

Министерство науки , высшей школы
и технической политики Российской Федерации

Самарский государственный аэрокосмический университет
имени академика С.П.Королева

К И Н Е М А Т И К А И Д И Н А М И К А Г А З О В

Методические указания к решению задач

С а м а р а 1 9 9 3

Составители: В.В.В а с и л ь е в, В.М.Г о л о в и н,
Л.В.М о р о з о в, Г.В.Ф и л и п п о в, С.В.Ю р и н

УДК 532.526

К и н е м а т и к а и д и н а м и к а г а -
з о в: Метод.указания к решению задач / Самар. гос.
аэрокосм. ун-т. Сост. В.В.В а с и л ь е в, В.М.Г о -
л о в и н, Л.В.М о р о з о в и др. Самара, 1993.
44 с.

Приведены типовые задачи по семи разделам аэродинамики. В каждом разделе дано по меньшей мере 25 задач или вариантов, что обеспечивает индивидуальное задание каждому студенту при групповых занятиях. Тематический комплекс включает всё необходимое для решения задач: формулы, графики, таблицы.

Указания предназначены для студентов факультета летательных аппаратов и факультета эксплуатации летательных аппаратов и двигателей. Составлены на кафедре аэрогидродинамики.

Печатаются по решению редакционно-издательского совета Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С.П.Королёва.

Рецензент В.В.С а л м и н

I. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ КИНЕМАТИКИ ВОЗДУХА

Общие сведения

Ускорение—полная производная скорости по времени—определяется формулой

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}, \nabla) \vec{V} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}, \quad (I.1)$$

где $\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$ —оператор Гамильтона, \vec{V} —вектор скорости; v_x, v_y, v_z —компоненты скорости по соответствующим осям координат.

Слагаемое $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$ характеризует изменение скорости во времени в данной точке потока. В случае установившегося движения $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0$ и

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = (\vec{V}, \nabla) \vec{V}.$$

Проектируя уравнение (I.1) на ось OX, получаем

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + (\vec{V}, \nabla) v_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}.$$

Аналогичный вид имеют проекции ускорения на другие оси координат.

Линия тока—это линия, касательная к которой в данный момент времени в каждой точке совпадает по направлению с вектором скорости в той же точке.

Форма линий тока определяется уравнением

$$\vec{V} \times d\vec{r} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z},$$

где $d\vec{r} = \vec{i} dx + \vec{j} dy + \vec{k} dz$ —элемент касательной

Вихревая линия —это линия, касательная к которой в данный момент времени в каждой точке совпадает по направлению с вектором

угловой скорости вращения частицы, расположенной в той же точке.

Угловая скорость вращения частицы воздуха определяется формулой

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \left[\vec{i} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + \vec{j} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \right] = \frac{1}{2} [\nabla \times \vec{V}] =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

Уравнение вихревой линии по форме аналогично уравнению линии тока:

$$\vec{\omega} \times d\vec{z} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{dz}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dx}{\omega_z}$$

Скорость относительного изменения объёма частицы воздуха

$$\theta = \frac{1}{W} \frac{dW}{dt} \quad \text{равна дивергенции вектора скорости:}$$

$$\theta = \text{div } \vec{V}$$

При скоростях до 100 м/с воздух можно считать несжимаемым газом, тогда объём его не будет изменяться со временем и

$$\text{div } \vec{V} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (1.2)$$

Это уравнение называют уравнением неразрывности для сжимаемого газа.

В случае плоскопараллельного течения из уравнения (1.2) следует, что существует функция тока ψ , через которую компоненты скорости определяются формулами

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (1.3)$$

Расход воздуха через произвольную линию равен разности значений функции тока в её крайних точках.

Семейство линий тока описывается уравнением $\psi(x, y) = c$.

Линия тока, определяемая значением $c=0$, называется нулевой линией тока.

Из уравнения неразрывности и формул (1.3) можно выразить функцию тока и потенциал скорости через компоненты скорости:

$$\psi = \int v_x dy - \int \left[v_y + \frac{\partial}{\partial x} \int v_x dy \right] dx + c; \quad \varphi = \int v_x dx + \int \left[v_y - \frac{\partial}{\partial y} \int v_x dx \right] dy + c.$$

З а д а ч и

Задача I.1

Заданы компоненты скорости. Определить $\frac{dv_x}{dt}$, $\frac{dv_y}{dt}$, $\frac{dv_z}{dt}$, $\text{div } \vec{v}$, $\vec{\omega}$; найти уравнения линий тока и изобразить их с указанием направления движения. Изобразить вихревые линии с указанием направления вращения частиц.

Ответить на вопросы: является ли движение стационарным или нестационарным, вихревым или безвихревым, является ли среда сжимаемой или несжимаемой?

Задания

I. $v_x = -ky$ $v_y = kx$ $v_z = 0$	2. $v_x = xe^{-t}$ $v_y = -ye^{-t}$ $v_z = 0$	3. $v_x = kx + t$ $v_y = -ky + t$ $v_z = 0$	4. $v_x = (k+x)e^{-ct}$ $v_y = (k-y)e^{-ct}$ $v_z = 0$
---	---	---	--

5. $v_x = -ky/(x^2+y^2)$ $v_y = kx/(x^2+y^2)$ $v_z = 0$	6. $v_x = x \sin kt$ $v_y = -y \sin kt$ $v_z = 0$	7. $v_x = 2xy$ $v_y = x^2 - y^2$ $v_z = 0$
---	---	--

8. $v_x = 2\sqrt{x}$ $v_y = -y/\sqrt{x}$ $v_z = 0$	9. $v_x = x^2y$ $v_y = -xy^2$ $v_z = 0$	10. $v_x = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$ $v_y = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ $v_z = 0$
--	---	--

II. $v_x = e^{-t}/x$ $v_y = e^{-t}/y$ $v_z = 0$	12. $v_x = (\sin kt)/x$ $v_y = \frac{y}{x^2} \sin kt$ $v_z = 0$	13. $v_x = (\frac{1}{3}x^3 + y)e^{-pt}$ $v_y = -x^2ye^{-pt}$ $v_z = 0$
---	---	--

$$14. \begin{aligned} v_x &= 3(x^2 - y^2) \cos kt \\ v_y &= -6xy \cos kt \\ v_z &= 0 \end{aligned} \quad 15. \begin{aligned} v_x &= x + y + t \\ v_y &= x - y + t \\ v_z &= 0 \end{aligned} \quad 16. \begin{aligned} v_x &= \frac{1}{4} e^{-xy} \\ v_y &= \frac{1}{x} e^{-xy} \\ v_z &= 0 \end{aligned}$$

$$17. \begin{aligned} v_x &= \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ v_y &= -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \\ v_z &= 0 \end{aligned} \quad 18. \begin{aligned} v_x &= ky e^{-pt} \\ v_y &= 0 \\ v_z &= 0 \end{aligned} \quad 19. \begin{aligned} v_x &= 0 \\ v_y &= x + t \\ v_z &= 0 \end{aligned}$$

$$20. \begin{aligned} v_x &= 4(x^3 - 3xy^2) \\ v_y &= -12x^2y \\ v_z &= 0 \end{aligned} \quad 21. \begin{aligned} v_x &= k\sqrt{y} \\ v_y &= -k\sqrt{x} \\ v_z &= 0 \end{aligned} \quad 22. \begin{aligned} v_x &= x^3y \\ v_y &= -\frac{3}{2}x^2y^2 \\ v_z &= 0 \end{aligned}$$

$$23. \begin{aligned} v_x &= \frac{k}{y} \\ v_y &= -\frac{k}{x} \\ v_z &= 0 \end{aligned} \quad 24. \begin{aligned} v_x &= x\sqrt{y} \\ v_y &= -\frac{2}{3}y\sqrt{y} \\ v_z &= 0 \end{aligned} \quad 25. \begin{aligned} v_x &= ye^{-t^2} \\ v_y &= xe^{-t^2} \\ v_z &= 0 \end{aligned}$$

$$26. \begin{aligned} v_x &= \frac{x}{t} \\ v_y &= -\frac{y}{t} \\ v_z &= 0 \end{aligned}$$

2. ПЛОСКИЕ ПОТЕНЦИАЛЬНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ СРЕДЫ

Общие сведения

В плоском безвихревом движении идеальной несжимаемой среды выполняется: уравнение неразрывности

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

и условие отсутствия вихрей

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \quad (2.2)$$

Из уравнения (2.1) следует существование функции тока (см. тему I). Из условия (2.2) следует, что выражение $v_x dx + v_y dy$ является полным дифференциалом функции ψ , названной потенциалом скоростей. Поэтому

$$d\psi = v_x dx + v_y dy, \quad v_x = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \psi}{\partial y}.$$

С другой стороны, как известно из темы I,

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (2.3)$$

Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ v_y &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \right\} \text{с-к.} \quad (2.4)$$

Функции φ и ψ , связанные условиями (2.4) Коши-Римана, называются сопряженными гармоническими функциями. Каждая из них удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \varphi = \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad \nabla^2 \psi = \Delta \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0, \quad (2.5)$$

где $\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа.

