

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

КУЙБЫШЕВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ имени академика С. П. КОРОЛЕВА

ИЗУЧЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ
МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ
С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

ИЗМЕРЕНИЕ СКОРОСТИ ЗВУКА
В МЕТАЛЛИЧЕСКОМ СТЕРЖНЕ

*Методические указания
к лабораторным работам № 1-18, 1-20*

Лабораторная работа № 1—18 содержит краткие сведения о собственных механических колебаниях систем с одной степенью свободы, а также методические указания по экспериментальному изучению как незатухающих, так и затухающих колебаний. В лабораторной работе № 1—20 на примере плоской монохроматической волны рассматривается образование бегущих и стоячих упругих волн, их основные характеристики. Рассмотрена методика экспериментального определения скорости звука в металлическом стержне.

Лабораторные работы предназначены для студентов дневного и вечернего обучения всех факультетов КуАИ.

Составитель А. Н. Первышин

Рецензенты: Э. Д. Посыпайко, А. Н. Бекренев

Утверждены редакционно-издательским советом института
в качестве методических указаний к лабораторным работам

**ИЗУЧЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ
МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ
С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ**

Цель работы: Ознакомление с собственными колебаниями и нахождение основных характеристик механических колебательных систем, определяющих процесс собственных колебаний.

Приборы и принадлежности: штатив со шкалой, набор пружин различной жесткости, набор грузов различной массы, сосуд с водой, секундомер.

**ГАРМОНИЧЕСКИЕ НЕЗАТУХАЮЩИЕ КОЛЕБАНИЯ
ГРУЗА НА ПРУЖИНЕ**

В механике простейшими колебательными системами с одной степенью свободы являются маятники, например, пружинный.

Рассмотрим спиральную пружину, имеющую в недеформированном состоянии длину l_0 (рис. 1,а).

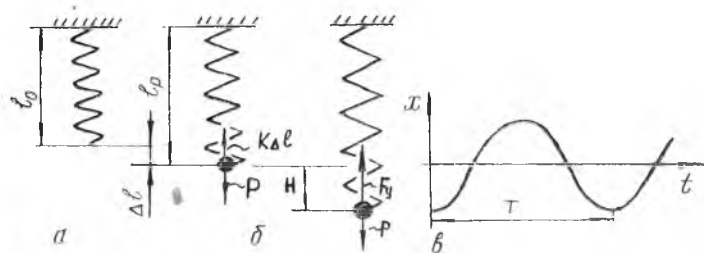


Рис. 1

Если один конец пружины закрепить, а к другому подвесить груз массой m , то силой $P = mg$ пружина будет растянута на величину $\Delta l = l_p - l_0$, где l_p — длина пружины в положении равновесия.

ния (рис. 1,б). Чем меньше Δl при постоянной силе P , тем жестче пружина. Величина

$$k = \frac{P}{\Delta l} \quad (1)$$

называется коэффициентом жесткости пружины.

Если сместить груз от положения равновесия на некоторую величину x и затем отпустить его, то груз начнет совершать колебательное движение под действием силы упругости (рис. 1,в). При небольших растяжениях x справедлив закон Гука: сила упругости пропорциональна растяжению пружины:

$$\vec{F}_y = -k(x + \Delta l). \quad (2)$$

Знак «—» означает, что сила упругости направлена в сторону, противоположную смещению x .

Уравнение движения груза под действием силы упругости F_y и силы тяжести P можно записать в виде

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F_y + P$$

Подставляя сюда соотношения (1) и (2), получим

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -k(x + \Delta l) + k\Delta l = -kx$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0. \quad (3)$$

где $\omega^2 = \frac{k}{m}$ — циклическая частота колебаний. Она связана с периодом соотношением $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Для рассматриваемой задачи это соотношение принимает вид

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (4)$$

Период пружинного маятника, как следует из (4), зависит лишь от массы груза и жесткости пружины и не зависит от начального отклонения груза от положения равновесия. Это важнейшее свойство называется изохронностью.

Решение уравнения (3) имеет вид

$$x = A \cos(\omega t + \alpha), \quad (5)$$

где A — амплитуда колебаний, α — начальная фаза колебаний. Обе эти величины связаны с положением колеблющейся точки в начальный момент времени. Из уравнения (5) следует, что колебания пружинного маятника являются гармоническими (т. е. колеблющаяся величина изменяется по закону синуса или косинуса).

