I; $h(t)=\varphi(t)$ передаточная функция представляется в виде

$$W_3^{\Gamma}(j\omega)=\frac{B(j\omega)}{\Psi(j\omega)}, \tag{32}$$

где $B(j\omega)$ - первый член разложения отношения

$$\frac{S_{\varphi f}(\omega)}{\Psi(-j\omega)}=\sum_{i=1}^{q}\frac{a_i}{\omega-h_i}+\sum_{i=1}^{q}\frac{b_i}{\omega+d_i}+\sum_{i=1}^{M}\frac{l_i}{\omega+\gamma_i}; \tag{33}$$

$S_{\varphi f}(\omega)$ - спектральная плотность, соответствующая $R_{\varphi f}(\tau)$;

h_i - полюсы $S_{\varphi f}(\omega)$ с положительной мнимой частью (полюсы предполагаются простыми);

$(-d_i)$ - полюсы $S_{\varphi f}(\omega)$ с отрицательной мнимой частью (полюсы предполагаются простыми);

γ_i - нули $\Psi(-j\omega)$.

При реализации оптимальной передаточной функции минимум среднеквадратической погрешности определяется выражением

$$\bar{\varepsilon}^2_{min}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[S_{\varphi}(\omega)+|W_3(j\omega)|^2 S_f(\omega)]d\omega . \tag{34}$$

З а м е ч а н и е. Следует отметить, что полученная оптимальная передаточная функция не всегда обладает свойством физической реализуемости. Поэтому полученную передаточную функцию следует проверить на возможность физической реализации и при необходимости скорректировать с минимальными отклонениями от найденной оптимальной системы.

Порядок выполнения работы

I. Получить задание от преподавателя, которое должно содержать следующие данные:

спектральную плотность полезного входного сигнала $S_{\varphi}(\omega)$;

спектральную плотность помехи $S_n(\omega)$.

П р и м е ч а н и е. В задании, предлагаемом в лабораторной работе, вводятся следующие ограничения:

а) оператор реализуемой САР соответствует сглаживающему фильтру $H(p)=$ I;

б) взаимная корреляция входного сигнала и помехи отсутствует:

$$S_{\varphi n}(\omega) = S_{n\varphi}(\omega) = 0.$$

Из этих ограничений, в частности, следует, что

$$S_f(\omega) = S_\varphi(\omega) + S_n(\omega); \qquad (35)$$

$$S_{\varphi f}(\omega) = S_\varphi(\omega) \qquad (36)$$

2. Определить спектральную плотность суммарного сигнала на входе системы $S_f(\omega)$ в соответствии с формулой (35).

3. Спектральная плотность суммарного сигнала на входе представляется в виде произведения сопряженных комплексных величин выражения $S_f(\omega) = \Psi(j\omega)\Psi(-j\omega)$. Целью этой операции является получение выражений

$$\Psi(j\omega) \text{ и } \Psi(-j\omega).$$

4. Определить отношение $\dfrac{S_{\varphi f}(\omega)}{\Psi(-j\omega)} = \dfrac{S_f(\omega)}{\Psi(-j\omega)}$.

5. Определить полюсы выражения $S_{\varphi f}(\omega) = S_f(\omega)$.

6. Определить нули выражения $\Psi(-j\omega)$.

7. Отношение $\dfrac{S_{\varphi f}(\omega)}{\Psi(-j\omega)}$ представить в виде суммы в соответствии с выражением (33).

8. Определить $B(j\omega)$ как первый член выражения (33), соответствующий полюсам в верхней полуплоскости.

9. Определить выражение для $W_з(j\omega) = \dfrac{B(j\omega)}{\Psi(j\omega)}$.

10. Определить физическую реализуемость оптимальной системы, для чего выполнить следующие операции:

определить передаточную функцию разомкнутой системы

$$W_p(j\omega) = \frac{W_з(j\omega)}{1 - W_з(j\omega)};$$

вычислить амплитудно-частотную и фазочастотную характеристики разомкнутой системы $|W_p(j\omega)|$, $\varphi_p(\omega)$;

вычислить ЛАЧХ и ЛФЧХ разомкнутой системы

$$20 \lg |W_p(j\omega)| \text{ и } \varphi_p(\omega);$$

определить запасы устойчивости оптимальной САР;

в случае необходимости произвести коррекцию расчетной САР; в результате получаем физически реализуемую передаточную функцию

$$\hat{W}_з(j\omega) \text{ и } \hat{W}_p(j\omega)$$

II. С помощью аналоговой модели МН-7 реализовать систему с передаточной функцией $\hat{W}_3(j\omega)$.

I2. Исследовать экспериментально систему с передаточной функцией $W_3(j\omega)$, для чего подаем на вход сигналы со спектральными плотностями $S_\varphi(\omega)$ и $S_n(\omega)$. Целью эксперимента является измерение реальной среднеквадратической ошибки системы $\bar{\mathcal{E}}^2_{экспер.}$.

I3. Вычислить теоретическое значение минимальной средней квадратической погрешности в соответствии с формулой (34) $\bar{\mathcal{E}}^2_{теор}$.

П р и м е ч а н и е. В общем случае определение интеграла можно проводить численными методами на ЦВМ.

I4. Вычислить отклонение теоретической и экспериментальной минимальных среднеквадратических ошибок:

$$\Delta = \frac{\mathcal{E}_{ск.теор.} - \mathcal{E}_{ск.эксп}}{\mathcal{E}_{ск\,теор.}} 100\,\%$$

С о д е р ж а н и е   о т ч е т а

I. Блок-схема экспериментальной установки, содержащая генератор случайных сигналов $\varphi(t)$ и $n(t)$, структурную схему исследуемой экспериментально САР и индикатор ошибок.

2. Результаты вычислений по п.п 2 ÷ I0.

3. ЛАЧХ и ЛФЧХ идеальной оптимальной и реальной САР.

4. Результаты расчета и экспериментального определения $\mathcal{E}^2_{эксп}$.

5. Результат вычисления Δ. Выводы.

Л и т е р а т у р а

I. С о л о д о в н и к о в В.В. Статистическая динамика линейных систем автоматического управления. Физматгиз, I960.

2. Б е с е к е р с к и й В.А., П о п о в Е.П. Теория систем автоматического регулирования. М.: Наука, I972.

Составитель Валерий Геронтьевич Никитин

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ СТРУКТУРНЫХ
СИСТЕМ

Методические указания к лабораторной работе № 8

Редактор Н.В.К а с а т к и н а
Техн.редактор Н.М.К а л е н ю к
Корректор С.С.Р у б а н

Подписано в печать 17.01.83. Формат 60x84 1/16
Бумага оберточная белая.Печать оперативная
Усл.п.л. - 0,7. Уч.-изд.л.- 0,6. Тираж 300 экз.
Заказ № 1180 Бесплатно

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени авиационный
институт имени академика С.П.Королева, г.Куйбышев, ул.Молодогвардейская, 151.

Областная типография имени В.П.Мяги, г.Куйбышев, ул.Венцека, 60.