Линейность уравнения Лапласа (2.5) позволяет использовать метод наложения потенциальных потоков. Если $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ — удовлетворяют уравнению Лапласа, т.е. $\Delta \varphi_1 = 0, \Delta \varphi_2 = 0, \dots, \Delta \varphi_n = 0$, то и их сумма $\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i$ также удовлетворяет уравнению Лапласа: $\Delta \varphi = 0$.

В результате получается картина более сложного течения. Можно подобрать такие φ_i , которые описывали бы течение около наперед заданного контура.

Выполнение условий Коши-Римана означает, что функция $w(z) = \varphi + i\psi$ комплексной переменной $z = x + iy$ является аналитической. Эта функция $w(z)$ называется комплексным потенциалом.

Значение производной $\frac{dw}{dz}$ не зависит от пути, по которому приращение стремится к нулю:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial (iy)} = v_x - iv_y.$$

Видно, что производная комплексного потенциала даёт вектор, комплексно сопряжённый с вектором физической скорости. Эту величину называют комплексной скоростью \bar{V} . В интеграле $\oint \bar{V} dz = \oint \frac{dw}{dz} dz$ действительная часть равна циркуляции, а мнимая определяет объёмный расход.

Известно, что в несжимаемых потоках идеального газа сумма давления и скоростного напора вдоль линии тока постоянна:

$$\rho + \frac{\rho V^2}{2} = \text{const.}$$

При переходе от одной линии тока к другой величина константы меняется. Однако в случае потенциального движения эта константа сохраняет своё значение во всей плоскости течения.

З а д а ч и

Задача 2.1

По заданному потенциалу скоростей или функции тока найти соответственно функцию тока или потенциал скоростей. Определить комплексный потенциал, комплексную скорость. Написать уравнения линии тока и эквипотенциальных линий и изобразить картину течения, при необходимости используя для упрощения полярные координаты. По уравнению Бернулли определить давление на заданной кривой или в точке. Исходные данные: давление и плотность во всех случаях—

$$P_1 = 101325 \text{ Па}, \quad \rho_1 = 1,225 \text{ кг/м}^3.$$

Конкретные данные для определения констант содержатся в каждом задании.

Задания к задаче 2.1

1. $\psi = ax$ Определить a , если известно, что полное давление в потоке равно 10^5 Па.
2. $\psi = by$ Найти b , если известно, что полное давление в потоке равно 10^5 Па.
3. $\psi = ax + by$ Определить a и b , если известно, что линии тока образуют с осью абсцисс угол $\alpha = 30^\circ$, а полное давление в потоке равно 10^5 Па.
4. $\psi = ay - bx$ Найти a и b , если известно, что линии тока образуют с осью абсцисс угол $\alpha = 30^\circ$, а полное давление в потоке равно 10^5 Па.
5. $\psi = A\sqrt{x^2 + y^2}$ Определить A , если известно, что на окружности $R_1 = 1\text{ м}$ $V_1 = 4\text{ м/с}$, давление и плотность p_1, ρ_1 . Найти p на окружности $R_2 = 2\text{ м}$ и вычислить массовый расход через неё.
6. $\psi = B\alpha z \text{ctg} \frac{\alpha}{2}$ Найти B , если известно, что на окружности $R_1 = 1\text{ м}$ $V_1 = 0,4\text{ м/с}$, давление и плотность p_1, ρ_1 . Вычислить p на окружности $R_2 = 2\text{ м}$ и расход Q через неё.
7. $\psi = D\alpha z \text{ctg} \frac{\alpha}{2}$ Определить D , если известно, что на окружности $R_1 = 1\text{ м}$ $V_1 = 4\text{ м/с}$, давление и плотность p_1, ρ_1 . Найти p на окружности $R_2 = 2\text{ м}$ и рассчитать циркуляционную скорости по её длине.
8. $\psi = -E\sqrt{x^2 + y^2}$ Найти E , если известно, что на окружности $R_1 = 1\text{ м}$ $V_1 = 2\sqrt{2}\text{ м/с}$ давление и плотность p_1, ρ_1 . Определить давление на окружности $R_2 = 2\text{ м}$ и рассчитать циркуляционную скорости вдоль неё.
9. $\psi = F(x^2 - y^2)$ Определить F , если известно, что на окружности $R_1 = 1\text{ м}$ $V_1 = 2\text{ м/с}$, давление и плотность p_1, ρ_1 . Определить давление p в точке $M(4, 0)$.
10. $\psi = 2Gxy$ Найти G , если известно, что на окружности $R_1 = 1\text{ м}$ $V_1 = 4\text{ м/с}$, давление и плотность p_1, ρ_1 . Определить давление в точке $M(3, 4)$.
11. $\psi = H \frac{x}{x^2 + y^2}$ Определить H , если известно, что на окружности $R_1 = 1\text{ м}$ $V_1 = 4\text{ м/с}$, давление и плотность p_1, ρ_1 . Вычислить давление в точке $M(2, 2)$.

$$12. \psi = -T \frac{y}{x^2 + y^2}$$

Найти T , если известно, что на окружности $R = 1 \text{ м}$, $V_1 = 1 \text{ м/с}$, давление и плотность ρ_1, ρ_1 . Вычислить давление на окружности $R_2 = 0,1 \text{ м}$.

$$13. \varphi = K \frac{y}{x^2 + y^2}$$

Определить K , если известно, что на окружности $R_1 = 1 \text{ м}$, $V_1 = 1 \text{ м/с}$, давление и плотность ρ_1, ρ_1 . Вычислить давление на окружности $R_2 = 0,2 \text{ м}$.

$$14. \psi = -L \frac{x}{x^2 + y^2}$$

Найти L , если известно, что на окружности $R_1 = 1 \text{ м}$, $V_1 = 2 \frac{\text{м}}{\text{с}}$, давление и плотность ρ_1, ρ_1 . Вычислить давление на окружности $R_2 = 0,15 \text{ м}$.

15. $\psi = N(x + \ln \sqrt{x^2 + y^2})$ Определить N , если в точке $M(-2, 0)$ $V_1 = 1 \text{ м/с}$, давление и плотность ρ_1, ρ_1 . Вычислить давление p на нулевой линии тока.

16. $\psi = B(y + 2a \operatorname{arctg} \frac{y}{x})$ Найти B , если в точке $M(-4, 0)$ $V_1 = 4 \text{ м/с}$, давление и плотность ρ_1, ρ_1 . Вычислить давление в критической точке, где $V = 0$.

17. $\psi = A \ln \sqrt{x^2 + y^2} + B \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ Определить A и B , если известно, что на окружности $R_1 = 1 \text{ м}$, $V_1 = 2\sqrt{2} \frac{\text{м}}{\text{с}}$, а циркуляция скорости вдоль неё $\Gamma = 4\pi$, давление ρ_1 , плотность ρ_1 . Рассчитать давление p на окружности $R_2 = 2 \text{ м}$.

18. $\psi = D \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - E \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ Определить D и E , если известно, что на окружности $R_1 = 1 \text{ м}$, $V_1 = 4\sqrt{2} \frac{\text{м}}{\text{с}}$, давление и плотность ρ_1, ρ_1 , а циркуляция скорости вдоль неё $\Gamma = 8\pi$.

19. $\psi = ax + B \frac{y}{x^2 + y^2}$ Найти A и B , если известно, что на окружности $R_1 = 2 \text{ м}$, $V_1 = 4 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ при $x=0$. При $y=0$ и $x=-2$ $V=0$, давление и плотность ρ_1, ρ_1 . Вычислить давление в точке $M(0, 2)$.

20. $\psi = Dy - E \frac{y}{x^2 + y^2}$ Определить D и E , если известно, что в точке $M(-2, 0)$ $V=0$, $\rho_M = \rho_1$, а в точке $N(0, 2)$ $V=4 \text{ м/с}$. Найти давление в точке $N(0, 2)$.

21. $\varphi = Ky + L \frac{y}{x^2 + y^2}$ Определить K и L , если известно, что в точке $M(2, 0)$ $V=8 \text{ м/с}$ давление и плотность ρ_1, ρ_1 . Рассчитать давление в точке $N(0, -2)$.

