

КУЙБЫШЕВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО  
КРАСНОГО ЗНАМЕНИ  
АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ  
ИМЕНИ АКАДЕМИКА С. П. КОРОЛЕВА

---

**ИЗГИБ.  
УСТОЙЧИВОСТЬ**

КУЙБЫШЕВ 1991

[1997]

**Составители:** С. И. Иванов, В. М. Ермолова, С. М. Лещин,  
Г. Ф. Мальков, Л. И. Павлович, С. И. Янский

УДК 539.3/8 (076.5)

**Изгиб. Устойчивость:** Лабораторные работы/Куйбышев. авиад.  
ин-т.; Сост. С. И. Иванов, и др. Куйбышев, 1991. 36 с.

Приведены лабораторные работы по сопротивлению материалов, относящиеся к темам «Изгиб и устойчивость». Изложена методика проведения работ, даны схемы установок, протоколы испытаний, контрольные вопросы.

Лабораторные работы предназначены для студентов всех специальностей дневного и вечернего отделений, изучающих курс сопротивления материалов, подготовлены кафедрой «Сопротивление материалов».

Печатается по решению редакционно-издательского совета  
Куйбышевского ордена Трудового Красного Знамени  
авиационного института имени академика С. П. Королёва

Рецензент В. А. Мехеда

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЕФОРМАЦИИ И НАПРЯЖЕНИИ ПРИ ИЗГИБЕ

Цель работы — опытное определение деформаций и напряжений балки при изгибе и сопоставление опытных данных с расчетными значениями, найденными по формулам сопротивления материалов.

### ОБЪЕКТ ИССЛЕДОВАНИЯ

Испытуемая балка представляет собой часть лонжерона хвостового оперения самолета Ту-154, поперечное сечение которого показано на рис. 6.1. Балка установлена на двух опорах и нагружена сосредоточенной силой в середине пролета (рис. 6.2). Сечение, в котором измеряются деформации, отстоит от правой опоры на расстоянии  $c$ . Нормальные напряжения определяются в крайних волокнах  $y = \pm h/2$  и на нейтральной оси  $y = 0$ , касательные напряжения — на нейтральной оси.

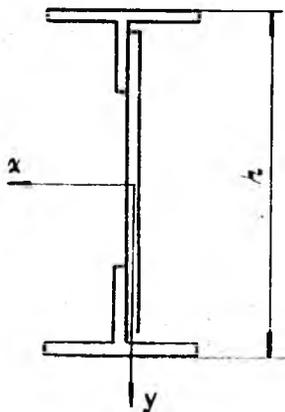


Рис. 6.1. Поперечное сечение балки

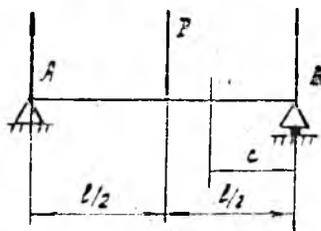


Рис. 6.2. Расчетная схема балки

Нагружение балки осуществляется на универсальной испытательной машине. Опоры балки находятся на подвижной траверсе, силу на балку передает нож, закрепленный в неподвижной траверсе.

## ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ

Нормальные напряжения балки при прямом изгибе определяют по формуле

$$\sigma = \frac{M}{I_x} y, \quad (6.1)$$

где  $M$  — изгибающий момент в данном сечении балки;  
 $I_x$  — момент инерции поперечного сечения относительно нейтральной оси;  
 $y$  — ордината точки, в которой определяют напряжение.

Касательные напряжения вычисляют по формуле Журавского

$$\tau = \frac{QS}{I_x b(y)}, \quad (6.2)$$

где  $Q$  — поперечная сила в данном сечении балки;  
 $S_x^0$  — статический момент отсеченной части поперечного сечения балки относительно нейтральной оси;  
 $I_x$  — момент инерции всего поперечного сечения относительно нейтральной оси;  
 $b(y)$  — ширина сечения на уровне точки, в которой вычисляют напряжение.

Значения поперечной силы и статического момента, взятые по абсолютной величине, подставляют в формулу (6.2). Направление касательного напряжения совпадает с направлением поперечной силы.

Например, для балки двутаврового поперечного сечения эпюры напряжений  $\sigma$  и  $\tau$ , построенные по формулам (6.1) и (6.2), имеют следующий вид (рис. 6.3).

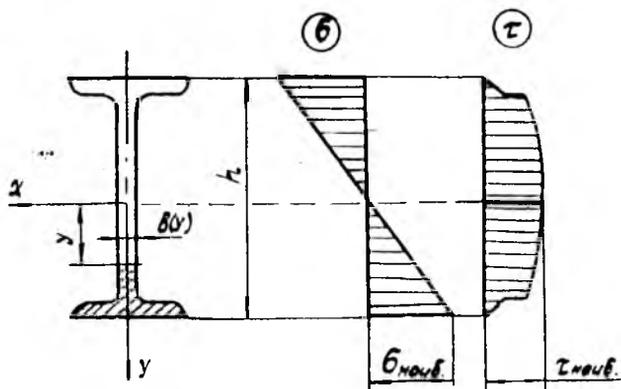


Рис. 6.3. Эпюры напряжений в балке двутаврового сечения

## ОПЫТНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЕФОРМАЦИИ И НАПРЯЖЕНИИ

Деформации измеряют проволочными или фольговыми тензорезисторами. Схема установки тензорезисторов приведена на рис. 6.4. Для перевода показаний прибора, подключенного к тензорезисторам, в величины относительных линейных деформаций используют либо тарировочный график, либо цену деления прибора, полученную при проведении лабораторной работы № 2.

Опытное определение нормальных напряжений при изгибе проводят на основании закона Гука, в котором используют измеренные величины относительных продольных деформаций. В данной работе напряжения находят в наиболее удаленных от нейтральной оси точках сечения *I* и *II*, испытывающих линейное напряженное состояние, и в точке *III* на нейтральной оси, испытывающей чистый сдвиг.

В случае линейного напряженного состояния закон Гука выражается зависимостью

$$\sigma = E \varepsilon, \quad (6.3)$$

где  $E$  — модуль продольной упругости материала балки;

$\varepsilon$  — относительная линейная деформация в направлении напряжения  $\sigma$ .

Следовательно, для точек сечения *I*, *II*, нормальные напряжения можно определить, измерив линейную деформацию  $\varepsilon$  вдоль оси балки и применив формулу (6.3).

В точках на нейтральной оси материал балки испытывает деформацию чистого сдвига. При этом главные напряжения  $\sigma_1 = \tau_{\text{налб}}$ ,  $\sigma_3 = -\tau_{\text{налб}}$  действуют на площадках под углом  $45^\circ$  к оси балки, а  $\sigma_2 = 0$  (рис. 6.5).

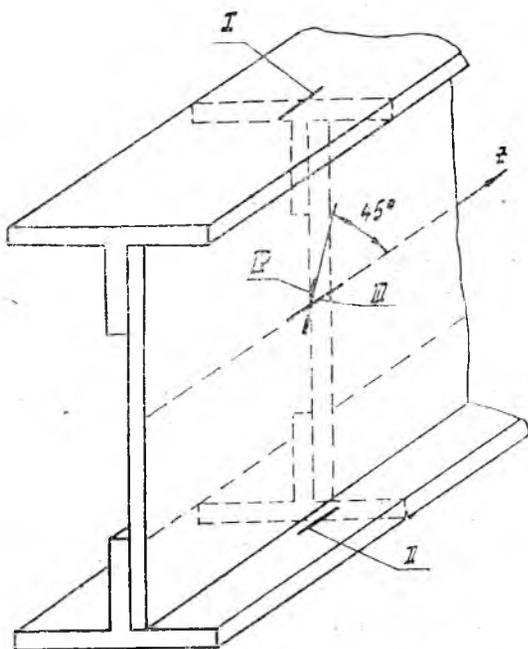


Рис. 6.4. Схема установки тензорезисторов

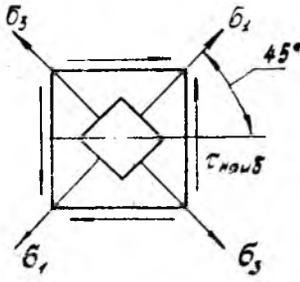


Рис. 6.5. Напряженное состояние в точках нейтральной оси

Тогда из обобщенного закона Гука следует

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_3}{E} = \frac{1 + \mu}{E} \tau_{шп.об.} \quad (6.4)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\sigma_3}{E} - \mu \frac{\sigma_1}{E} = -\frac{1 + \mu}{E} \tau_{шп.об.}$$

Из этих выражений получается формула для вычисления опытного значения касательного напряжения

$$\tau_{шп.об.} = \frac{E}{1 + \mu} \varepsilon_1 = -\frac{E}{1 + \mu} \varepsilon_3 \quad (6.5)$$

Следовательно, опытное значение касательного напряжения  $\tau_{шп.об.}$  в точке на нейтральной оси можно найти, ограничившись измерением линейной деформации по направлению одного из главных напряжений под углом  $45^\circ$  к оси балки.

