

Самарский государственный аэрокосмический университет
им. академика С.П. Королева

Лабораторная работа № 1-6м

Изучение основного закона
динамики вращательного движения твердого тела
с помощью маятника Обербека

Самара - 1995

УДК 531.011

В настоящей работе рассматриваются основные закономерности вращательного равноускоренного движения твердого тела, экспериментально определяется зависимость углового ускорения от момента силы для вращательного движения.

Работа содержит краткую теорию рассматриваемых вопросов, описание экспериментальной установки, порядок проведения эксперимента, методику обработки полученных результатов, контрольные вопросы и список рекомендуемой литературы.

С о с т а в и т е л и : Т.М. Ларионова, Л.И. Каганов

Р е ц е н з е н т : А.В. Горохов /

Утверждено редакционно-издательским советом СГАУ

Цель работы. Определение зависимости углового ускорения от момента силы для вращающегося твердого тела экспериментальным и расчетным путем.

Приборы и принадлежности:

маятник Обербека, миллисекундомер, штангенциркуль, набор грузов.

Материал для изучения: Основной закон динамики для вращательного движения. Момент инерции. Теорема Штейнера.

1. Введение

При вращательном движении все точки твердого тела движутся по окружности, центры которой лежат на одной и той же прямой, называемой *осью вращения*. Для описания вращательного движения достаточно задать положение в пространстве оси вращения и угловую скорость тела в каждый момент времени.

Элементарное перемещение твердого тела при плоском движении (например, качение цилиндра по плоскости) всегда можно представить как поворот вокруг некоторой оси, называемой *мгновенной осью вращения*. Эта ось может лежать в пределах тела либо вне его.

В случае катящегося цилиндра мгновенная ось совпадает с линией касания цилиндра с плоскостью и перемещается как по плоскости, так и по поверхности цилиндра.

Для характеристики вращательного движения важными являются понятия угловой скорости и углового ускорения.

Векторная величина

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt},$$

где Δt — время, за которое совершается поворот $\Delta \varphi$, называется *угловой скоростью* тела.

Угловая скорость $\vec{\omega}$ направлена вдоль оси, вокруг которой вращается тело, в сторону, определяемую *правилом правого винта*. Вращение с постоянной угловой скоростью называется *равномерным*.

Приращение вектора угловой скорости за время dt характеризуется величиной, которую называют *угловым ускорением*

$$\vec{\epsilon} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\omega}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

Движение тела с постоянным угловым ускорением называется *равномерным*.

Вектор углового ускорения совпадает по направлению с вектором угловой скорости, если приращение $\Delta \vec{\omega} > 0$ и имеет противоположное направление, если $\Delta \vec{\omega} < 0$.

2. Краткая теория вопроса

Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси имеет вид:

$$I \vec{\epsilon} = \vec{M}, \quad (1)$$

где I - момент инерции относительно оси вращения;

$\vec{\epsilon}$ - вектор углового ускорения тела;

\vec{M} - результирующий вектор моментов сил, действующих на тело.

В проекции на ось вращения (например, z) (1) можно представить:

$$I \epsilon_z = M_z, \quad (2)$$

где ϵ_z - проекция углового ускорения на ось z ;

M_z - проекция вектора \vec{M} на ось z .

Для упрощения записи в дальнейшем будем опускать индекс " z ".

Важным при рассмотрении вопросов, связанных с вращением, является понятие момента инерции тела.

В механике *моментом инерции* тела относительно данной оси называется величина I , равная сумме произведений элементарных масс на квадраты их расстояний до этой оси :

$$I = \sum_{i=1}^n m_i R_i^2. \quad (3)$$

Суммирование производится по всем элементарным массам m_i , на которые можно разбить тело.

В более общем виде для непрерывного распределения масс

$$I = \int_V R^2 dm. \quad (4)$$

В (4) интегрирование производится по всему объему тела V .

Из определения (3) видно, что момент инерции есть величина *аддитивная*. Это означает, что момент инерции тела равен сумме моментов инерции его частей. Кроме того, очевидно, что величина момента инерции тела зависит от положения оси вращения в пространстве.

Из сопоставлений основных законов динамики поступательного ($\vec{F} = m\vec{a}$) и вращательного ($\vec{M} = I\vec{\epsilon}$) движений видно, что момент инерции является массовой характеристикой и определяет инертность тела при вращательном движении тела.

Нахождение моментов инерции тела относительно произвольной оси существенно облегчается, если воспользоваться теоремой Штейнера, которая формулируется следующим образом (рис.1) :

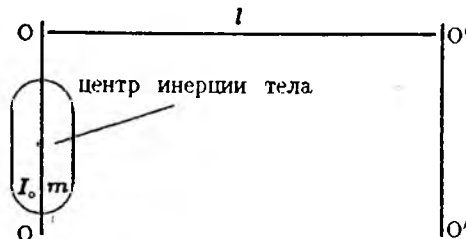


Рис.1.