22. $\psi = -Ax + B \frac{x}{x^2 + y^2}$ Определить A и B , если известно, что в точке $M(0, -2)$ $V=0$, $\rho_M = \rho_1$. Вычислить давление в точке $N(0, 2)$.

$$23. \varphi = 3A(x^2 - y^2)$$

Определить A , если известно, что на окружности $R_1 = 0,5 \text{ м}$, $V = 6 \frac{\text{м}}{\text{с}}$. Давление и плотность ρ_1, ρ_2 . Найти давление на окружности $R_2 = 2 \text{ м}$.

$$24. \psi = 6Bxy$$

Определить B , если известно, что на окружности $R_1 = 1 \text{ м}$ давление и плотность ρ_1, ρ_2 . Циркуляция скорости вдоль неё $|\Gamma| = 24 \text{ м}^2/\text{с}$. Рассчитать давление на окружности $R_2 = 2 \text{ м}$.

$$25. \varphi = A\left(x + \frac{4x}{x^2 + y^2}\right) + B \arctg \frac{y}{x}$$

Найти A и B , если известно, что циркуляция скорости на окружности $R_1 = 2 \text{ м}$, $|\Gamma| = 8 \pi$, скорость в точке $M(0, -2)$ $V_1 = 8 \text{ м/с}$, давление p_1 , плотность ρ_1 . Найти давление в точке $N(2, 0)$.

$$26. \varphi = By + 16B \frac{y}{x^2 + y^2} - 2B \ln \sqrt{x^2 + y^2}$$

Найти B и D , если известно, что циркуляция скорости на окружности $R_1 = 4 \text{ м}$, $|\Gamma| = 16 \pi$, скорость в точке $M(0, -4)$ $V_1 = 16 \text{ м/с}$, давление и плотность ρ_1, ρ_2 . Рассчитать давление в точке $N(4, 0)$.

Задача 2.2

Исследовать потенциальное течение, найти φ и ψ , определить линии тока, найти критические точки ($v_x=0, v_y=0$), выделить нулевую линию тока, найти скорость в точках с заданными координатами x, y (по указанию преподавателя).

Течение является результатом наложения потенциальных течений с комплексными потенциалами.

Задания к задаче 2.2

1. $w_1 = 2Z, w_2 = 3\ln Z$ 2. $w_1 = -iZ, w_2 = 2\ln Z$

3. $w_1 = 2\ln Z, w_2 = 2i\ln Z$ 4. $w_1 = 2iZ, w_2 = 3Z$

5. $w_1 = 2Z, w_2 = \frac{1}{Z}$

6. $w_1 = 8Z, w_2 = \frac{2}{Z} + w_3 = i\ln Z$

7. $w_1 = 5iZ, w_2 = 3\ln(Z-2)$

8. $w_1 = 7Z, w_2 = 2\ln(Z-3i)$

9. $w_1 = 3iZ, w_2 = 2\ln(Z+2i)$

10. $w_1 = 4iZ, w_2 = 2Z$ II. $w_1 = 3Z, w_2 = 4/Z$

12. $w_1 = 4/Z, w_2 = 2Z, w_3 = 2i\ln Z$

13. $w_1 = 2/Z, w_2 = 2Z$

14. $w_1 = 10Z, w_2 = (5+3i)Z$

15. $w_1 = -2\ln Z, w_2 = 3Z$

16. $w_1 = -Z, w_2 = \ln Z$

17. $w_1 = 2Z, w_2 = 3Z, w_3 = 1/Z$

18. $w_1 = -2Z, w_2 = 5Z, w_3 = 2/Z$

19. $w_1 = 2Z, w_2 = 4\ln Z$

20. $w_1 = -3iZ, w_2 = 2\ln Z$

21. $w_1 = \ln Z, w_2 = i\ln Z$

22. $w_1 = (2+3i)Z, w_2 = (1-2i)Z$

23. $w_1 = 2\ln Z, w_2 = Z, w_3 = 3\ln Z$

24. $w_1 = 2/Z, w_2 = 2Z, w_3 = 3/Z$

25. $w_1 = 2Z, w_2 = 3\ln Z, w_3 = -iZ$

3. УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛИ. КОЭФФИЦИЕНТ ДАВЛЕНИЯ

Общие сведения

Уравнение Бернулли является общим интегралом уравнений установившегося движения идеального газа. Для несжимаемого газа оно имеет вид

$$p + \frac{\rho V^2}{2} = c. \quad (3.1)$$

Константу в общем случае определяют для каждой линии тока. В случае потенциального течения константа одинакова для всех линий тока. Её величину обычно определяют по условиям, характеризующим невозмущённый поток (на бесконечности):

$$c = p_{\infty} + \frac{\rho_{\infty} V_{\infty}^2}{2}.$$

Комплекс $\frac{\rho V^2}{2}$ называют скоростным напором и обозначают буквой q . Тогда уравнение (3.1) можно записать в краткой форме:

$$p + q = c,$$

т.е. сумма давления и скоростного напора вдоль линии тока не изменяется.

Коэффициентом давления C_p называют отношение избыточного давления в рассматриваемой точке к скоростному напору невозмущённого потока:

$$C_p = \frac{p - p_{\infty}}{q_{\infty}}.$$

Задачи

3.1. У самолёта, летящего на высоте h , коэффициент давления в некоторой точке верхней поверхности крыла C_p .

Найти величину давления в критической точке (табл. 3.1).

3.2. В аэродинамической трубе давление в рабочей части p_{∞} , в коллекторе p_k . Найти скорость потока в рабочей части. Степень поджатия принять равной n . Температура воздуха T_a , атмосферное давление p_a (табл. 3.2).

3.3. Скорость потока в рабочей части аэродинамической трубы V . Атмосферное давление и температура равны соответственно p_a, T_a . Определить показания водяного U -образного вертикального манометра, измеряющего давления, передаваемые от отверстий полного и статического давления скоростного насадка (табл. 3.3).

Т а б л и ц а 3.1

Данные к задаче 3.1

Исходные данные	Номер варианта									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
h , км	0	8	9	10	7	11	12	0	1	9
$-c_p$	1,4	1,5	1,6	1,8	2,0	2,1	2,2	2,5	1,7	2,3

Т а б л и ц а 3.2

Данные к задаче 3.2

Исходные данные	Номер варианта									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_{∞} , м H_2O	9,0	8,0	8,5	8,2	8,3	8,1	8,6	8,7	8,8	8,0
p_k , м H_2O	9,060	8,120	8,650	8,3	8,4	8,15	8,62	8,71	8,815	8,08
n	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0	5,8	5,4	4,8	6,2	6,0
t , °C	20	25	22	21	20	23	24	25	26	23
p_a , мм Hg	740	750	760	745	755	765	770	735	760	750

Таблица 3.3

Данные к задаче 3.3

Исходные данные	Номер варианта									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$V, \text{ м/с}$	30	35	40	45	50	60	65	50	40	45
$R_a, \text{ мм Нг}$	740	760	745	750	755	765	770	760	765	750
$t, \text{ }^\circ\text{C}$	20	22	24	26	21	23	25	24	22	23

4. АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ

Общие сведения

Г. Аэродинамические коэффициенты. Коэффициентом полной аэродинамической силы R_a называют её отношение к произведению скоростного напора q на характерную площадь летательного аппарата S :

$$C_{Ra} = \frac{R_a}{q S}, \quad q = \frac{\rho V^2}{2}$$

Для крыла, оперения и т.п. за характерную площадь принимают площадь в плане. Для фюзеляжа, гондол двигателей, гондол шасси, подвесных устройств и т.п. — площадь миделя (наибольшего сечения нормального к оси части самолёта). Для самолёта в целом — площадь крыла (включая его подфюзеляжную часть).

Коэффициентом аэродинамического момента называют отношение

аэродинамического момента M к произведению скоростного напора q на характерную площадь S и на характерный линейный размер L :

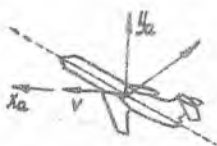
$$m = \frac{M}{qSL}.$$

За характерный линейный размер принимают размах крыла l или среднюю аэродинамическую хорду b_a (см. ниже).

2. Оси координат. В аэродинамике обычно используют связанную и скоростную системы координат. Обе системы декартовы, правые. Начало координат обычно совмещают с центром масс самолёта (рис. 4.1) :



а



б

Р и с. 4.1. Связанная (а) и скоростная (б) системы координат

OX - продольная ось (направлена по оси самолета или хорде);

OY - нормальная ось (лежит в базовой плоскости);

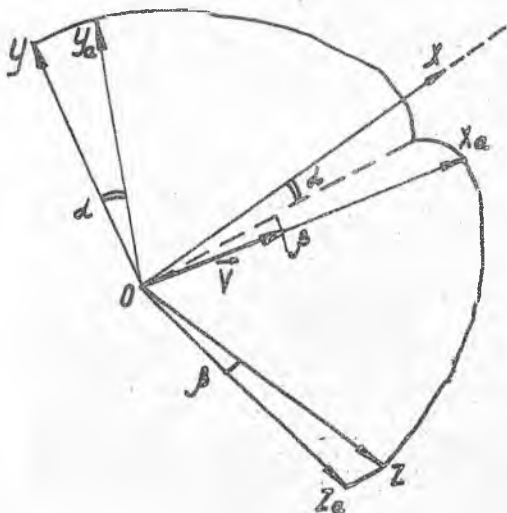
OZ - поперечная ось;

OX_a - скоростная ось (направлена по скорости ДА);

OY_a - ось подъемной силы;

OZ_a - боковая ось.