#### ПОРЯДОК ПРОВЕДЕНИЯ РАБОТЫ

1. Для заданной нагрузки  $P$  по формулам (6.1) и (6.2) определить теоретические значения нормальных  $\sigma_T$  и касательных  $\tau_T$  напряжений в исследуемых точках, вычислив предварительно  $I_x$ ,  $S_x^{от}$  сложного поперечного сечения лонжерона.

2. Нагрузить балку небольшой предварительной силой и записать начальные показания прибора, подключенного к тензорезисторам, в протокол испытания; догрузить балку заданной силой  $P$  и записать конечные показания.

3. По средним из 3-х опытов приращению показаний прибора, переведенных в величины деформаций, с помощью формул (6.3) и (6.5) вычислить опытные значения напряжений  $\sigma_{оп.}$ ,  $\tau_{оп.}$

4. Провести сопоставление опытных и теоретических значений напряжений путем вычисления расхождений по формулам

$$\frac{|\sigma_T - \sigma_{оп}|}{|\sigma_T|} 100\%; \quad \frac{|\tau_T - \tau_{оп}|}{|\tau_T|} 100\%.$$

5. Опытные и теоретические результаты занести в протокол (табл. 6.1) и таблицу результатов (табл. 6.2).

Таблица 6.1

№ опыта	Нагрузка $P, \text{кН}$	Верхние волокна			Нижние волокна			Средние волокна												
		$A_{10}$ дел.	$\Delta A_{10}$ дел.	$\Delta A_{10 \text{ ср.}}$ дел.	$A_{10}$ дел.	$\Delta A_{10}$ дел.	$\Delta A_{10 \text{ ср.}}$ дел.	$A_{10}$ дел.	$\Delta A_{10}$ дел.	$\Delta A_{10 \text{ ср.}}$ дел.	$A_{10}$ дел.	$\Delta A_{10}$ дел.	$\Delta A_{10 \text{ ср.}}$ дел.							
1																				
2																				
3																				

Таблица 6.2

Верхние волокна			Нижние волокна			Средние волокна		
$\sigma_{\text{т}}$ МПа	$\sigma_{\text{оп}}$ МПа	Рас. хожде- ние, %	$\sigma_{\text{т}}$ МПа	$\sigma_{\text{оп}}$ МПа	Рас. хожде- ние, %	$\tau_{\text{т}}$ МПа	$\tau_{\text{оп}}$ МПа	Рас. хожде- ние, %

## СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

1. Расчетная схема балки.
2. Схема расположения тензорезисторов.
3. Поперечное сечение лонжерона с вычислением необходимых геометрических характеристик.
4. Расчет теоретических и опытных значений напряжений.
5. Протокол испытаний и таблица результатов исследования.
6. Общий вывод.

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. В каком случае брус испытывает прямой изгиб?
2. По каким формулам вычисляются напряжения в балке?
3. Как определить напряжения в балке опытным путем?
4. Как распределены нормальные и касательные напряжения в поперечном сечении лонжерона?
5. Как доказать, что в точках нейтральной оси балки главные напряжения имеют значения  $\sigma_1 = \tau_{\text{наиб}}$ ,  $\sigma_3 = -\tau_{\text{наиб}}$ ?
6. Как расположены главные площадки в балке при изгибе на уровне нейтральной оси и в точках, наиболее удаленных от этой оси?

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОГИБА БАЛКИ С ПОДАТЛИВЫМ ЗАКРЕПЛЕНИЕМ

Цель работы — опытное определение прогиба балки с податливым закреплением и сопоставление полученной величины с теоретическим значением, найденным по формулам сопротивления материалов.

### ОБЪЕКТ ИССЛЕДОВАНИЯ

В работе рассматривается прогиб конца трубки обратного клапана самолета МИГ, вызванный силой  $P$  (рис. 7.1).

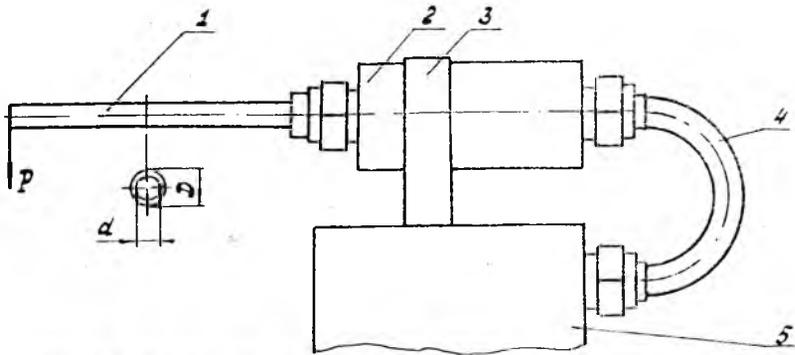


Рис. 7.1. Трубка обратного клапана гидросистемы самолета МИГ

Трубка 1 присоединена к обратному клапану 2, который с помощью хомутка 3 и трубки подвода гидросмеси 4 крепится к основанию 5, заменяющему лонжерон крыла самолета. Расчетной схемой трубки 1 является консольная балка с податливо закрепленным правым концом (рис. 7.2).

### ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ

Для определения линейных и угловых перемещений балок при изгибе используют дифференциальное уравнение изогнутой

оси балки

$$E I y'' = M. \quad (7.1)$$

В случае консольной балки, нагруженной на свободном конце силой  $P$  (рис. 7.2), уравнение (7.1) запишется как

$$E I y'' = -P(l-z). \quad (7.2).$$

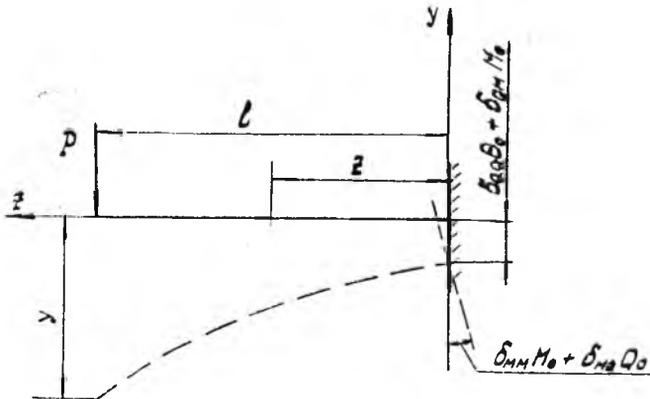


Рис. 7.2. Расчетная схема трубки

После интегрирования этого уравнения получим следующие выражения для углов поворота поперечных сечений и прогибов:

$$E I y' = -P \left( lz - \frac{z^2}{2} \right) + C. \quad (7.3)$$

$$E I y = -P \left( \frac{lz^2}{2} - \frac{z^3}{6} \right) + Cz + D. \quad (7.4)$$

Постоянные интегрирования  $C$  и  $D$  находим из граничных условий, которые для рассматриваемой балки состоят в том, что при  $z = 0$   $y' = y'_0$ ,  $y = y_0$ , где  $y'_0$  и  $y_0$  — соответственно угол поворота и прогиб в месте податливого закрепления трубки. Используя эти условия, найдем:

$$C = E I y'_0, \quad D = E I y_0. \quad (7.5)$$

Для балок с неподатливым закреплением  $y'_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$ ; в связи с чем равны нулю и постоянные интегрирования  $C$  и  $D$ . Когда закрепление податливо, эти величины отличны от нуля, значения  $y'_0$ ,  $y_0$  приходится определять через найденные опытным путем податливости закрепления.