ЗАТУХАЮЩИЕ ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Из опыта известно, что со временем свободные колебания затухают. Это связано с тем, что на маятник, помимо силы упругости и силы тяжести, действует сила сопротивления среды, обычно пропорциональная скорости движения:

$$F_c = -r \frac{dx}{dt},$$

где r — коэффициент сопротивления среды. Знак «—» означает, что сила сопротивления среды направлена противоположно скорости. С учетом этой силы уравнение затухающих колебаний принимает вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0, \quad (6)$$

где величина $\beta = \frac{r}{2m}$ называется коэффициентом затухания. Решение уравнения (6) выглядит аналогично (5):

$$x = A(t) \cos(\omega' t + \alpha), \quad (7)$$

но здесь частота колебаний несколько меньше, чем в случае затухающих колебаний:

$$\omega' = \sqrt{\omega^2 - \beta^2}. \quad (8)$$

Соответственно величина периода затухающих колебаний несколько увеличивается:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} - \beta^2}}. \quad (9)$$

Амплитуда затухающих колебаний уменьшается со временем по экспоненциальному закону (рис. 2):

$$A = A_0 e^{-\beta t}. \quad (10)$$

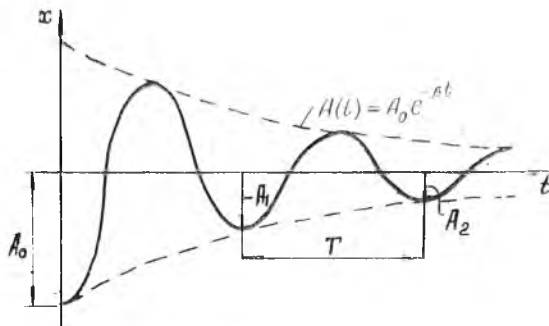


Рис. 2

Сопоставляя амплитуды n -го и $(n + 1)$ -го колебаний, получим, что их отношение постоянно для любого участка колебаний:

$$\frac{A_n}{A_{n+1}} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta t (t+T)}} = e^{\beta T}.$$

Таким образом, амплитуда затухающих колебаний за каждый период убывает в одно и то же число раз. Интенсивность убывания амплитуды оказалось удобнее характеризовать натуральным логарифмом отношения амплитуд за период:

$$\delta = \ln \frac{A_n}{A_{n+1}} = \beta T. \quad (11)$$

Величина δ называется логарифмическим декрементом затухания.

Пусть за N колебаний, т. е. за время $t = NT$, амплитуда уменьшилась в $e = 2,72$ раза. Тогда, используя выражение (10), можно записать:

$$\frac{A_n}{A_{n+N}} = \frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta (t+NT)}} = e^{-\beta NT} = e.$$

Отсюда $\beta NT = 1$ или

$$\delta = \beta T = \frac{1}{N}. \quad (12)$$

Таким образом, логарифмический декремент затухания обратно пропорционален числу колебаний, за которое амплитуда колебаний уменьшается в e раз. Так, если $\delta = 0,01$, то за 100 колебаний амплитуда уменьшается в e раз.

ОПИСАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ УСТАНОВКИ

Установка (рис. 3) состоит из штатива 1 со шкалой, к штативу на пружинах 2 с указателем подвешиваются грузы 3. При исследовании затухающих колебаний грузы помещают в сосуд с водой 4.

Упражнение 1. Определение зависимости периода собственных колебаний пружинного маятника от жесткости пружины и массы груза.

1. Используя набор грузов известной массы, определить по формуле (1) жесткость представленных пружин, находя удлинение Δl при нагрузке $P = mg$. Для каждой пружины измерения провести с различными нагрузками и оценить погрешность.

2. Для одной из пружин (с минимальной жесткостью) определить период колебаний T при различных значениях массы груза m по формуле $T = t/N$,

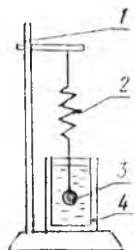


Рис. 3

где N — число полных колебаний, совершаемых грузом за время t . Обычно выбирают $N = 10 \dots 20$. Измерение повторить несколько раз и оценить погрешность полученных значений периода.

По результатам экспериментов построить график зависимости $T^2 = f(m)$ и сопоставить ее с расчетной зависимостью, полученной по формуле (4).

3. Подвесивая к каждой из пружин груз максимальной массы, найти, аналогично п. 2, период колебаний и сопоставить на графике зависимости $1/T^2 = f(k)$ — экспериментальную и расчетную, полученную по формуле (4).