момент инерции тела I относительно произвольной оси $O'-O'$ равен сумме момента инерции I_0 , относительно оси $O-O$, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела на квадрат расстояния l между этими осями.

$$I = I_0 + m l^2. \quad (5)$$

Получим расчетные формулы для определения моментов сил, действующих на маятник Обербека (рис.2), углового ускорения и его момента инерции относительно оси z .

На маятник Обербека действуют: сила натяжения нити \vec{F}_H , силы трения в опорах, силы трения скольжения нити о шкивы 10 и 12.

Пренебрегая силами трения из-за их малости, запишем момент сил, действующих на маятник (рис.2).

$$M = F_H \frac{D}{2}, \quad (6)$$

где D —диаметр шкива 12.

Для нахождения силы натяжения нити запишем уравнение динамики для груза m в проекции на направление его движения (ось X) в следующем виде:

$$m_1 g = F_H + m_1 a, \quad (7)$$

где $a = 2h/t^2$ —ускорение движения груза m_1 , h —расстояние, пройденное грузом за время t .

После подстановки (6),(7) и значения ускорения движения груза в (2) для величины момента сил получим выражение:

$$M = m_1 \left(g - \frac{2h}{t^2} \right) \frac{D}{2}, \quad (8)$$

Ускорение a движения груза m_1 является тангенциальным ускорением движения наружных точек шкива 12, лежащих на диаметре D , отсюда угловое ускорение шкива определяется в виде :

$$\epsilon = \frac{2a}{D} = \frac{4h}{Dt^2} \quad (9)$$

Момент инерции маятника Обербека зависит от положения четырех грузов на стержнях. Используя свойства аддитивности моментов инерции, можно записать:

$$I = I_0 + 4 I_m, \quad (10)$$

где I_0 —момент инерции крестовины с валом;

I_m —момент инерции грузов m .

На основании теоремы Штейнера примем для одного груза:

$$I_m = I_{m_0} + ml^2, \quad I_{m_0} = \frac{md^2}{16} + \frac{mH^2}{12}, \quad (11)$$

где d —диаметр цилиндра,

H —его высота,

l —расстояние от оси вращения,

I —момент инерции груза относительно оси, проходящей через его центр инерции параллельно оси вращения.

После подстановки (11) в (10) имеем:

$$I = I_0 + 4 I_{m_0} + 4ml^2. \quad (12)$$

3. Экспериментальная установка

Маятник Обербека состоит из крестовины, по четырем взаимно перпендикулярным стержням которой могут перемещаться грузы m . На горизонтальной оси крестовины имеется двухступенчатый шкив, на который наматывается нить. Один конец нити прикреплен к шкиву, а на втором конце подвешен груз. При движении груза вниз, нить разматывается со шкива и вызывает вращательное равномерно ускоренное движение крестовины. Изменением расстояния перемещаемых грузов от оси вращения крестовины можно регулировать величину углового ускорения маятника.

Общий вид установки изображен на рис. 2.

На вертикальной колонне 1, установленной на основании 2 прикреплены два кронштейна: нижний неподвижный 3 и верхний подвижный 4, а так же две неподвижные втулки: нижняя 5 и верхняя 6. Основание снабжено регулируемыми винтами 7, обеспечивающими горизонтальную установку прибора. На верхней втулке 6 с помощью основания 8 закреплен подшипниковый узел блока 9 и сам блок 10, на который одета нить 11. Один конец нити прикреплен к двухступенчатому шкиву 12, а на втором конце закреплены грузы 13. На нижней втулке 5 с помощью основания 14 прикреплен тормозной электромагнит 15, который после подключения к нему напряжения, удерживает с помощью фрикционной муфты систему "крестовина - подвижные грузы" в состоянии покоя.

Подвижный кронштейн 4 можно перемещать вдоль колонны и фиксировать его в любом положении, задавая таким образом длину перемещения грузов h . Для отсчета величины перемещения на колонне нанесены миллиметровая шкала 16.

Включение отсчета времени производится нажатием кнопки "Пуск" миллисекундомера. На неподвижном кронштейне 3 закреплен фотоэлектрический датчик 18, вырабатывающий электрический импульс для отключения миллисекундомера и включающий тормозной электромагнит в конце движения груза m . К кронштейну 3 прикреплен кронштейн 19 с резиновыми амортизаторами, ограничивающими движение грузов. На основании прибора укреплен миллисекундомер 20, к гнездам которого подключен фотоэлектрический датчик 18. На лицевой панели миллисекундомера расположены кнопки управления, имеющие следующие назначения:

1. "Сеть" - включение и выключение сетевого напряжения. При включении сетевого напряжения включается тормозной электромагнит.
2. Обнуление показаний миллисекундомера - "Сброс".
3. "Пуск" - запуск отсчета времени и отключение электромагнита.

4. Порядок выполнения работы

1. Измерить штангенциркулем диаметры D_1 большого шкива и D_2 малого шкива. Результаты измерения, а так же значения масс грузов m , обозначенные на этих грузах, занести в таблицу 1.