Податливость  $\delta$  представляет величину перемещения, вызванного действием единичной нагрузки. При обозначении податливости используют два индекса, например  $\delta_{QQ}$  или  $\delta_{QM}$ . Первый

индекс обозначает направление перемещения, второй — единичную нагрузку, вызывающую это перемещение. Так,  $\delta_{QM}$  обозначает перемещение (прогиб) по направлению поперечной силы, вызванное действием единичной пары сил.

Закрепление (опора) характеризуется главными и побочными податливостями. Для рассматриваемой опоры типа защемления главными будут податливости  $\delta_{MM}$  и  $\delta_{QQ}$ , а побочными —  $\delta_{MQ}$  и  $\delta_{QM}$  (рис. 7.3), причем на основании теоремы о взаимности перемещений  $\delta_{MQ} = \delta_{QM}$ .

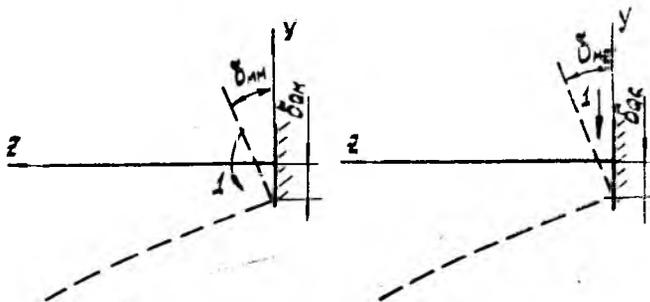


Рис. 7.3. Схема податливостей места закрепления трубки

Если учесть, что в опорном сечении рассматриваемой балки действуют поперечная сила  $Q_0$  и изгибающий момент  $M_0$ , то угол поворота и прогиб на опоре можно определить по следующим формулам:

$$y_0' = \delta_{MM} M_0 + \delta_{MQ} Q_0, \quad (7.6)$$

$$y_0 = \delta_{QQ} Q_0 = \delta_{QM} M_0. \quad (7.7)$$

После подстановки этих выражений в зависимости (7.5), а затем в (7.3), (7.4) получим формулы для определения перемещений трубки в любом сечении

$$E I y' = -Pz \left(1 - \frac{z}{2}\right) + E I (\delta_{MM} M_0 + \delta_{MQ} Q_0), \quad (7.8)$$

$$E I y = -\frac{Pz^2}{2} \left(1 - \frac{z}{3}\right) + E I (\delta_{MM} M_0 + \delta_{MQ} Q_0) z + E I (\delta_{QQ} Q_0 + \delta_{QM} M_0). \quad (7.9)$$

#### ОПЫТНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОДАТЛИВОСТЕЙ И ПРОГИБА

Податливости опор, как правило, определяют опытным путем. В нашем случае для этого следует использовать нагружения силой  $P$  в сечениях  $A$  и  $B$  (рис. 7.4). Индикаторы служат для определе-

ния: 1 и 2 — угла поворота опорного сечения, 3 — вертикального перемещения опоры, 4 — измерения прогиба конца трубки.

Если приращения показаний индикаторов при нагружениях силой  $P$  в сечениях  $A$  и  $B$  обозначить через  $\Delta A_i$ ,  $\Delta B_i$  соответственно, то главная линейная податливость будет

$$\delta_{QQ} = \frac{\Delta B_3}{P} \quad (7.10)$$

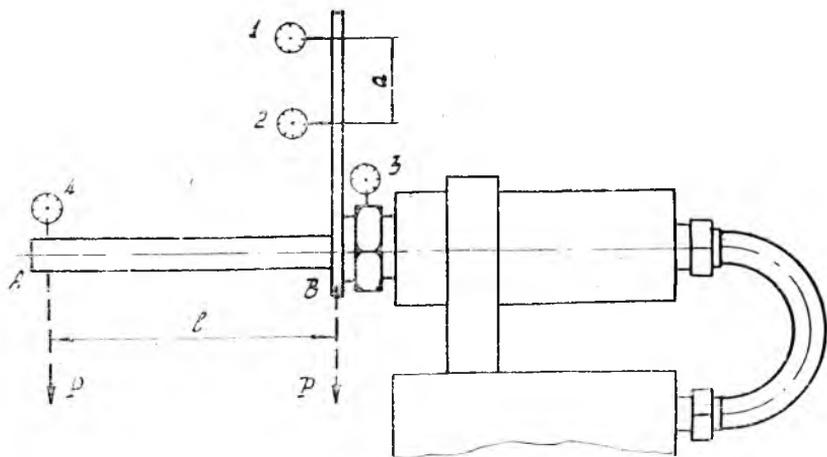


Рис. 7.А. Схема расположения индикаторов для определения прогиба и податливостей закрепления трубки

При определении главной угловой податливости  $\delta_{MM}$  нужно учесть, что поворот опоры  $\frac{\Delta A_1 - \Delta A_2}{a}$  вызван не только парой сил  $M_0$ , но и силой  $Q_0$ . Вытя из указанного выражения перемещение от действия силы, равное  $\frac{\Delta B_1 - \Delta B_2}{a}$ , получим:

$$\delta_{MM} = \frac{(\Delta A_1 - \Delta A_2) - (\Delta B_1 - \Delta B_2)}{P l a} \quad (7.11)$$

На основании аналогичных соображений можно получить формулу для побочной податливости:

$$\delta_{QM} = \delta_{MQ} = \frac{\Delta A_3 - \Delta B_3}{P l} \quad (7.12)$$

Исследуемый прогиб конца трубки определяем как

$$y_{i,p} = -\Delta A_4 \quad (7.13)$$

## ПОРЯДОК ПРОВЕДЕНИЯ РАБОТЫ

1. Нагрузить трубку заданной силой  $P$  в сечении  $A$ , а затем в сечении  $B$  и определить при этом перемещения  $\Delta A_i$ ,  $\Delta B_i$ . Нагружение и снятие показаний с приборов осуществлять в два этапа: сначала дать небольшую предварительную нагрузку, а затем догрузить конструкцию заданной силой  $P$ .

2. Вычислить главные и побочную податливости по формулам (7.10)—(7.12) и опытный прогиб по формуле (7.13).

3. Вычислить прогиб конца трубки  $y_T$  по формуле (7.9), подставив в нее  $z = l$ .

4. Сравнить теоретическое и опытные значения прогибов путем вычисления расхождения по формуле

$$\frac{|y_T| - |y_{оп}|}{|y_T|} 100\%.$$

5. Расчетные и опытные данные занести в протоколы (табл. 7.1, 7.2, 7.3).

Таблица 7.1

*Нагружение в сечении A*

№ опыта	Нагрузка $P$ , Н	Показания индикаторов, мм				Приращения показаний, мм				Средние значения, мм			
		$A_1$	$A_2$	$A_3$	$A_4$	$\Delta A_1$	$\Delta A_2$	$\Delta A_3$	$\Delta A_4$	$\Delta A_1$	$\Delta A_2$	$\Delta A_3$	$\Delta A_4$
1													
2													
3													

## Нагружение в сечении В

№ опыта	Нагрузка P, Н	Показания индикаторов, мм			Приращения показаний, мм			Средние значения, мм		
		$V_1$	$V_2$	$V_3$	$\Delta V_1$	$\Delta V_2$	$\Delta V_3$	$\Delta V_1$	$\Delta V_2$	$\Delta V_3$
1										
2										
3										

Таблица 7.3

## Податливости закрепления

$\delta_{QQ}, \frac{\text{мм}}{\text{Н}}$	$\delta_{QM}, \frac{1}{\text{Н}}$	$\delta_{MM}, \frac{1}{\text{Н} \cdot \text{мм}}$

## СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

1. Схема установки и расположения индикаторов.
2. Схема перемещений трубки и места ее закрепления.
3. Протоколы опытов.
4. Расчеты, относящиеся к определению податливостей и прогиба трубки.
5. Общий вывод.