Угол между продольной осью Ox и проекцией скорости La (летательного аппарата) на плоскость XOY связанной системы координат называют углом атаки α (рис. 4.2).



Р и с. 4.2 Углы между скоростной и связанной системами координат

Угол между направлением скорости La и плоскостью OXY связанной системы координат называют углом скольжения β (см рис. 4.2).

Проекции вектора полной аэродинамической силы на оси координат называют в основном так же, как и оси координат.

В связанной системе координат:

X - продольная сила;

Y - нормальная сила;

Z - поперечная сила.

В скоростной системе координат:

X_a - сила лобового сопротивления;

Y_a - подъемная сила;

Z_a - боковая сила.

Силу лобового сопротивления и продольную силу считают положительными, если они направлены против положительного направления осей OX и OX_2 соответственно.

Коэффициентом любой составляющей аэродинамической силы называют отношение этой составляющей к произведению скоростного напора на характерную площадь. Например: коэффициент лобового сопротивления

$$C_{xa} = \frac{X_a}{qS}$$

Составляющие аэродинамического момента в связанной системе координат называют так: относительно оси OX —момент крена, OY —момент рыскания, OZ —момент тангажа и обозначают m_x, m_y, m_z соответственно.

Коэффициент любой составляющей аэродинамического момента представляет собой отношение этой составляющей к произведению скоростного напора на характерную площадь и характерный линейный размер. За характерный линейный размер принимают: для составляющих m_x, m_y — размах крыльев, для составляющей m_z — среднюю аэродинамическую хорду. Например:

коэффициент момента крена —

$$m_x = \frac{M_x}{qSb}$$

коэффициент момента тангажа—

$$m_z = \frac{M_z}{qSb_A}$$

Термины для составляющих аэродинамического момента и их коэффициентов в скоростной системе координат образуются добавлением к данному термину слов "в скоростной системе координат"; соответственно буквенные обозначения образуются добавлением к букве M (или m) индекса соответствующей оси. Например: M_{za} — момент тангажа в скоростной системе координат, m_{ya} — коэффициент момента рыскания в скоростной системе координат. Переход от одной системы к другой при определении коэффициентов аэродинамических сил в случае полёта без скольжения ($\beta = 0$) осуществляет по формулам:

$$C_x = C_{xa} \cos \alpha - C_{ya} \sin \alpha;$$

$$C_y = C_{ya} \cos \alpha + C_{xa} \sin \alpha.$$

При малых углах атаки ($\alpha < 15^\circ$)

$$C_x \approx C_{xa} - C_{ya} \alpha; C_y \approx C_{ya}.$$

Угол атаки α здесь берут в радианах.

Задачи

- 4.1. Найти m_x самолёта, если известно: $M_x = 3 \cdot 10^4$ Н.м, число маха равно 0,4; высота полёта $h = 2$ км, площадь крыла 200 м², размах крыла 40 м.
- 4.2. Момент крена в скоростной системе координат равен $5 \cdot 10^6$ Н.м. Определить коэффициент этого момента, если известно: $M = 0,5$, $h = 1$ км, площадь крыла 145 м², размах крыла 36 м.
- 4.3. Подъёмная сила самолёта $5 \cdot 10^5$ Н, сила лобового сопротивления $5 \cdot 10^4$ Н, угол атаки 5° , угол скольжения равен нулю. Найти продольную и нормальную силы.
- 4.4. Дано: $C_{xa} = 0,02$, $C_{ya} = 1,2$, $\alpha = 15^\circ$, $\beta = 0^\circ$. Найти: C_x и C_y . Дать полное наименование всех этих величин.
- 4.5. Дано $C_{xa} = 0,04$, $C_{ya} = 0,5$, $\alpha = 10^\circ$, $\beta = 0^\circ$. Найти C_x и C_y . Дать полное наименование всех этих величин.
- 4.6. Фюзеляж самолёта имеет длину 40 м, диаметр 4 м. Для него $C_{xa} = 0,08$, высота полёта $5,5$ км, число маха $0,6$. Вычислить силу лобового сопротивления фюзеляжа.
- 4.7. Дано: $X = 3 \cdot 10^4$ Н, $Y = 4 \cdot 10^5$ Н, $\alpha = 3^\circ$, $\beta = 0$. Найти Y_a и X_a . Назвать эти силы.
- 4.8. В эксперименте измерено: $M_{xa} = 10^3$ Н.м. Определить натурное значение M_{xa} , если известно: масштаб модели $1:8$, число M полёта и потока в аэродинамической трубе одинаковы ($0,8$), высота полёта 4 км, характерная площадь натурального объекта 50 м².
- 4.9. По продувкам в аэродинамической трубе сила лобового сопротивления модели самолёта 300 Н. Масштаб модели $1:5$, скорость 30% натурной. Определить силу лобового сопротивления самолёта, летящего на высоте 4 км, $M = 0,2$, площадь крыла 30 м², хорда крыла 2 м, диаметр фюзеляжа $1:5$ м.
- 4.10. $Y_a = 5 \cdot 10^5$ Н, число маха $1,5$, высота полёта $h = 8$ км, площадь крыла 40 м², площадь миделя самолёта 4 м². Вычислить C_{ya} . Назвать силу и коэффициент. Как направлена Y_a , если самолёт летит под углом к горизонту, равным 30° ?
- 4.11. $Y_a = 4 \cdot 10^5$ Н, число маха $1,5$, высота полёта 10 км, характерная площадь 100 м². Вычислить C_{ya} . Назвать Y_a и C_{ya} .

- 4.12. Масса горизонтально летящего самолёта 80 т, скорость 820 км/ч, высота полёта 9 км, площадь крыла 130 м², площадь миделя фюзеляжа 8 м². Какова будет величина подъёмной силы, действующей на динамически подобную модель, изготовленную в масштабе 1:10? Модельная скорость равна натурной.
- 4.13. Известен момент рыскания самолёта - $3 \cdot 10^4$ Н·м. Найти его коэффициент, если известно: $M=0,5$, высота полёта 3 км, площадь в плане 42 м², размах крыла 24 м.
- 4.14. Коэффициент подъёмной силы равен 0,2. Определить подъёмную силу самолёта при $M=2$, $h = 10$ км, площади крыла 50 м².
- 4.15. Дано: $m_{za} = -0,03$. Найти M_{za} при $M=0,7$; $h = 9$ км. Площадь крыла 35 м², длина самолёта 20 м, хорда крыла 2 м. Указать движение самолёта под действием указанного M_{za} .
- 4.16. В продувках в аэродинамической трубе модели самолёта, изготовленной в масштабе 1:6, при скорости 0,25 от скорости полёта самолёта известна сила лобового сопротивления: 1000 Н. Вычислить эту силу, действующую на самолёт в полёте при скорости 500 км/ч, $h = 5$ км. Площадь крыла 60 м².
- 4.17. Подъёмная сила модели самолёта, масштаб которой 1:5, равна 800 Н. Модельная скорость вдвое меньше натурной. Число Маха полёта самолёта равно 0,2. Характерная площадь 40 м², высота полёта 3 км. Определить подъёмную силу самолёта.
- 4.18. Скоростной момент рыскания равен $2 \cdot 10^5$ Н·м. Определить его коэффициент, если задано: $M=2$, $h = 15$ км, $S = 360$ м², $b_A = 3$ м, $l = 25$ м.

5. ИЗОЭНТРОПИЧЕСКИЕ ТЕЧЕНИЯ

Общие сведения

Изоэнтропическим называется течение, в котором энтропия не изменяется:

$$ds=0, \quad s=const.$$

Плотность и давление при изоэнтропическом процессе связаны

соотношением

$$\frac{p}{\rho^{\kappa}} = \text{const.}$$

Скорость звука a может быть рассчитана по формуле

$$a = \sqrt{\kappa RT} = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho}}.$$

Для воздуха $\kappa = 1,4$; $R = 287$ Дж/кг·К, следовательно,

$$a = 20,1\sqrt{T}.$$

Уравнение энергии для изоэнтропического течения имеет вид

$$\frac{V^2}{2} + i = i_0, \quad (5.1)$$

где V — скорость потока, i — энтальпия потока, i_0 — энтальпия заторможенного потока.

Параметрами торможения называют параметры газа в той точке, где поток изоэнтропически затормаживается до скорости, равной нулю. Их принято обозначать $p_0, \rho_0, T_0, a_0, i_0$. Давление p_0 называют полным давлением.