2. Грузы m закреплены примерно на серединах стержней на одинаковом расстоянии от оси вращения. Небольшими перемещениями грузов добиться, чтобы маятник был сбалансированным, т.е. находился в положении безразличного равновесия. Последнее проверяется приведением маятника несколько раз в движение. Маятник должен каждый раз останавливаться в различных положениях. Значение m записать в таблицу.

Таблица 1

Цикл №	Данные установки				Измерения			Расчет	
	D, мм	l, мм	m, кг	m ₁ , кг	Номер	h, м	t, с	M, Н·м	ε, с ⁻²
					1				
					2				
					3				
					4				
					5				

3. Растормозить маятник и намотать нить на большой шкив. Подвесить к нити грузы m , и записать в таблицу суммарное значение масс, указанных на грузах. Зафиксировать положение нижнего края грузов по миллиметровой шкале 16.

4. Снять по шкале 16 значение расстояния h и записать его в табл.1.

5. Нажать клавишу "Пуск" и удерживать ее в нажатом состоянии до остановки грузов.

6. Сосчитать измеренное значение времени падения грузов по шкале миллисекундомера, записать его в табл.1. и нажать клавишу "Сброс".

7. Повторить операции, указанные в п.п. 3,4,5,6 еще как минимум два раза.

8. Выполнить операции, указанные в п.п. 3,4,5,6, наматывая нить на малый шкив.

9. Выполнить все предыдущие операции (п.п. 3...8) еще с двумя значениями грузов m .

10. Повторить все измерения при другом значении l .

5. Обработка результатов измерений

1. Рассчитать по формулам (8) и (9) для каждого эксперимента момент силы M , и угловое ускорение ϵ .

2. Построить график $\epsilon = f(M)$ для первого цикла измерений (когда грузы m находятся на расстоянии l_1 от оси вала) и такой же график для второго цикла измерений (когда грузы m находятся на расстоянии l_2 от оси вала). Наличие линейной зависимости подтверждает качественно уравнение (8) основного закона динамики вращательного движения твердого тела.

3. Используя график $\epsilon = f(M)$, определить моменты инерции маятника Обербека I_1 и I_2 , как котангенсы углов наклона этих линий к оси M . Для этого вычислить отношение длин отрезков АВ и СВ, взятых с учетом масштаба по осям ϵ и M (рис.3).

4. Оценить погрешность момента инерции по формуле

$$\delta = \frac{I_T - I_{\text{Э}}}{I_T} 100\%, \quad (13)$$

где I_T —теоретический момент инерции, определяемый по формуле (12);

$I_{\text{Э}}$ —экспериментальный момент инерции, определяемый по п.3.

5. Используя построенные графики, определить момент сил трения и оценить его влияние на результат экспериментов.

6. Контрольные вопросы

1. Дать определение момента силы, момента инерции, углового ускорения.
2. Сформулировать теорему Штейнера.
3. Сформулировать основной закон динамики вращательного движения твердого тела.
4. Получить формулу для расчета момента силы, действующей на маятник Обербека.
5. Как определяется в данной работе угловое ускорение маятника?
6. Какие систематические погрешности имеют место при определении момента инерции по приведенным выше формулам?
7. Показать, что момент инерции тела относительно произвольной оси является мерой его инертности при вращении вокруг этой оси.
8. Выведите формулу момента инерции сплошного (полого) цилиндра относительно оси симметрии.

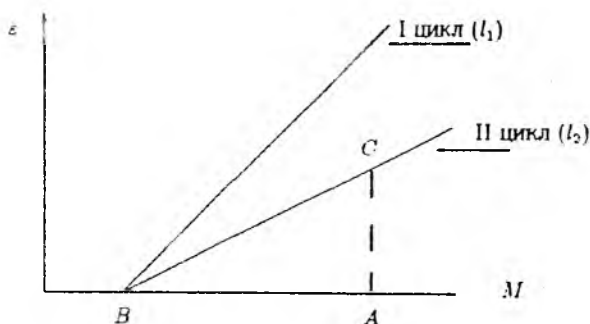


Рис. 3.

Литература

1. Савельев И.В. Курс общей физики. Т.1. М., "Наука", 1970.
2. Трофимова Т.И. Курс физики. М., "Высшая школа", 1985 г. и последующие издания.
3. Деглаф А.А., Яворский Б.М. и др. Курс физики. Т.1. М., "Высшая школа", 1973 г. и последующие издания.
4. Руководство к лабораторным работам по физике. (Под редакцией Гольдина Л.Л.). М., "Наука", 1973, 687 с.
5. Эксплуатационная документация маятника Обербека ГРМ-С6. Электронный завод Эльвро. Вроцлав, 1987, 87 с.

Подписано в печать 20. II. 95. Формат 60x84 1/16.
Бумага газетная. Печать офсетная. Усл. п. л. 0,46.
Тираж 100 экз. Заказ 498.

Самарский государственный аэрокосмический
университет имени академика С. П. Королева.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

Издательство Самарского государственного
аэрокосмического университета.
443001 Самара, ул. Ульяновская, 18.