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что понимают под податливостью?
2. Какая разница между главными и побочными податливостями?
3. Как вывести формулы (7.6), (7.7), выражающие перемещения трубки в месте закрепления?
4. Как вывести формулы (7.10)–(7.12), используемые для подсчета податливостей?
5. Как доказать, что прогиб  $\delta_{QM}$  и угол поворота  $\delta_{MQ}$  имеют одинаковую размерность?
6. Как иным путем определить побочную податливость  $\delta_{MM} = \delta_{MQ}$ ?
7. Каково влияние (в процентах) податливости закрепления на исследуемый прогиб трубки?

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Цель работы — ознакомление с теорией измерения остаточных напряжений и опытное определение остаточных напряжений пластины.

### ОБЪЕКТ ИССЛЕДОВАНИЯ

В любой детали еще до ее нагружения действуют так называемые остаточные напряжения, возникающие в результате неравномерных пластических деформаций или объемных изменений при обработке давлением, резанием, химико-термической обработке, обработке поверхностным пластическим деформированием (ППД).

Остаточные напряжения оказывают значительное влияние на сопротивление усталости: растягивающие снижают, а сжимающие повышают предел выносливости детали. В связи с этим при изготовлении деталей, особенно в авиационии, применяют ППД, например обдувку дробью, после которой в поверхностном слое детали возникают сжимающие остаточные напряжения.

В лабораторной работе определяют остаточные напряжения пластины, образовавшиеся после ППД (обдувки дробью). Исследованию подвергают полоску, вырезанную из пластины, например из лопатки компрессора авиационного газотурбинного двигателя (рис. 8.1).

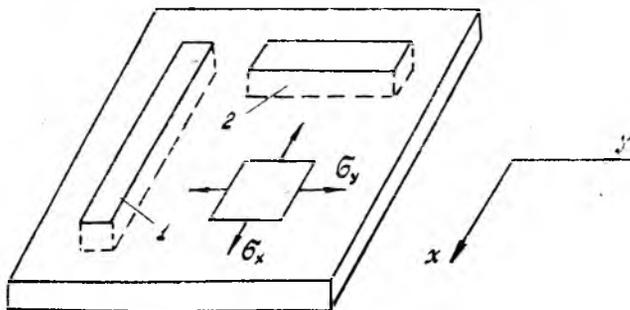


Рис. 8.1. Схема вырезки полосок из пластины

## ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ

При определении остаточных напряжений в детали типа пластины из нее вырезают две полоски 1 и 2 (рис. 8.1). Оси полосок после вырезки в силу самоуравновешенности остаточных напряжений остаются прямыми. Затем удаляют продольные слои полосок и измеряют возникающие при этом прогибы, которые образуются за счет освобождения остаточных усилий.

Для установления связи между остаточными напряжениями и прогибами полоски рассмотрим нагружение полоски 1, эквивалентное удалению слоя толщиной  $a$  (рис. 8.2). По торцам зоны

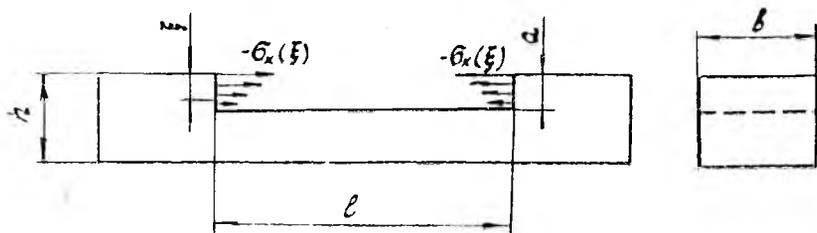


Рис. 8.2. Нагружение полоски, эквивалентное удалению слоя

удаления слоев действуют остаточные напряжения  $\sigma_x$ , взятые с обратным знаком, так как удаление слоев эквивалентно разгрузке торцов от остаточных напряжений, т. е. нагружению остаточными напряжениями противоположного знака.

Расчетная схема полоски показана на рис. 8.3. Практическое значение имеют остаточные напряжения в тонком поверхностном слое ( $a = 50-100$  мкм), в связи с чем выражение для момента пары сил  $M(a)$  можно записать как

$$M(a) = b(h/2) \int_0^a \sigma_x(\xi) d\xi. \quad (8.1)$$

Выражение для прогиба  $f(a)$ , которое можно получить интегрированием дифференциального уравнения изогнутой

оси полоски или способом Верещагина, имеет следующий вид:

$$f(a) = \frac{M(a)l(l+2c)}{2EI}. \quad (8.2)$$

При вычислении момента инерции поперечного сечения изменением размеров сечения можно пренебречь и считать, что  $I = bh^3/12$ .

Из выражений (8.1) и (8.2) следует, что

$$\int_a^0 \sigma_x(\xi) d\xi = \frac{E h^2}{3l(l+2c)} j(a). \quad (8.3)$$

Продифференцировав выражение (8.3) по  $a$ , получим:

$$\sigma_x(a) = \frac{E h^2}{3l(l+2c)} \frac{dj(a)}{da}. \quad (8.4)$$

При удалении слоев полоски освобождаются не только напряжения  $\sigma_x$ , но также и  $\sigma_y$ . Влияние  $\sigma_y$  на прогиб  $j(a)$  обусловлено поперечной деформацией от этих напряжений, которая связана с продольной деформацией зависимостью  $\epsilon_{\text{поп}} = -\mu\epsilon$ . В связи с этим в левую часть формулы (8.4) необходимо добавить  $-\mu\sigma_y(a)$ , т. е.

$$\sigma_x(a) - \mu\sigma_y(a) = \frac{E h^2}{3l(l+2c)} \frac{dj(a)}{da}. \quad (8.5)$$

По результатам исследования второй полоски получим:

$$\sigma_y(a) - \mu\sigma_x(a) = \frac{E h^2}{3l(l+2c)} \frac{dj(a)}{da}. \quad (8.6)$$

С помощью двух зависимостей (8.5) и (8.6) определим напряжения  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$ . При  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$ , что наблюдается после обдувки дробью, формула для определения остаточных напряжений пластины принимает следующий вид:

$$\sigma(a) = \frac{E h^2}{3(1-\mu)l(l+2c)} \frac{dj(a)}{da}. \quad (8.7)$$

При использовании формул (8.5) — (8.7) возникает необходимость определять производную опытной функции  $j(a)$ , представленной таблично или графически. Здесь следует воспользоваться известными приближенными формулами, содержащими прираще-

ния функций:

$$\frac{dj}{da}(a_i) = \frac{j(a_{i+1}) - j(a_{i-1}))}{a_{i+1} - a_{i-1}}, \quad (8.8)$$

для крайних точек

$$\frac{da}{dj}(0) = \frac{j(a_1)}{a_1}; \quad \frac{dj}{da}(a_n) = \frac{j(a_n) - j(a_{n-1}))}{a_n - a_{n-1}}. \quad (8.9)$$

## ОПЫТНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ПЛАСТИНЫ

Для определения остаточных напряжений устанавливают опытным путем прогибы полоски в зависимости от толщины удаленного слоя. Схема установки для удаления слоев полоски электрохимическим способом и измерения прогибов изображена на рис. 8.4.