Форма отчетности. Результаты измерений и расчетов свести в табл. 1, 2, 3 и представить в виде графиков. В таблицах $T_{\text{ср}}$ — среднееарифметическое измерений периода собственных колебаний, T_p — расчетное значение периода. Примеры выполнения графиков представлены на рис. 4а, б.

Таблица 1

№ п/п	p	Пружина № 1				Пружина № 2			Пружина № 3		
		Δl	K	$ \Delta K $	Δl	K	$ \Delta K $	Δl	K	$ \Delta K $	
		n	m	n/m	n/m	m	n/m	n/m	m	n/m	n/m
1											
2											
3											
Средн.											

$k = \dots$

Таблица 2

$m = \dots$

Таблица 3

p	№ п/п	N	t	T	$T_{\text{ср}}$	$T_{\text{ср}}^2$	T_p^2
		e	e	e	e	e^2	e^2
	1						
	2						
	3						
	1						
	2						
	3						
	1						
	2						
	3						

K	№ п/п	N	t	T	$T_{\text{ср}}$	$T_{\text{ср}}^{-2}$	T_p^{-2}
		e	e	e	e	e^{-2}	e^{-2}
	1						
	2						
	3						
	1						
	2						
	3						
	1						
	2						
	3						

Сделать вывод по результатам сопоставления расчета и эксперимента, проанализировав возможные причины расхождения результатов.

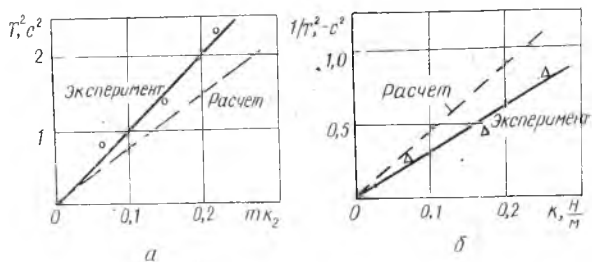


Рис. 4

Упражнение 2. Определение параметров затухающих колебаний.

1. Поместить в сосуд с водой груз наибольшей массы, подвешенный к пружине с наименьшей жесткостью. Привести груз в колебательное движение, причем он всегда должен оставаться погруженным в жидкость. Определить период колебаний по методу, изложенному в п. 2 упражнения 1. Измерения провести несколько раз и оценить погрешность.

2. Заметить на шкале штатива заранее выбранные значения амплитуд A_0 и A_N , отличающиеся в $e \approx 2,7$ раза. Растянуть пружину на величину A_0 (желательно $A_0 \approx 2,7 \cdot 10^{-2}$ м), найти число колебаний N , за которое амплитуда уменьшится до значения A_N и по формуле (12) оценить логарифмический декремент затухания. Для большей достоверности оценки целесообразно одновременно замерить время t , в течение которого амплитуда уменьшилась в e раз, тогда

$$\delta = \frac{T}{t}.$$

Измерение провести не менее 10 раз и оценить погрешность.

3. Найти коэффициент затухания $\beta = \delta/T$, коэффициент сопротивления среды $r = 2m\beta$ и по формуле (9) рассчитать период.

4. Сопоставить экспериментальное и расчетное значения периода, а также оценить увеличение периода колебаний за счет увеличения силы сопротивления по сравнению с упражнением 1.

Форма отчетности. Результаты экспериментов и расчетов представить в сводной таблице. Проанализировать причины увеличения периода в случае затухающих свободных колебаний.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Дайте определение гармонических колебаний.
2. Сформулируйте закон Гука, дайте понятие коэффициента жесткости пружины.
3. Запишите уравнение гармонических колебаний и дайте определение входящим в него величинам.
4. В чем причина затухания свободных колебаний? Запишите уравнение колебаний для этого случая.
5. Покажите, что амплитуда затухающих колебаний за каждый период убывает в одно и то же число раз.
6. Дайте определение логарифмического декремента затухания и поясните его физический смысл.
7. Как зависит период собственных колебаний от массы груза и жесткости пружины?
8. Для чего при исследовании затухающих колебаний груз опускают в сосуд с водой?

Л и т е р а т у р а

1. *Сивухин Д. В.* Общий курс физики. — М.: Наука, 1974, т. 1, гл. VI, § 39, 40
2. *Ахматов А. С., Андреевский В. М., Кулаков А. И.* и др. Лабораторный практикум по физике — М.: Высшая школа, 1980. Ч. IV. с. 172—178.