Значение энтальпии можно выразить через термодинамические параметры:

$$i = \frac{a^2}{\kappa - 1} = \frac{\kappa}{\kappa - 1} RT = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p}{\rho}.$$

Из уравнения (5.1) следует, что при уменьшении энтальпии скорость увеличивается. При $i = 0$ скорость становится максимальной:

$$V_{\text{max}} = \sqrt{2i_0} = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa - 1} RT_0}.$$

Отношение скорости течения газа V в данной точке потока к скорости звука в этой же точке называется числом Маха:

$$M = \frac{V}{a}.$$

Если местная скорость меньше скорости звука, $V < a$ ($M < 1$), то течение называется дозвуковым; если $V > a$ ($M > 1$) — сверхзвуковым; если $V = a$ ($M = 1$) — звуковым. Значения газодинамических переменных при $M = 1$ называются критическими и обозначаются p_*, ρ_*, T_*, a_* . Они связаны с соответствующими параметрами торможения соотношениями

$$T_* = \frac{2}{\kappa + 1} T_0, \quad p_* = \left(\frac{2}{\kappa + 1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} p_0, \quad \rho_* = \left(\frac{2}{\kappa + 1}\right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} \rho_0.$$

Для воздуха $\gamma = 1,4$, следовательно,

$$\frac{T_x}{T_0} = 0,831, \quad \frac{p_x}{p_0} = 0,528, \quad \frac{\rho_x}{\rho_0} = 0,636.$$

Критическая скорость звука может быть рассчитана по приближенной формуле

$$a_* = 18,3\sqrt{T_0}.$$

К газодинамическим функциям относится также и "функция приведенного расхода":

$$\begin{aligned} q &= \frac{\rho V}{\rho_* V_*} = \frac{F}{F_*} = M \left[\frac{\gamma+1}{2+(\gamma-1)M^2} \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} = \\ &= \lambda \left[\frac{\gamma+1}{2} \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \lambda^2 \right) \right]^{\frac{1}{\gamma-1}}. \end{aligned}$$

Здесь λ - приведенная скорость, равная отношению местной скорости к критической скорости звука:

$$\lambda = \frac{V}{a_*}.$$

Приведенная скорость λ и число Маха в данной точке связаны соотношением

$$\lambda^2 = \frac{(\gamma+1)M^2}{2+(\gamma-1)M^2}. \quad (5.2)$$

Приведенная скорость имеет предельное значение

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \lambda = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} = \lambda_m;$$

для воздуха $\lambda_m = \sqrt{5}$.

Зависимости параметров потока газа (p, ρ, T) от числа Маха (или от приведенной скорости) и от параметров торможения (p_0, ρ_0, T_0) называется газодинамическими функциями:

$$\tau = \frac{T}{T_0} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{-1} = 1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \lambda^2,$$

$$\kappa = \frac{p}{p_0} = \left(1 + \frac{\alpha-1}{2} M^2\right)^{-\frac{\alpha}{\alpha-1}} = \left(1 - \frac{\alpha-1}{\alpha+1} \lambda^2\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}},$$

$$\varepsilon = \frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 + \frac{\alpha-1}{2} M^2\right)^{-\frac{1}{\alpha-1}} = \left(1 - \frac{\alpha-1}{\alpha+1} \lambda^2\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}.$$

Значения этих функций приведены в табл.5.1.



Р и с .5.1. Обтекание выпуклого угла сверхзвуковым потоком

При обтекании сверхзвуковым потоком тупого угла (рис. 5.1) происходит расширение газа, понижение в нем давления, температуры, плотности и увеличение скорости. Такое плоскопараллельное изоэнтропическое течение называется течением Прандтля-Майера. Для него справедливы все формулы, приведенные ранее. Область, заключенная между линия-

ми Маха, называется центрированной волной разрежения. В этой области происходит расширение газа, газодинамические параметры в ней постоянны вдоль каждого луча ОС.

Если поток газа до расширения имеет звуковую скорость $V=a$, т.е. $M=1$, то в этом случае угол поворота в волне обозначают θ_* и он связан с числом Маха потока после поворота M соотношением

$$\theta_* = \lambda a \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{M^2-1}}{\lambda} - a \operatorname{arctg} \sqrt{M-1}, \quad (5.3)$$

где λ определяется соотношением (5.2).

Полагая в (5.2) $M \rightarrow \infty$, получим угол θ_{*max} , на который способен повернуться в волне расширения поток газа, имеющий до поворота начальное число Маха $M=1$:

$$\theta_{*max} = (\lambda_m - 1) \frac{\pi}{2}.$$

Для воздуха $\alpha = 1,4$, следовательно,

$$\theta_{*max} = 130,4^\circ.$$

Если поток газа до расширения имеет сверхзвуковую скорость, то при решении задач удобно считать, что звуковой ($M = 1$) поток газа разогнался до этой скорости во время некоторого фиктивного поворота на угол θ_{φ} . Угол θ_{φ} определяется также по формуле (5.3) или таблице (5.1).

Для определения числа M_2 после поворота полагают, что звуковой поток ($M = 1$) поворачивается на полный угол

$$\theta_{\Pi} = \theta_{\varphi} + \theta.$$

Угол δ_* , определяющий центрированную волну расширения звукового потока, определяется по формуле

$$\delta_* = \lambda_m \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{M^2 - 1}{\lambda_m}}.$$

Угол δ , занятый волной расширения при сверхзвуковом потоке, можно найти как разность соответствующих значений δ_* :

$$\delta = \delta_*(M_2) - \delta_*(M_1),$$

где $\delta_*(M_2)$ и $\delta_*(M_1)$ вычисляются по формуле (5.2) для чисел Маха M_1 до поворота и M_2 после поворота соответственно или по таблице газодинамических функций (табл.5.1).

Т а б л и ц а 5.1

θ_*	δ_*	M	$\bar{\rho} = \rho/\rho_0$	$\bar{\varepsilon} = \rho/\rho_0$	$\bar{\tau} = T/T_0$
0°00'	0°00'	1,000	0,528	0,634	0,833
0°30'	18°24'	1,051	0,497	0,607	0,819
1°00'	23°32'	1,083	0,479	0,591	0,890
2°00'	30°00'	1,133	0,450	0,565	0,796
3°00'	34°34'	1,178	0,424	0,542	0,783
4°00'	38°52'	1,219	0,402	0,522	0,771
5°	42°18'	1,257	0,383	0,504	0,760
10°	55°50'	1,435	0,299	0,422	0,708
15°	66°24'	1,603	0,234	0,354	0,660
20°	75°42'	1,775	0,181	0,295	0,613
25°	84°10'	1,951	0,138	0,243	0,563
30°	92°00'	2,130	0,1040	0,198	0,523

θ_*	δ_*	M	$\bar{\pi} = p/p_0$	$\bar{\varepsilon} = p/p_0$	$\bar{\tau} = T/T_0$
35°	99°33'	2,327	0,0764	0,159	0,480
40°	106°48'	2,539	0,0552	0,126	0,437
45°	113°48'	2,765	0,0388	0,098	0,395
50°	120°36'	3,010	0,0267	0,075	0,355
55°	127°18'	3,289	0,0178	0,056	0,316
60°	133°54'	3,606	0,0115	0,041	0,279
65°	140°20'	3,999	0,712 · 10 ⁻²	0,029	0,244
70°	146°42'	4,348	0,426	0,0203	0,210
75°	153°00'	4,810	0,241	0,0135	0,179
80°	159°15'	5,362	0,126	0,851 · 10 ⁻²	0,149
85°	165°27'	6,028	0,631 · 10 ⁻³	0,518	0,122
90°	171°36'	6,845	0,285	0,294	0,097
95°	177°40'	7,837	0,114	0,153	0,075
100°	183°48'	9,259	0,403 · 10 ⁻⁴	0,726 · 10 ⁻³	0,055
105°	189°48'	11,037	0,118	0,302	0,039
130°27'	220°27'	∞	0	0	0

З а д а ч и

Задача 5.1

Определить число Маха полёта самолёта, если статическое давление потока ρ_∞ , а давление в критической точке ρ_0 . Значения ρ_0 и ρ_∞ для различных вариантов задания приведены в табл. 5.2.

Т а б л и ц а 5.2

Номер варианта :	$\rho_\infty, Па$:	$\rho_0, Па$
I	I9390		42965
2	I9390		55058
3	I9390		71827
4	I9390		94920
5	I9390		I26520
6	IOI325		I873I7
7	IOI325		228289
8	IOI325		283093
9	IOI325		355894
IO	IOI325		452082
II	3079I		65522
I2	3079I		83052
I3	3079I		I07I72
I4	3079I		I40I32
I5	3079I		I84900
I6	2649I		57495
I7	2649I		73268
I8	2649I		95054
I9	2649I		I24937
20	2649I		I65674
2I	22690		50294
22	22690		64455
23	22690		84095
24	22690		IIII42
25	22690		I48I54

Задача 5.2

Самолёт летит на высоте h со скоростью V . Значения скорости и высоты для различных вариантов задания приведены в табл.5.3.