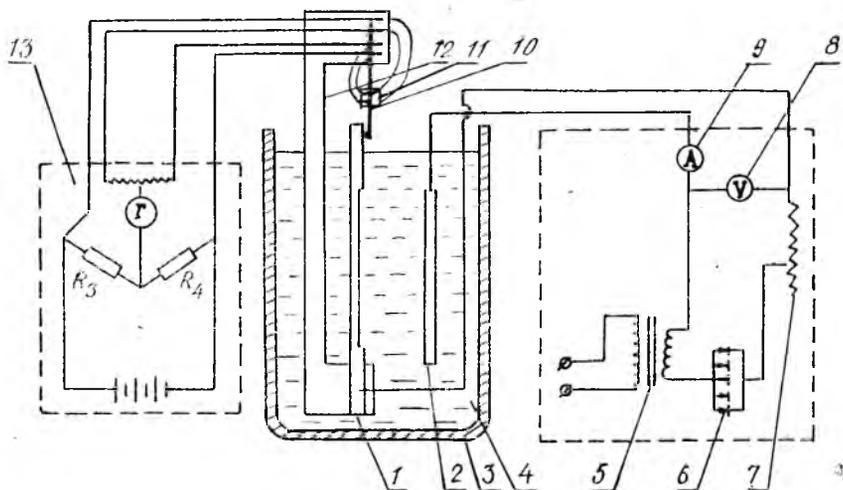


Рис. 8.4. Схема установки

Исследуемую полоску 1 закрепляют в приспособлении 12 и погружают в ванну 3 с электролитом. Против полоски устанавливают свинцовую пластину—катод 2. К образцу и свинцовой пластине подводят от выпрямителя постоянный ток, который вызывает анодное растворение поверхности исследуемой полоски, т. е. непрерывное удаление слоев. Возникающие при этом прогибы полоски измеряют с помощью балочки 10 с наклеенными на нее тензорезисторами 11. Слои полоски можно удалять и химическим способом без тока, если удастся подобрать достаточно активный травитель.

В связи с тем, что травление происходит практически равномерно, толщину удаленного слоя измеряют лишь после окончания опыта.

### ПОРЯДОК ПРОВЕДЕНИЯ РАБОТЫ

1. Произвести обмер полоски.
2. Поверхности полоски, которые не должны подвергаться травлению, защищать хлорвиниловым лаком.

3. Установить полосу в приспособлении так, чтобы измерительная балочка опиралась на нее с некоторым натягом.

4. Приспособление поместить в ванну с электролитом и приступить к травлению (удалению слоев).

5. Через равные промежутки времени регистрировать показания прибора, которые в дальнейшем перевести в величины прогибов полосы.

6. После окончания травления определить толщину удаленного слоя и скорость удаления слоев, необходимую для перехода от зависимости  $f(t)$  к  $f(a)$ .

7. Вычислить по формулам (8.7) — 8.9) остаточные напряжения  $\sigma = \sigma(a)$  и построить эпюру этих напряжений.

8. Опытные и расчетные данные занести в протокол.

#### Протокол испытаний и результаты исследования

Время травления, мин	Показания прибора, А, дел	Приращение показаний $\Delta A$ , дел	Прогиб образца, мкм	Толщина удаленного слоя $a$ , мкм	$\frac{\partial f}{\partial a}$	$\sigma$ , МПа

#### СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

1. Эскиз полосы с эквивалентными нагрузками и расчетная схема.
2. Схема установки для удаления слоев полосы и измерения прогибов.
3. Протокол испытаний и результаты исследования.
4. График прогибов и эпюра остаточных напряжений.
5. Расчеты, связанные с определением остаточных напряжений.
6. Общий вывод.

#### КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Каковы причины образования остаточных напряжений?
2. Как остаточные напряжения влияют на прочность деталей?
3. Почему при выводе формулы для момента освободившихся при удалении слоя остаточных сил считают, что все силы имеют одинаковое плечо?

4. Как получить формулу (8.2), связывающую прогиб полоски при удалении слоев и момент освободившихся остаточных сил?
5. Почему прогиб полоски связан не только с напряжением  $\sigma_x$ , но и с напряжением  $\sigma_y$ ?
6. Как удаляют слои полоски при определении остаточных напряжений?
7. Как измеряют прогибы полоски при удалении слоев?
8. Как осуществить переход от зависимости прогиб — время к зависимости прогиб — толщина удаленного слоя?

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ БАЛКИ

Цель работы — опытное определение прогиба и угла поворота поперечного сечения статически неопределимой балки и сопоставление полученных результатов с теоретическими значениями, вычисленными по формулам сопротивления материалов.

### ОБЪЕКТ ИССЛЕДОВАНИЯ

Балка изготовлена из прессованного двутаврового профиля Пр 125-1 (материал Д 16Т), применяемого для изготовления стрингеров стабилизатора хвостового оперения самолета. Балка одним концом закреплена и в промежуточном сечении имеет еще одну опору, которую можно считать шарнирно-подвижной. Сосредоточенная вертикальная сила  $P$  прикладывается к свободному концу балки (рис. 9.1).

### ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ

Перемещения балки при плоском изгибе характеризуются двумя величинами: прогибом  $y$  и углом поворота поперечного сечения  $\Theta$  (рис. 9.2).

Поскольку рассматриваемая балка является один раз статически неопределимой, то отысканию перемещений должно предшествовать раскрытие ее статической неопределимости, что осуществляется методом сил. За лишнее неизвестное можно принять реакцию на правой опоре  $R_B = X_1$ , величина которой находится с помощью канонического уравнения

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0, \quad (9.1)$$

где  $\delta_{11}$  — перемещение в основной системе сечения  $B$  от действия единичной силы, соответствующей  $X_1$  (рис. 9.3),

$\Delta_{1P}$  — перемещение в основной системе сечения  $B$  от действия заданной силы  $P$  (рис. 9.4).

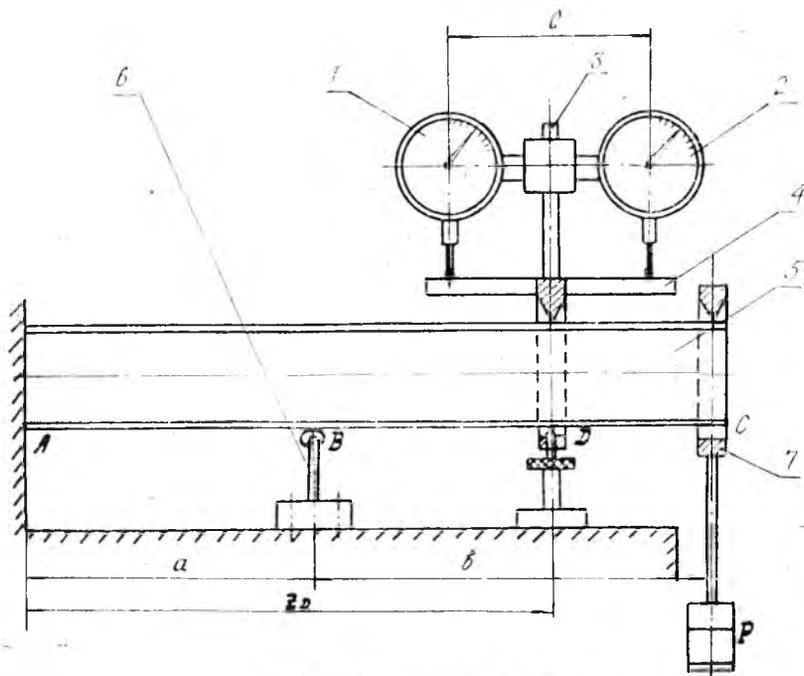


Рис. 9.1. Исследуемая балка

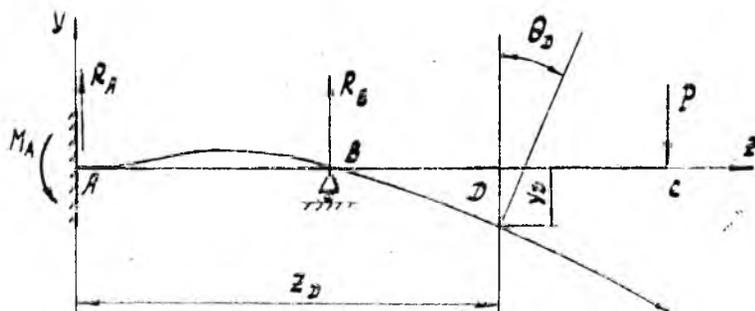


Рис. 9.2. Схема перемещений балки

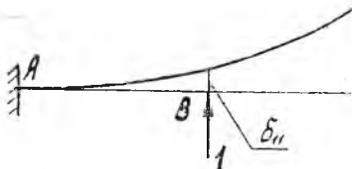


Рис. 9.3. Нагружение основной системы единичной силой

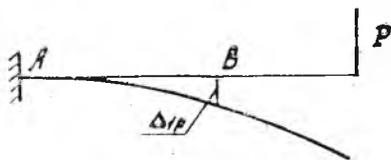


Рис. 9.4. Нагружение основной системы заданной силой

Для вычисления  $\delta_{11}$  и  $\Delta_{1P}$  можно применить формулу Верещагина

$$\Delta = \frac{\sum \Omega_i M_{1ci}}{EJ_{\text{но}}}, \quad (9.2)$$

где  $\Omega_i$  — площадь эпюры моментов от заданной силы,

$M_{1ci}$  — ордината эпюры моментов от единичной нагрузки, расположенная под центром тяжести эпюры  $\Omega_i$ .