ИЗМЕРЕНИЕ СКОРОСТИ ЗВУКА В МЕТАЛЛИЧЕСКОМ СТЕРЖНЕ

Цель работы: ознакомление с природой образования стоячих волн, изучение их основных характеристик. Экспериментальное определение скорости упругой звуковой волны.

Приборы и принадлежности: прибор Кундта, сукно, капифоль, линейка.

ОБРАЗОВАНИЕ БЕГУЩИХ ВОЛН

Волной называется процесс распространения колебаний в пространстве. Если колебания распространяются в упругой среде (газ, жидкость, твердое тело), то волны называются упругими или звуковыми.

Распространение колебаний из одной точки в другую происходит не мгновенно, а всегда совершается с некоторой конечной скоростью, зависящей от свойств среды. Эта скорость называется скоростью распространения волны.

Пусть, например, в точках упругой среды с координатой $x = 0$ некоторая величина ξ изменяется по гармоническому закону:

$$\xi = A \sin \omega t,$$

где A — амплитуда, ω — циклическая частота колебаний, t — время.

За счет упругих сил взаимодействия через некоторое время и другие частицы среды начнут совершать колебательное движение с той же амплитудой и частотой. Значения величины ξ в точках $x > 0$ в момент времени t , т. е. $\xi(x, t)$ будут такими же, как значения в точках плоскости $x = 0$ в более ранний момент времени:

$$t' = t - \frac{x}{u},$$

где u — скорость распространения волны.

Следовательно, выражение, определяющее значение ξ в любой точке x в любой момент времени t , можно записать в виде

$$\xi(x, t) = A \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) \right]. \quad (1)$$

Это выражение представляет собой уравнение плоской монохроматической волны.

Геометрическое место точек, до которых дошло колебательное движение, называется фронтом волны. В данном случае это плоскость $x = \text{const}$ и поэтому говорят о плоской волне. Монохроматической волна называется в том случае, если колебание всех точек среды происходит с определенным значением частоты. Следует иметь в виду, что реальная монохроматическая волна представляет собой суперпозицию монохроматических волн, частоты которых заключены в некотором конечном интервале шкалы частот.

Из выражения (1) видно, что в волне величина ξ является периодической функцией не только времени t , как в колебаниях, но и координаты x . Период во времени, т. е. время, прошедшее между двумя одинаковыми состояниями колеблющейся величины в любой точке пространства, связан с круговой частотой соотношением

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (2)$$

За это время фронт волны пройдет расстояние, называемое длиной волны: $\lambda = uT$, (3)

Непосредственной подстановкой формулы (3) в (1) нетрудно убедиться, что значения величины ξ для двух точек среды, находящихся на расстоянии λ , одинаковы. Поэтому длину волны можно рассматривать как пространственный период колебаний.

Источником волн может служить любое колеблющееся тело, например поршень, расположенный в трубе (рис. 1) и совершающий колебательные движения. Воздействуя на частицы упругой среды — воздуха, он приводит их в колебательное движение с той же частотой. За счет сил упругости колебание частиц воздуха будет распространяться вдоль трубы — возникнет бегущая волна. Если поршень совершает гармонические колебания, то в трубе распространяется плоская монохроматическая волна, описываемая уравнением (1).

Заметим, что в этом случае отклонение частиц среды от поло-

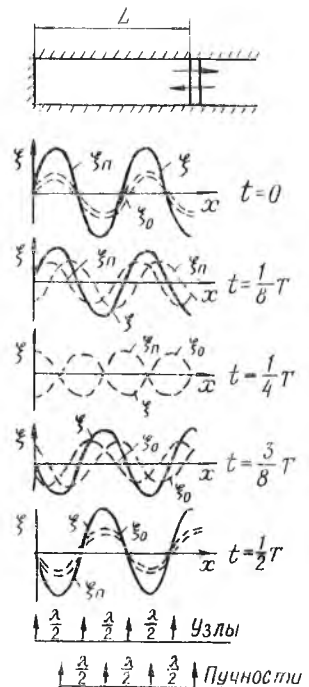


Рис. 1. Механизм образования бегущих и стоячих волн

жения равновесия ξ происходит вдоль направления распространения волны x . Такие волны называются продольными. Если направления распространения колебаний и смещения частиц среды от положения равновесия взаимно перпендикулярны, то волны называются поперечными.