1. Определить давление в критической точке.
2. На сколько градусов нагревается воздух в критической точке?
3. Чему равна критическая скорость полёта?
4. Какое показание будет на указателе скорости, если шкала градуирована для полёта на нулевой высоте без учёта сжимаемости?
5. Чему равно число Маха полёта?
6. Чему равен коэффициент скорости?

Т а б л и ц а 5.3

Номер варианта	Высота h , км	Скорость V , км/час
I	0	I200
2	0	I400
3	0	I600
4	0	I800
5	0	2000
6	9	I200
7	9	I400
8	9	I600
9	9	I800
10	9	2000
II	10	I200
12	10	I400
13	10	I600
14	10	I800
15	10	2000
16	II	I200
17	II	I400
18	II	I600
19	II	I800
20	II	2000
21	I2	I200
22	I2	I400
23	I2	I600
24	I2	I800
25	I2	2000

Задача 5.3

Сверхзвуковой воздушный поток, обтекая выпуклый угол АОВ (см. рис.5.1) поворачивается на угол θ . До поворота поток движется параллельно стенке АО с параметрами ρ_1 , T_1 , V_1 , значения которых приведены в табл. 5.4. Найти давление P_2 , температуру T_2 , скорость V_2 , число Маха M_2 потока после поворота.

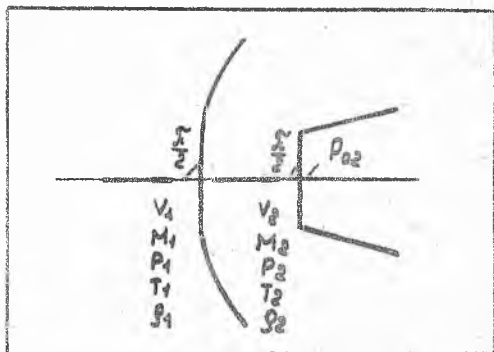
Т а б л и ц а 5.4

Номер варианта	ρ_1 , Па	T_1 , К	V , м/с	θ , град
I	19390	216,66	370,9	5,0
2	19390	216,66	423,42	10,0
3	19390	216,66	473,0	15
4	19390	216,66	523,75	20
5	19390	216,66	575,68	25
6	101325	288,15	427,73	5
7	101325	288,15	488,30	10
8	101325	288,15	545,47	15
9	101325	288,15	604,0	20
10	101325	288,15	663,89	25
11	30791	229,64	381,85	5
12	30791	229,64	435,92	10
13	30791	229,64	486,96	15
14	30791	229,64	539,21	20
15	30791	229,64	592,67	25
16	26491	223,15	376,41	5
17	26491	223,15	429,71	10
18	26491	223,15	480,02	15
19	26491	223,15	531,52	20
20	26491	223,15	584,23	25
21	22690	249,13	397,73	5
22	22690	249,13	454,05	10
23	22690	249,13	507,20	15
24	22690	249,13	561,62	20
25	22690	249,13	617,32	25

6. ПРЯМОЙ СКАЧОК УПЛОТНЕНИЯ

Общие сведения

Прямой скачок уплотнения возникает перед поверхностью летательного аппарата, ортогональной вектору скорости набегающего потока воздуха (рис. 6.1).



Р и с . 6.1 Скачок уплотнения перед телом со срезанным носком

Параметры газовой среды — плотность ρ_1 и ρ_2 , температура T_1 и T_2 , давление p_1 и p_2 , скорость V_1 и V_2 , определяемые соответственно перед скачком и после него, связаны соотношениями:

уравнением неразрывности

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2;$$

уравнением изменения количества движения

$$\rho_1 V_1 (V_1 - V_2) = p_2 - p_1;$$

уравнением состояния

$$p_1 = \rho_1 R T_1, \quad p_2 = \rho_2 R T_2;$$

уравнением энергии

$$\frac{\kappa}{\kappa-1} R T_1 + \frac{V_1^2}{2} = \frac{\kappa}{\kappa-1} R T_2 + \frac{V_2^2}{2},$$

где R — газовая постоянная, κ — показатель адиабаты.

Основное соотношение теории прямого скачка имеет вид

$$V_1 V_2 = a_*^2, \quad a_*^2 = \frac{2\kappa}{\kappa+1} R T_0,$$

где T_0 — температура торможения.

Число Маха M_1 и M_2 связаны соотношением

$$M_2^2 = \frac{1 + \frac{\kappa-1}{2} M_1^2}{\kappa M_1^2 - \frac{\kappa-1}{2}}.$$

Плотности, температуры и статистические давления на скачке определяются по формулам

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\alpha+1)M_1^2}{2+(\alpha-1)M_1^2}, \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{2\alpha}{\alpha+1}M_1^2 - \frac{\alpha-1}{\alpha+1}, \quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{2\alpha}{\alpha+1}M_1^2 - \frac{\alpha-1}{\alpha+1} \right) \left[\frac{2+(\alpha-1)M_1^2}{(\alpha+1)M_1^2} \right].$$

Отношение давления торможения p_{02} к статическому давлению до скачка p_1 определяется формулой Релея через число Маха M_1 до скачка

$$\frac{p_{02}}{p_1} = \frac{\alpha-1}{\alpha+1} \left[\frac{(\alpha+1)^2}{2(\alpha-1)} \right]^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \frac{M_1^2}{\left(\frac{2\alpha}{\alpha-1} - \frac{1}{M_1^2} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}}}.$$

Коэффициент восстановления давления σ представляет собой отношение давления торможения за скачком p_{02} к давлению торможения p_{01} в предположении изэнтропического торможения. Он характеризует собой необратимые потери механической энергии на скачке

$$\sigma = \frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{p_{02}}{p_1} \frac{p_1}{p_{01}};$$

$$\frac{p_{01}}{p_1} = \left(1 + \frac{\alpha-1}{2} M_1^2 \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}};$$

$$\sigma = \left[\frac{2}{(\alpha+1)M_1^2} + \frac{\alpha-1}{\alpha-1} \right]^{-\frac{\alpha}{\alpha-1}} \left(\frac{2\alpha}{\alpha+1} M_1^2 - \frac{\alpha-1}{\alpha+1} \right)^{-\frac{1}{\alpha-1}}.$$

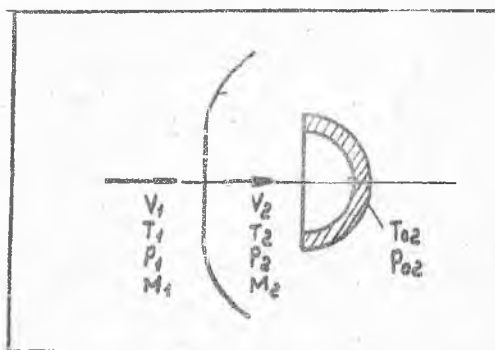
Для воздуха ($\alpha = 1,4$) выражения $\frac{p_{02}}{p_1}$ и σ принимают более простой вид:

$$\frac{p_{02}}{p_1} = 166,7 \frac{M_1^2}{\left(7 - \frac{1}{M_1^2} \right)^{2,5}},$$

$$\sigma = \frac{166,7 M_1^2}{\left(7 - \frac{1}{M_1^2} \right)^{2,5} (1 + 0,2 M_1^2)^{3,5}}.$$

Задачи

Задача 6.1



Р и с.6.2. Скачок уплотнения перед вогнутой полусферой

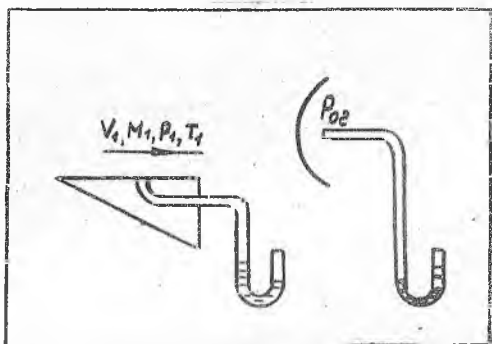
Полусфера находится в сверхзвуковом потоке воздуха (рис.6.2). Определить один параметр газового потока по заданным другим параметрам (табл.6.1.)

Т а б л и ц а 6.1

Номер варианта	V_1	V_2	T_1	T_2	M_1	M_2	P_2	P_{02}	T_{02}
1		280м/с	?						77°C
2	400м/с	300м/с	?						
3			20°C	?	1,5				
4	350м/с		55°C			?			
5					?		5кгс/см ²	5кгс/см ²	
6	700м/с					?			50°C
7	500м/с		100°C				5кгс/см ²	?	
8			70°C		2,5				?
9			?	10°C	4,0				
10		?				1,2			100°C

Задача 6.2

Датчик полного напора и клин находятся в сверхзвуковом потоке воздуха (рис.6.3). Определить соотношения между параметрами газа, измеряемыми на поверхности клина и датчика полного давления (табл.6.2).