Искомые перемещения балки  $y$ ,  $\Theta$  определяются также с помощью формулы (9.2), при этом используется эквивалентная система (рис. 9.5).

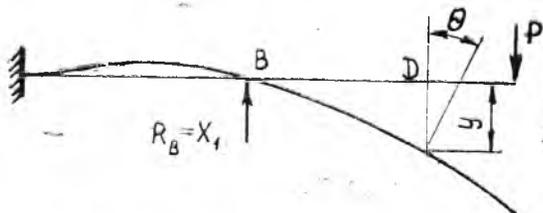


Рис. 9.5. Эквивалентная система

#### ОПЫТНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОГИБА И УГЛА ПОВОРОТА ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ

Для определения опытного прогиба  $y$  и угла поворота  $\Theta$  заданного сечения используется устройство, состоящее из индикаторной стойки 3 (рис. 9.1), на которой установлены индикаторы часового типа 1, 2, и планки 4, закрепленной на балке 5. После нагружения балки силой  $P$  показания индикаторов изменятся на величину  $\Delta A_i$ . Искомые перемещения вычисляются по формулам

$$y_{\text{оп}} = \frac{\Delta A_{2\text{ср}} + \Delta A_{1\text{ср}}}{2}, \quad \Theta_{\text{оп}} = \frac{\Delta A_{2\text{ср}} - \Delta A_{1\text{ср}}}{c}. \quad (9.3)$$

## ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Вычислить перемещения  $\delta_{11}$ ,  $\Delta_{1p}$  и определить лишнее неизвестное  $X_1$  по формуле (9.1), используя заданное значение силы  $P$ .

2. Вычислить перемещения  $y_1$  и  $\Theta_T$  в заданном сечении балки по формуле (9.2), используя эквивалентную систему. При этом единичные силовые факторы направить так, чтобы знаки теоретических и опытных перемещений были одинаковыми.

3. Установить угломер и индикаторную стойку с индикаторами в заданном сечении балки.

4. Нагрузить балку и записать возникающие при этом показания индикаторов  $A_i$ . Нагружение и снятие показаний с приборов осуществлять в два этапа: сначала дать небольшую предварительную нагрузку, а потом догрузить балку заданного силой  $P$ .

5. Вычислить  $\Delta A_i$ .

6. Вычислить опытные значения перемещений  $y_{оп}$ ,  $\Theta_{оп}$  по формулам (9.3).

7. Сравнить теоретические и опытные значения перемещений путем вычисления расхождений по формулам

$$\frac{y_T - y_{оп}}{y_T} 100\%, \quad \frac{\Theta_T - \Theta_{оп}}{\Theta_T} 100\%,$$

8. Теоретические и опытные данные занести в протокол испытаний.

### Протокол испытаний

№ опыта	Абсцисса сечения $z_0$ , мм	Нагрузка $P$ , Н	Показания индикаторов, мм					Прогиб, мм			Угол поворота, рад							
			$A_1$	$\Delta A_1$	$\Delta A_{1cp}$	$A_2$	$\Delta A_2$	$\Delta A_{2cp}$	$y_T$	$y_{оп}$	Расх. %	$\Theta_T$	$\Theta_{оп}$	Расх. %				
1																		
2																		
3																		

## СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

1. Схема установки.
2. Расчетная схема балки с обозначением исследуемых перемещений.
3. Протокол испытания.
4. Рисунки и расчеты, относящиеся к определению перемещений.
5. Общий вывод.

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. В каком случае брус испытывает прямой (плоский) изгиб?
2. Какие величины определяют перемещения балки при изгибе?
3. Какие балки относятся к статически неопределимым?
4. Что называют основной и эквивалентной системами?
5. Каков физический смысл канонического уравнения метода сил и входящих в него величин?
6. В каком направлении прикладывается единичная нагрузка при раскрытии статической неопределимости методом сил?
7. Как устроен и работает индикатор часового типа?

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЕФОРМАЦИИ И НАПРЯЖЕНИЙ ПЛОСКОЙ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ РАМЫ

Цель работы — опытное определение деформаций и напряжений плоской статически неопределимой рамы и сопоставление их с результатами, полученными по формулам сопротивления материалов.

### ОБЪЕКТ ИССЛЕДОВАНИЯ

В лабораторной работе с помощью тензорезисторов определяют деформации и напряжения проставочного кольца авиационного турбореактивного двухконтурного двигателя (рис. 10.1). Кольцо 1 установлено на опоре 2 и нагружено в нижнем сечении грузом 3. На наружной поверхности кольца в окружном направлении наклеены тензорезисторы 4 для измерения деформаций.

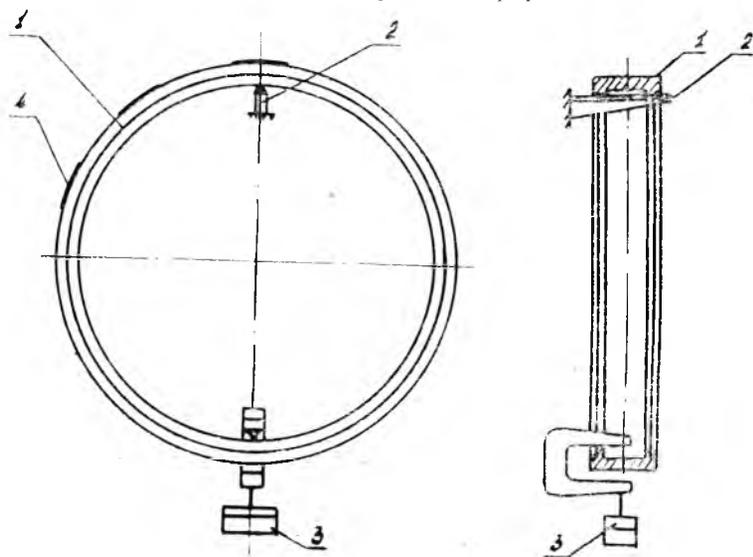


Рис. 10.1. Проставочное кольцо

## ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ

На рис. 10.2,а изображена расчетная схема кольца, нагруженного растягивающими силами  $P$ . На рис. 10.2,б показана эквивалентная система, в соответствии с которой рассматриваемое кольцо является три раза статически неопределимой плоской рамой. Канонические уравнения метода сил, с помощью которых определяют неизвестные усилия  $X_1, X_2, X_3$  имеют в данном случае следующий вид:

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \Delta_{1p} &= 0; \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \Delta_{2p} &= 0; \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \Delta_{3p} &= 0. \end{aligned} \quad (10.1)$$

Благодаря симметрии, уравнения (10.1) можно упростить. Из условий равновесия половины кольца (рис. 10.3) следует, что  $X_1 = 0$ . Обе половины кольца, изображенные на рис. 10.3, в силу симметрии должны находиться в одинаковых условиях нагружения, т. е., например, верхние силы  $X_2$  для обеих половин должны иметь одинаковое направление. В то же время по закону взаимодействия половины кольца эти силы должны иметь противоположное направление, как это показано на рис. 10.3. Выполнение указанных двух условий возможно лишь при  $X_2 = 0$ . Следовательно, только одно неизвестное  $X_3$  отличается от нуля, а система (10.1) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \delta_{13}X_3 + \Delta_{1p} &= 0; \\ \delta_{23}X_3 + \Delta_{2p} &= 0; \\ \delta_{33}X_3 + \Delta_{3p} &= 0. \end{aligned} \quad (10.2)$$

Каждое из этих уравнений, если коэффициенты отличны от нуля, можно использовать для определения  $X_3$ .