ОБРАЗОВАНИЕ СТОЯЧИХ ВОЛН

Если на пути распространения бегущей волны расположить преграду, то волна отразится от нее и пойдет в обратном направлении. Такую картину нетрудно получить и в рассмотренном выше случае с колеблющимся поршнем. Для этого следует лишь закрыть трубу на произвольном расстоянии L от поршня жесткой перегородкой. В закрытой трубе одновременно распространяются две волны: одна от источника к преграде (она называется падающей), другая от преграды к источнику (она называется отраженной). Движение воздуха между поршнем и трубой теперь является результатом сложения падающей ξ_n и отраженной ξ_0 волн:

$$\xi = \xi_n + \xi_0. \quad (4)$$

Для описания этого движения удобнее отсчитывать расстояние x не от источника, как было ранее, а от преграды. Тогда уравнения падающей и отраженной волн могут быть записаны в виде

$$\xi_n = A \sin \omega \left(t + \frac{x}{u} \right); \quad (5)$$

$$\xi_0 = A \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{u} \right) + \alpha \right], \quad (6)$$

где α — разность фаз падающей и отраженной волн.

Допустим, что преграда является абсолютно твердым телом. Тогда воздух около преграды должен оставаться в покое, следовательно, при $x = 0$ $\xi = 0$. Сопоставляя зависимости (4), (5), (6) с этим граничным условием, получим

$$A \sin \omega t + A \sin (\omega t + \alpha) = 0$$

или

$$\sin \left(\omega t + \frac{\alpha}{2} \right) \cos \frac{\alpha}{2} = 0.$$

Это равенство должно выполняться при любых t , это возможно при $\alpha = \pi$, тогда уравнение отраженной волны можно записать так:

$$\xi_0 = -A \sin \omega \left(t - \frac{x}{u} \right). \quad (7)$$

Можно показать, что разность фаз падающей и отраженной волн равна π всегда, если падающая волна встречается с более плотной средой, и $\alpha = 0$ в случае менее плотной среды.

Подставляя уравнения (7) и (5) в (4) с учетом (2) и (3), по-

лучим после преобразований уравнение результирующего колебания:

$$\xi = 2A \sin 2\pi \frac{x}{\lambda} \cos \omega t. \quad (8)$$

Таким образом, в результате сложения падающей и отраженной волн возникает весьма специфическая картина колебаний, называемая стоячей волной. Амплитуда стоячей волны $2A \sin 2\pi \frac{x}{\lambda}$ не одинакова для всех точек среды, а зависит от x .

На рис. 1 приведены графики падающей на преграду и отраженной бегущих волн (пунктир), а также график результирующей стоячей волны (сплошная линия) для нескольких последовательных моментов времени. В точках среды с координатами

$$x = n \frac{\lambda}{2}, \text{ где } n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (9)$$

амплитуда стоячей волны равна нулю. Эти точки называются узлами. В точках среды с координатами

$$x = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2}, \text{ где } n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (10)$$

амплитуда стоячей волны максимальна. Эти точки называются пучностями стоячей волны.

Расстояние между двумя соседними пучностями или узлами называется длиной стоячей волны (λ_c), которую можно найти из выражения (9) или (10):

$$\lambda_c = \frac{\lambda}{2}. \quad (11)$$

Роль поршня заключается в подводе энергии к стоячей волне, чтобы компенсировать всегда существующие потери механической энергии. Поэтому для возбуждения незатухающей стоячей волны поршень должен находиться в пучности, т. е. месте, где амплитуда колебаний максимальна. Следовательно, расстояние между поршнем и преградой не может выбираться произвольно, а должно соответствовать выражению

$$L = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2}, \text{ где } n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (12)$$

ОПИСАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ УСТАНОВКИ

Установка состоит из стеклянной трубки 2 (рис. 2), с пробковыми опилками 3, закрытой с одной стороны неподвижной преградой 1, с другой стороны подвижным поршнем 4, являющимся концом стержня 5. Стержень закреплен в точках А и В.