Р и с.6.3. Датчик полного напора и клин в сверхзвуковом потоке

Т а б л и ц а 6.2

Номер варианта	M_1	V_1	T_1	ρ_1	ρ_{01}	$\frac{\rho_{02}}{\rho_1}$	ρ_{02}	σ
1						12		?
2	1,5							?
3		$500 \frac{m}{c}$	$40^\circ C$?
4	2			$4 \frac{kg}{cm^3}$?	
5				$2 \frac{kg}{cm^3}$?		$6 \frac{kg}{cm^3}$	
6				$1,2 \frac{kg}{cm^3}$	$1,8 \frac{kg}{cm^3}$?	
7	3			$2,5 \frac{kg}{cm^3}$?

Задача 6.3

Определить параметры газа в камере ВРД самолёта, летящего на высоте h со скоростью V_1 , при наличии прямого скачка на входе и давление p_{01} , которое получилось бы в камере, если бы торможение было изэнтропическим.

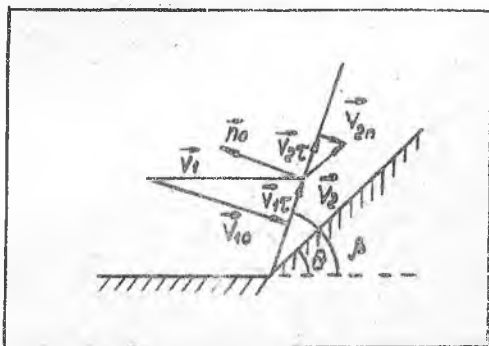
Т а б л и ц а 6.3

Номер варианта	h	V_1	σ	p_1	M_1	V_2	p_2	p_{02}	p_{01}	M_2	T_2
1	10км	2160 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$?					?	?		
2	9км	2000 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$?				
3	7км	1800 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$?
4	5км	2200 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$?	
5	?	?	0,8		?						
6	12км	?			?						
7				$1,5 \frac{\text{кгс}}{\text{см}^2}$?			$2 \frac{\text{кгс}}{\text{см}^2}$			
8	11км	2400 $\frac{\text{км}}{\text{ч}}$?					

7. КОСОЙ СКАЧОК УПЛОТНЕНИЯ

Общие сведения

Косым скачком уплотнения является плоская поверхность разрыва параметров в газовом потоке, нормаль которой не совпадает с вектором скорости невозмущенного потока (рис. 7.1). Скорость потока при переходе через косой скачок меняется по величине и по направлению.



Р и с. 7.1 Косой скачок уплотнения, возникающий при обтекании вогнутого угла сверхзвуковым потоком

Параметры газа до скачка — плотность ρ_1 , нормальная составляющая вектора скорости V_{1n} и давление p_1 — связаны с соответствующими параметрами после скачка ρ_2 , V_{2n} и p_2 соотношениями: уравнением сохранения массы

$$\rho_1 V_{1n} = \rho_2 V_{2n};$$

уравнением изменения количества движения

$$\rho_1 V_{1n} (V_{1n} - V_{2n}) = p_2 - p_1.$$

Характерной особенностью косого скачка является равенство касательных составляющих векторов скоростей до и после скачка

$$V_{\tau} = V_{2\tau} = V_{\tau}$$

Температура газа до скачка T_I , нормальная V_{In} и касательная V_{τ} составляющие скорости связаны с соответствующими параметрами после скачка T_2 , V_{2n} и V_{τ} уравнением энергии

$$\frac{\alpha}{\alpha-1} RT_I + \frac{V_{In}^2}{2} = \frac{\alpha}{\alpha-1} RT_2 + \frac{V_{2n}^2}{2} = \frac{\alpha}{\alpha-1} RT_0 - \frac{V_{\tau}^2}{2},$$

где T_0 - температура торможения.

Основным соотношением косого скачка является выражение

$$V_{In} V_{2n} = a_{2n}^2, \quad a_{2n}^2 = a_1^2 - \frac{\alpha-1}{\alpha+1} V_{\tau}^2, \quad a_1^2 = \frac{2\alpha}{\alpha+1} RT_0.$$

Угол отклонения потока на скачке θ определяется углом наклона фронта скачка к скорости невозмущенного потока β и числом Маха невозмущенного потока M_I

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{ctg} \beta \frac{M_I^2 \sin^2 \beta - 1}{1 - M_I^2 \left(\frac{\alpha+1}{2} - \sin^2 \beta \right)}.$$

Отношения давлений, плотности и температур после скачка и до скачка определяются выражениями

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{2\alpha}{\alpha+1} M_I^2 \sin^2 \beta - \frac{\alpha-1}{\alpha+1},$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\alpha+1) M_I^2 \sin^2 \beta}{2 + (\alpha-1) M_I^2 \sin^2 \beta},$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{2\alpha}{\alpha+1} M_I^2 \sin^2 \beta - \frac{\alpha-1}{\alpha+1} \right) \left[\frac{2 + (\alpha-1) M_I^2 \sin^2 \beta}{(\alpha+1) M_I^2 \sin^2 \beta} \right].$$

Коэффициент восстановления давления находится следующим образом:

$$\sigma = \frac{P_{02}}{P_{01}} = \frac{P_{02}}{P_1} \frac{P_1}{P_{01}},$$

$$\frac{P_{01}}{P_1} = \left(1 + \frac{\alpha-1}{2} M_I^2 \sin^2 \beta \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}},$$

$$\frac{P_{02}}{P_1} = \frac{\alpha-1}{\alpha+1} \left[\frac{(\alpha+1)^2}{2(\alpha-1)} \right]^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \frac{M_1^2 \sin^2 \beta}{\left(\frac{2\alpha}{\alpha-1} - \frac{1}{M_1^2 \sin^2 \beta} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}}}$$

Отношения давлений $\frac{P_{02}}{P_1}$ и $\frac{P_{01}}{P_1}$ для воздуха ($\alpha = 1,4$) принимают более простой вид:

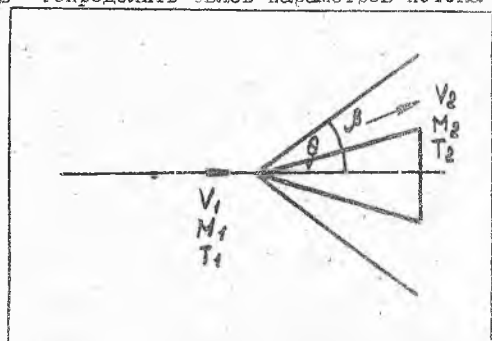
$$\frac{P_{02}}{P_1} = 166,7 \frac{M_1^2 \sin^2 \beta}{\left(7 - \frac{1}{M_1^2 \sin^2 \beta} \right)^{2,5}}$$

$$\frac{P_{01}}{P_1} = (1 + 0,2 M_1^2 \sin^2 \beta)^{3,5}$$

Задачи

Задача 7.1

Клин с углом полураствора θ находится в сверхзвуковом потоке воздуха (рис. 7.2). Теневой фотоснимок позволяет определить угол наклона косо́го скачка на носике клина к скорости невозмущенного потока β . Определить связь параметров потока до и после скачка.



Р и с. 7.2. Косой скачок на клине

Номер варианта	θ град.	β град.	M_1	V_1 м/с	T_1 К	T_0 К	M_2	V_2 м/с	T_2 К	P_{02} Па	σ	$\frac{P_2}{P_1}$	P_{10} Па
1	20	60	?										
2	30	?	2,0										
3	?	40	1,5										
4	15	50										?	
5		45	3,0								?		
6		55		600	300					?			3
7		60		720	320				?				
8	25	55		?	310								
9	10	60		500		350		?					
10		50		550	350		?	400					

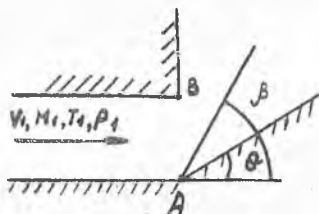
Задача 7.2

Клин с углом полураствора θ находится в сверхзвуковом потоке воздуха со скоростью V_1 . Угол наклона косо́го скачка β измерен по фотографии. Определить параметры течения газа.

Номер варианта	V_1 м/с	T_1 К	T_0 К	θ град	β град	V_2 м/с	M_1
1	800			20	53	?	
2	700	?		25	60		?
3	?		400	15	40	500	
4	900	300		?	50		

Задача 7.3

Воздух течёт по каналу, форма которого показана на рис.7.3



В сечении АВ число Маха M_1 , давление p_1 . За точкой А стенка отклоняется на угол θ . Рассчитать параметры течения.

Р и с.7.3. Форма канала

Номер варианта	M_1	T_1 , К	T_0 , К	p_1 , кгс/см ²	θ , град	β , град	V_2 , м/с	p_2 , кгс/см ²	p_0 , кгс/см ²	T_2 , К
1	2,3			1,0	20,0			?		
2	4,0			2,5		30,0			?	?
3	3,0				15,0	?				
4	3,5	350				40,0				?
5	2,5	300	400			35,0	?			