Коэффициенты и свободные члены вычисляют по формулам

$$\delta_{ik} = \int_L \frac{M_i M_k}{EI} ds, \quad \Delta_{kp} = \int_L \frac{M_p M_k}{EI} ds. \quad (10.3)$$

На рис. 10.4 показаны нагружения основной системы, которым соответствуют  $M_1, M_2, M_3, M_p$ .

После того, как раскрыта статическая неопределимость, т. е. найдено значение  $X_3$ , определяют изгибающий момент  $M$  и нормальную силу  $N$  в сечениях, где установлены тензорезисторы, используя при этом эквивалентную систему (рис. 10.2,б). Нормальные напряжения кольца вычисляют по формуле

$$\sigma = \frac{M}{I} x + \frac{N}{F}, \quad (10.4)$$

где  $x$  — координата волокна, на котором находится тензорезис-

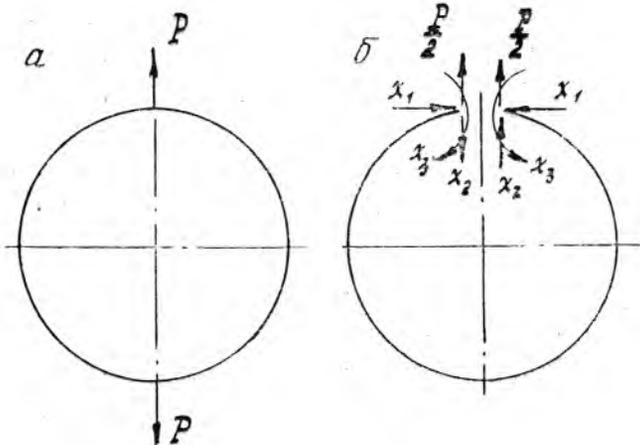


Рис. 10.2. Расчетная схема кольца

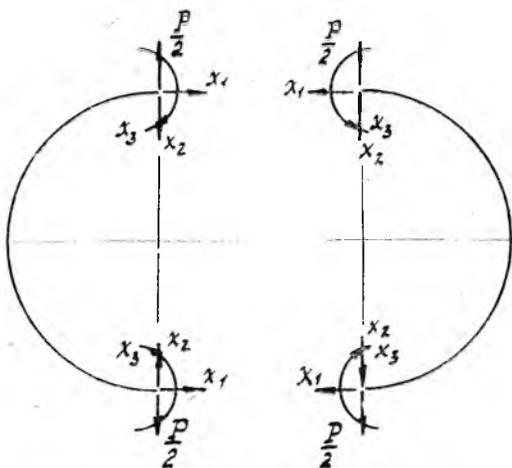


Рис. 10.3. Нагружение половины кольца

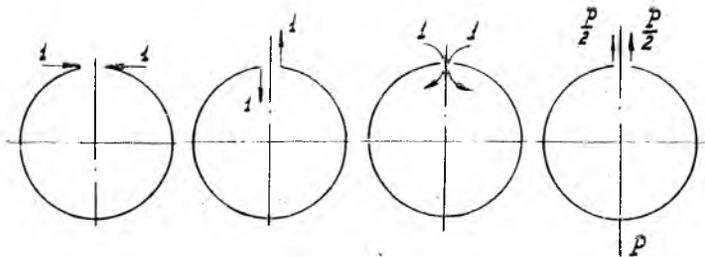


Рис. 10.4 Нагрузки основной системы

тор (рис. 10.5). Ось  $x$  следует направить в сторону растянутых волокон.

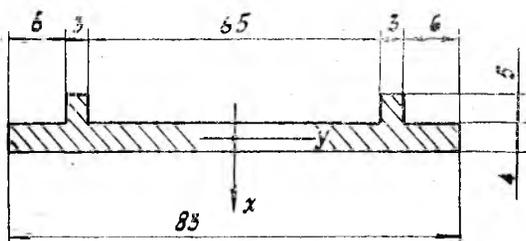


Рис. 10.5. Поперечное сечение кольца

#### ОПЫТНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЕФОРМАЦИИ И НАПРЯЖЕНИЯ КОЛЬЦА

С помощью тензорезисторов, наклеенных на наружную поверхность кольца, определяют окружные деформации  $\epsilon$  в заданных сечениях. При этом для перехода от показаний измерительного прибора к деформациям используют результаты тарировки прибора с тензорезистором или паспортную цену деления прибора с соответствующей поправкой на фактическую характеристику тензорезистора. Заданные растягивающие силы  $P$  создают навешиванием в нижнем сечении кольца сменных грузов.

Для перехода от деформаций к напряжениям используют закон Гука

$$\sigma = E \epsilon. \quad (10.5)$$

#### ПОРЯДОК ПРОВЕДЕНИЯ РАБОТЫ

1. Дать предварительную нагрузку на кольцо и произвести отсчеты по прибору, подключенному к тензорезисторам.

2. Увеличить нагрузку на заданную величину и вновь произвести отсчет по прибору.

3. По приращению показаний прибора  $\Delta A$  определить деформации внешней поверхности кольца  $\epsilon_{оп}$  в исследуемых сечениях.

4. Вычислить опытные значения напряжений  $\sigma_{оп}$  по формуле (10.5).

5. Вычислить теоретические значения напряжений  $\sigma_t$  по формуле (10.4), предварительно раскрыв статическую неопределенность кольца.

6. Сопоставить опытные и теоретические значения напряжений путем вычисления расхождений по формуле

$$\frac{|\sigma_t - \sigma_{оп}|}{\sigma_t} 100\%.$$

7. Опытные и расчетные данные занести в протоколы (табл. 10.1 и 10.2).

Таблица 10.1

Протокол тензометрирования

№ опыта	P, Н	Показания прибора, дел				Приращения показаний прибора, дел							
		A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>3</sub>	A <sub>4</sub>	$\Delta A_1$	$\Delta A_{1cp}$	$\Delta A_2$	$\Delta A_{2cp}$	$\Delta A_3$	$\Delta A_{3cp}$	$\Delta A_4$	$\Delta A_{4cp}$
1													
2													
3													

## Протокол результатов (напряжения, МПа)

Сечение 1			Сечение 2			Сечение 3			Сечение 4		
$\sigma_1$	$\sigma_{оп}$	Расхождение, %									

## СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

1. Расчетная схема кольца с указанием использованных данных.
2. Поперечное сечение кольца с указанием размеров.
3. Расчеты, связанные с раскрытием статической неопределенности и определением напряжений.
4. Протоколы тензометрирования и результатов.
5. Общий вывод.

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какие стержневые системы относят к плоским, плоскопространственным и пространственным рамам?
2. Как определить степень статической неопределенности рамы?
3. Как записываются канонические уравнения метода сил?
4. Какой физический смысл имеют коэффициенты и свободные члены канонических уравнений?
5. Какой физический смысл имеет каждое каноническое уравнение?
6. Любые ли неизвестные можно принять за длины?
7. Что называют основной и эквивалентной системами?
8. Как осуществляется генеральная проверка результатов раскрытия статической неопределенности рамы?

## УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

Цель работы — изучение явления потери устойчивости сжатыми стержнями, опытное определение критических сил и сопоставление их с результатами, полученными по формулам сопротивления материалов.

### ОБЪЕКТ ИССЛЕДОВАНИЯ

Испытанию подвергаются стержни из авиационного алюминиевого профиля, схемы нагружения которых показана на рис. 11.1.

Установка, изображенная на рис. 11.1,а включает испытуемый стержень 4, установленный в вертикальном положении, нижний конец которого зашпелен упорами 5. Нагружение осуществляется сменными грузами 1, прикладываемыми к верхней части стержня через наконечник 2. Для предотвращения разрушения стержня после потери устойчивости в установке предусмотрено ограничивающее устройство 3.

Во второй установке (рис. 11.1,б) испытуемый стержень 2 является подкосом кронштейна, нагружаемого винтовым домкратом 3 через пружинный динамометр 4 в точке В горизонтального стержня 1.

Испытуемый стержень 3 третьей установки (рис. 11.1,в) установлен в захватах универсальной испытательной машины УМ-5А. Нижний конец стержня зашпелен клиньями 4, а верхний удерживается шарниром 2.

### ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ

При сжатии достаточно длинного стержня можно наблюдать внезапное выпучивание — быстрое нарастание перемещений в направлении, перпендикулярном оси стержня. Силу, при которой возникает выпучивание или, иначе говоря, потеря устойчивости, называют критической и обозначают  $P_{кр}$ .

При  $P < P_{кр}$  устойчивой является прямолинейная форма равновесия стержня, так как упругие силы сопротивления, возникаю-

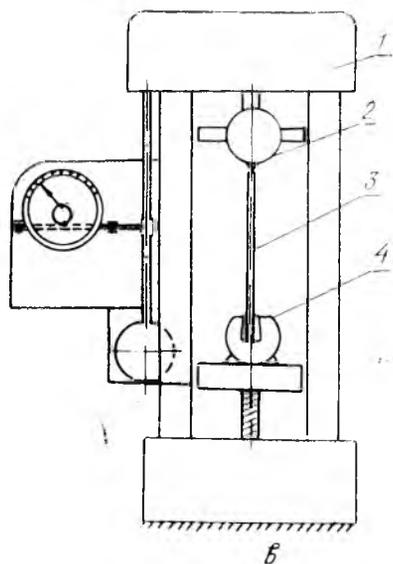
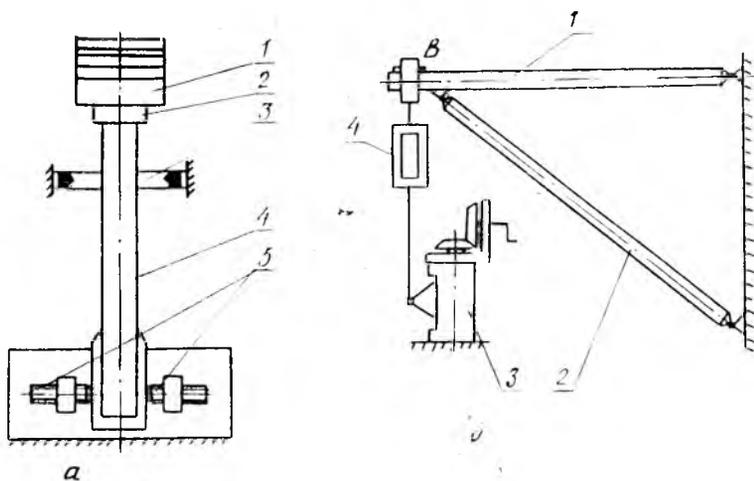


Рис. 11.1. Установки для изучения потери устойчивости

ше в искривленном стержне, превышают сжимающие силы  $P$ . При  $P \geq P_{кр}$  сжимающие силы сравниваются с упругими силами сопротивления искривленного стержня и, следовательно, происходит потеря устойчивости.

Для вычисления критической силы применяют формулу Эйлера

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 E I_{мин}}{(\mu l)^2}, \quad (11.1)$$

где  $E$  — модуль продольной упругости материала стержня;

$I_{мин}$  — минимальный главный центральный момент инерции поперечного сечения стержня;

$\mu$  — коэффициент приведения длины;

$l$  — длина стержня.

Формула Эйлера применима до напряжения, равного пределу пропорциональности  $\sigma_{пц}$  материала стержня, т. е. при

$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{F} \leq \sigma_{пц}$ . Это условие выполняется для достаточно длинных стержней, у которых

$$\lambda \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}}, \quad (11.2)$$

где  $\lambda = \frac{\mu l}{i_{мин}}$  — гибкость стержня;

$i_{мин}$  — минимальный главный центральный радиус инерции поперечного сечения стержня.

#### ОПЫТНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКИХ СИЛ

На установке, изображенной на рис. 11.1,а, определяют критическую силу стержня 4 с защемленным нижним концом методом проб. Поэтапно увеличивают с помощью грузов сжимающую силу и каждый раз отводят стержень до упора 3, а затем освобождают. Критической будет та сила, начиная с которой стержень после освобождения и затухания колебаний не возвращается в исходное положение, а остается на упоре в изогнутом состоянии.

На установке, изображенной на рис. 11.1,б, определяют критическую силу стержня 2 с шарнирно закрепленными концами. Нагрузку кронштейна осуществляют домкратом 3, величину нагрузки фиксируют на динамометре 4. При достижении критической силы наблюдается увеличение прогибов стержня 2 при неизменной нагрузке  $P_{кр}$ . По критической нагрузке кронштейна  $P_{кр}$ , используя метод сечений, находят критическую силу  $N_{кр}$  стержня 2.

На установке, изображенной на рис. 11.1,в, определяют критическую силу стержня 3, нижний конец которого защемлен, а верхний закреплен шарнирно. В процессе нагружения фиксируют состояние, характеризующееся увеличением прогибов стержня 3 при

постоянной нагрузке. Эта нагрузка является критической силой исследуемого стержня.

### ПОРЯДОК ПРОВЕДЕНИЯ РАБОТЫ

1. Путем нагружения установить опытные значения критических сил  $P_{кр}^{оп}$ . Для стержня 2 (рис. 11.1,б) определить также  $N_{кр}^{оп}$  используя метод сечений.

2. Установить продольные и поперечные размеры испытываемых стержней, геометрические характеристики поперечных сечений.

3. Вычислить гибкость стержней по форме (11.2) и убедиться в возможности применения формулы Эйлера.

4. Вычислить по формуле (11.1) теоретические значения критических сил  $P_{кр}^т$ ,  $N_{кр}^т$ .

5. Сопоставить опытные и теоретические значения критических сил путем вычисления расхождений по формулам

$$\frac{|P_{кр}^т - P_{кр}^{оп}|}{P_{кр}^т} 100\%; \quad \frac{|N_{кр}^т - N_{кр}^{оп}|}{N_{кр}^т} 100\%.$$

6. Опытные и расчетные данные занести в протокол.

### Протокол испытаний и результатов

Тип установки	Геометрические характеристики стержня			Гибкость стержня, $\lambda$	$\sqrt{\frac{E}{\sigma_{тис}}}$	Теоретическое значение критической силы, Н	№ опыта	Опытное значение критической силы, Н	Среднее значение, Н	Расхождение, %
	$l$ , см	$I_{мин}$ , см <sup>4</sup>	$i_{мин}$ , см							
а							1			
							2			
							3			
б							1			
							2			
							3			
в							1			
							2			
							3			

## СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

1. Расчетные схемы и поперечные сечения испытываемых стержней с указанием размеров.
2. Расчеты, относящиеся к определению опытных и теоретических значений критических сил.
3. Протокол испытаний и результатов.
4. Общий вывод.

## КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. В чем заключается явление потери устойчивости сжатым стержнем?
2. Какую величину сжимающей силы называют критической?
3. Для всех ли стержней можно применять формулу Эйлера?
4. Как учитывают условия закрепления стержня при определении критической силы?
5. Какая форма поперечного сечения сжатого стержня является рациональной с точки зрения устойчивости?

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- Афанасьев А. М., Марьин В. А.* Лабораторный практикум по сопротивлению материалов. М.: Наука, 1975. 149 с.
- Беляев Н. М.* Лабораторные работы по сопротивлению материалов. М.: Госиздат, 1954. 186 с.
- Расчеты на прочность в машиностроении: В 2 т. / Под ред. *С. Д. Пономарева*. М.: Машгиз, 1956. Т. 1. 884 с.
- Феодосьев В. И.* Сопротивление материалов. М.: Наука, 1986. 512 с.

## СОДЕРЖАНИЕ

---

<i>Лабораторная работа 6</i>	3
Определение деформаций и напряжений при изгибе	
<i>Лабораторная работа 7</i>	9
Определение прогиба балки с водатливным закреплением	
<i>Лабораторная работа 8</i>	
Определение остаточных напряжений	15
<i>Лабораторная работа 9</i>	
Определение перемещений статически неопределимой балки	21
<i>Лабораторная работа 10</i>	26
Определение деформаций и напряжений плоской статически неопределимой рамы	
<i>Лабораторная работа 11</i>	32
Потеря устойчивости сжатым стержнем	
Библиографический список	