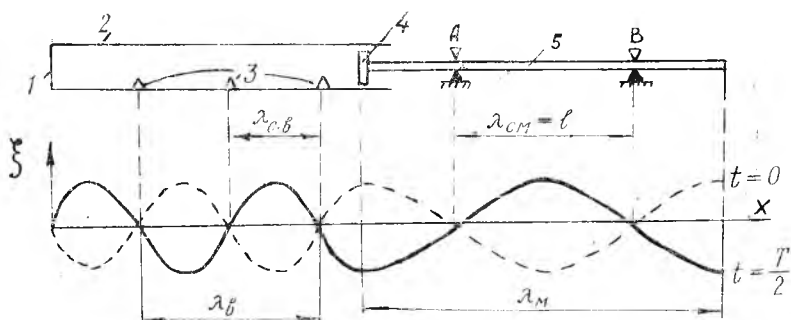


Рис. 2. Установка для экспериментального определения скорости звука в металлическом стержне

ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Натирая стержень 5 на участке АВ сукном, слегка покрытым канфолью, возбудить в нем продольные волны. Стержень при этом издает высокий звук. Возбужденные в стержне бегущие волны, отражаясь от его концов, дают стоячую волну с узлами в местах закрепления А и В. Тогда длина стоячей волны в стержне $\lambda_{CM} = l$ (здесь l — расстояние между точками закрепления), а длина бегущих волн $\lambda_M = 2\lambda_{CM} = 2l$.

2. Постепенно надвигая стеклянную трубку 2 на поршень 4, добиться образования характерной картины распределения опилок 3 — Кундтовых фигур. В узлах опилки собираются, в пучностях разбрасываются стоячей волной, возникающей в воздухе между поршнем 4 и преградой 1. Наиболее отчетливо Кундтовы фигуры можно наблюдать, если поршень, являющийся источником колебаний воздуха, расположен в пучности стоячей волны. При таком способе возбуждения колебаний в трубке частота колебаний поршня (или частота бегущей волны в стержне) и частота бегущей волны в воздухе, заключенном в трубке, одинаковы.

На рис. 2 показаны зависимости смещения точек среды на участке металл—воздух в трубке для последовательных моментов времени, отличающихся на $T/2$.

3. Замерив расстояние между несколькими пучностями или узлами, положение которых определено по Кундтовым фигурам, найти длину стоячей волны в воздухе $\lambda_{св}$, а затем оценить по формуле (11) и длину бегущей волны.

4. Из условия равенства частот, а следовательно, и периодов бегущих волн в стержне и воздухе найти скорость упругих волн в стержне:

$$u_M = u_B \frac{\lambda_M}{\lambda_B}$$

Скорость звука в воздухе при температуре 20°C $u_{\text{в}} \approx 340$ м/с. Измерения провести несколько раз и оценить погрешность.

Форма отчетности: Результаты всех измерений и расчетов занести в таблицу. Проанализировать полученные параметры бегущих и стоячих волн и возможные погрешности их определения. Сделать вывод по работе.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Дайте определение волны и объясните причины ее возникновения в упругой среде.
2. Что такой фронт волны и скорость ее распространения?
3. Дайте определение периода колебаний и длины волны, запишите их связь.
4. Запишите уравнение плоской монохроматической волны и объясните его.
5. Объясните причины возникновения стоячей волны и укажите условия, необходимые для того, чтобы она не затухала.
6. Что такое узел и пучность стоячей волны?
7. Запишите уравнение стоячей волны.
8. Почему в металлическом стержне возникают продольные колебания при натирании его сукном, слегка покрытым канифолью?
9. Почему одинаковы периоды (частоты) колебаний стержня и столба воздуха в трубке?

Л и т е р а т у р а

1. Ландау Л. Д., Ахиезер А. И., Лифшиц Е. М. Курс общей физики. Механика и молекулярная физика. — М.: Наука, 1965, с. 348—364.

Составитель *Александр Николаевич Первышин*

ИЗУЧЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ
МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ
СВОБОДЫ

ИЗМЕРЕНИЕ СКОРОСТИ ЗВУКА
В МЕТАЛЛИЧЕСКОМ СТЕРЖНЕ

Методические указания
к лабораторным работам № 1—18, 1—20.

Редактор Т. К. Крeт и н и н а
Техн. редактор Н. М. Каленюк
Корректор Н. С. Куприянова

Сдано в набор 10.03.83 г. Подписано в печать 15.04.83 г.
Формат 60×84 1/16. Бумага оберточная белая.
Высокая печать. Литературная гарнитура.
Усл. п. л. 0.93. Уч.-изд. л. 0.9. Тираж 2000 экз.
Заказ 239. Бесплатно.

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени
авиационный институт имени академика С. П. Королева,
г. Куйбышев, ул. Молодогвардейская, 151.