Задача 7.4

Определить параметры газовой среды за косым скачком уплотнения по значениям параметров до косого скачка с использованием таблиц газодинамических функций.

Но- мер ва- риан- та	M_1	V_1 , м/с	T_1 , К	ρ_1 кгс см ²	ρ_1 кгсс ² м ⁴	T_0 , К	θ , град	β , град	M_2	T_2 , К	V_2 , м/с	ρ_2	ρ_2	ρ_2	σ
1	3						14,7								?
2		400	350					60		300	?				
3	2,5			2,5			15							?	
4	1,3		310				17			?					
5		320	370			400	21				?				
6	2,0		410				25			390	?				
7	2,8			4,0				55				?			
8	3,5				0,08		12								

8. АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЧЕТЫРЕХГРАННОГО ПРОФИЛЯ

Общие сведения

I. Геометрические параметры профиля

Профилем крыла называется местное сечение крыла плоскостью, параллельной базовой плоскости летательного аппарата.

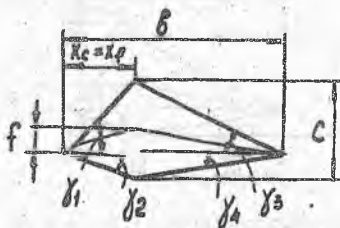
Обычно для описания профиля используются относительные толщины и вогнутость (кривизна) профиля и безразмерные координаты максимальной толщины и максимальной кривизны профиля (рис. 8.1):

$$\bar{c} = \frac{c}{b}, \quad \bar{f} = \frac{f}{b}, \quad \bar{x}_c = \frac{x_c}{b},$$

$$\bar{x}_f = \frac{x_f}{b}.$$

Величины углов $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ могут быть выражены через значения

$$\bar{c}, \bar{f}, \bar{x}_c, \bar{x}_f.$$



Р и с. 8.1. Четырехугольный
профиль крыла

Например:

$$\gamma_1 = \text{arctg} \frac{c/2+f}{x_c} = \text{arctg} \frac{\bar{c}/2+\bar{f}}{x_c}$$

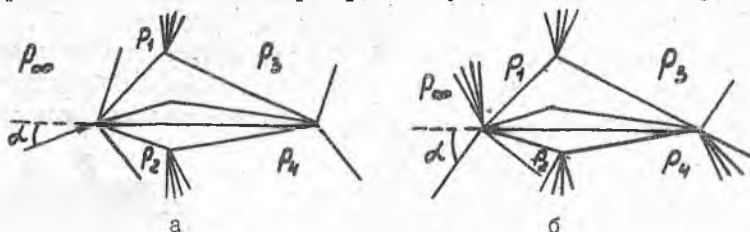
2. Физическая картина обтекания профиля

При обтекании четырёхгранного профиля сверхзвуковым потоком в зависимости от соотношения значений углов $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ и α возможны различные случаи обтекания. Например, изображенные на рис. 8.2, где жирными линиями изображены скачки уплотнения, а расходящимися пучками тонких линий – волны расширения.

Параметры потока за косыми скачками уплотнения и после волн расширения определяются по соотношениям, приведенным в темах 7 и 5, а также по табл. 5.1.

3. Определение аэродинамических коэффициентов четырёхгранного профиля

Коэффициенты C_y и C_x в связанной системе координат могут быть определены путём интегрирования соответствующих проекций давления по поверхности профиля. Для обтекания четырёхгранного профиля сверхзвуковым потоком интегралы легко вычисляются и приводятся к простым соотношениям. Например, для случая, показанного на рис. 8.2:



Р и с. 8.2 Обтекание профиля сверхзвуковым потоком:

- а) при малом угле атаки;
- б) при большом угле атаки.

$$C_y = \frac{Y}{\frac{\rho_{\infty} V_{\infty}^2}{2} \beta} = \frac{2}{\rho_{\infty} V_{\infty}^2} \left[(\rho_2 \cos \gamma_2 - \rho_1 \cos \gamma_1) \bar{x}_c + (\rho_4 \cos \gamma_4 - \rho_3 \cos \gamma_3) (1 - \bar{x}_c) \right],$$

$$C_x = \frac{X}{\frac{\rho_{\infty} V_{\infty}^2}{2} \beta} = \frac{1}{\rho_{\infty} V_{\infty}^2} \left[(\rho_1 \sin \gamma_1 - \rho_3 \sin \gamma_3) (\bar{c} + 2\bar{f}) + (\rho_2 \sin \gamma_2 - \rho_4 \sin \gamma_4) (\bar{c} - 2\bar{f}) \right]$$

В скоростной системе координат

$$C_{ya} = C_y \cos \alpha - C_x \sin \alpha,$$

$$C_{xa} = C_x \cos \alpha - C_y \sin \alpha.$$

Варианты заданий

Двадцать пять вариантов заданий по теме "Аэродинамические характеристики профиля" приведены в таблице 8.1. Значения параметров набегающего потока определяются по таблице стандартной атмосферы (табл. 8.2).

Т а б л и ц а 8.1

Номер варианта	Исходные данные					
	$\bar{x}_c = \bar{x}_f$	\bar{c}	\bar{f}	α°	M	h, км
1	0,2	0,04	- 0,01	10	1,3	0
2	0,2	0,06	- 0,01	6	1,25	2
3	0,2	0,08	- 0,01	2	1,2	4
4	0,2	0,10	- 0,01	0	1,15	8
5	0,2	0,12	- 0,01	- 2	1,1	10
6	0,3	0,04	0	10	1,3	0
7	0,3	0,06	0	6	1,25	2

Номер варианта	Исходные данные					
	$\bar{x}_c = \bar{x}_f$	\bar{c}	f	α^0	M	$h, \text{км}$
8	0,3	0,08	0	2	I,2	4
9	0,3	0,10	0	0	I,15	8
10	0,3	0,12	0	-2	I,1	10
11	0,4	0,04	0,01	10	I,3	0
12	0,4	0,06	0,01	6	I,15	2
13	0,4	0,08	0,01	2	I,2	4
14	0,4	0,10	0,01	0	I,15	8
15	0,4	0,12	0,01	-2	I,1	10
16	0,5	0,04	0,02	10	I,3	0
17	0,5	0,06	0,02	6	I,125	2
18	0,5	0,08	0,02	2	I,2	4
19	0,5	0,10	0,02	0	I,15	8
20	0,5	0,12	0,02	-2	I,1	10
21	0,6	0,04	0,03	10	I,3	0
22	0,6	0,06	0,03	6	I,125	2
23	0,6	0,08	0,03	2	I,2	4
24	0,6	0,10	0,03	0	I,15	8
25	0,6	0,12	0,03	-2	I,1	10

Таблица 8.2

h , м	a , м/с	ρ , кг/м ³	γ , м ² /с	p , Па
0	340,3	1,225	1,461	101325
1000	336,4	1,112	1,581	89875
2000	332,5	1,006	1,715	79497
3000	328,6	0,9092	1,863	70125
4000	324,6	0,8193	2,028	61636
5000	320,5	0,7364	2,212	54045
6000	316,4	0,6601	2,417	47213
7000	312,3	0,5900	2,648	41080
8000	308,1	0,5257	2,907	35648
9000	303,8	0,4670	3,200	30791
10000	299,5	0,4135	3,531	26491
11000	295,1	0,3648	3,806	22606
12000	295,1	0,3118	4,574	19390
13000	295,1	0,2665	5,335	16572
14000	295,1	0,2278	5,242	14164
15000	295,1	0,1947	7,340	12106
16000	295,1	0,1664	8,544	10348
17000	295,1	0,1422	9,995	8846
18000	295,1	0,1216	11,78	7562
19000	295,1	0,1040	13,68	
20000	295,1	0,0889	16,15	5527
22000	295,1	0,0650	21,88	4040
25000	298,5	0,0406	36,71	2526
27000	298,8	0,0291	49,91	1855
30000	301,8	0,0181	81,95	1183
35000	313,1	0,0083	189,3	580,2
40000	317,6	0,0040	416,7	295,9

КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА ГАЗОВ

Соавторы: Васильев Валерий Валерьянович
Головин Владимир Максимович
Морозов Лев Владимирович и др.

Редактор Н. Д. Чайникова
Техн. редактор Н. М. Каленюк
Корректор Н. С. Куприянова

Подписано в печать 22.06.93. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Печать оперативная.
Усл. печ. л. 2,6. Усл. кр.-отт. 2,7. Уч.-изд. л. 2,5.
Тираж 200 экз. Заказ № 92. Арт. С-58/93.

Самарский государственный аэрокосмический университет
имени академика С. П. Королева.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

Участок оперативной полиграфии
Самарского аэрокосмического университета.
443001 Самара, ул. Ульяновская, 18.