МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

КУЙБЫШЕВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ им. С. П. КОРОЛЕВА

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ

(МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ)

Рассмотрены и утверждены редакционно-издательским советом института 17 ноября 1978 г.

КУЙБЫШЕВ 1979

УДК 518

Настоящие «Контрольные задания» являются второй частью «Методических указаний для слушателей подготовительных курсов». Их цель — всесторонне подготовить слушателей к конкурсным экзаменам в Куйбышевский авиационный институт имени С. П. Королева.

Контрольные задания составлены в соответствии с новой программой вступительных экзаменов и способствуют приобщению молодежи к специфическим вузовским формам учебной работы.

Слушатели-заочники, полностью выполнившие учебный график контрольных заданий, приглашаются на сессию, в ходе которой читаются лекции, проводятся упражнения по всем разделам программы вступительных экзаменов.

Составители:

ст. преп. Ф. Л. Матвеева, ас. Н. А. Сапожникова

Тема 3. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ПРОГРЕССИИ. ПРЕДЕЛ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИЯ

I. ПРОГРЕССИИ. См. [А 8] гл. III*

Пример 1. Найти три числа, составляющие геометрическую прогрессию, если известно, что сумма этих чисел равна 26 и от прибавления к ним соответственно 1, 6 и 3 получаются новые три числа, составляющие арифметическую прогрессию.

Решение. Пусть три числа b_1, b_2, b_3 составляют геометрическую прогрессию, т. е. $\div\div b_1;\ b_2;\ b_3$, тогда числа b_1+1; b_2+6; b_3+3 составляют арифметическую прогрессию $\div b_1+1;\ b_2+6;\ b_3+3$. Для того чтобы найти геометрическую прогрессию, достаточно найти ее первый член и знаменатель прогрессии.

Поэтому нужно выразить числа b_1; b_2; b_3 через b_1 и q и, исходя из условий задачи, составить два уравнения, связывающие эти неизвестные.

Так как $b_n=b_1q^{n-1}$, а каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен среднему арифметическому двух равноудаленных от него членов, то будем иметь следующую систему:

$$\begin{cases} b_1+b_1q+b_1q^2=26 \\ b_1q+6=\dfrac{b_1+1+b_1q^2+3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b_1(1+q+q^2)=26 \\ b_1(1-2q+q^2)=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1(1+q+q^2)=26 \\ b_1(1-q)^2=8. \end{cases}$$

Поделим второе уравнение на первое, получим равносильную систему

$$\begin{cases} \dfrac{(1-q)^2}{1+q+q^2}=\dfrac{8}{26} \\ b_1=\dfrac{8}{(1-q)^2} \end{cases} \Leftrightarrow$$

---

* Список литературы см. в кн.: Методические указания и контрольные задания по математике. КуАИ, 1979, ч. I.

$$<=>\begin{cases}13(1-2q+q^2)=4+4q+4q^2\\ b_1=\dfrac{8}{(1-q)^2}.\end{cases}$$

($q\neq1$, что следует из 2-го уравнения).

Решим первое уравнение

$$9q^2-30q+9=0 <=> 3q^2-10q+3=0;$$

$$q_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-9}}{3}=\frac{5\pm4}{3};\ q_1=3;\ q_2=\frac{1}{3}.$$

Из 2-го уравнения

1) $q_1=3 => b_1=\dfrac{8}{(1-3)^2}=2;$

2) $q_2=\dfrac{1}{3} => b_1=\dfrac{8}{\left(1-\dfrac{1}{3}\right)^2}=18.$

Ответ: 1) 2; 6; 18;
2) 18; 6; 2.

Пример 2. Определить бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, в которой 2-й член равен 6, а сумма членов равна $^1/_8$ суммы квадратов членов.

Решение. Искомую бесконечно убывающую геометрическую прогрессию можно записать в виде

$$a;\ aq;\ aq^2;\ \ldots;\ aq^n;\ \ldots,\ \text{где } |q|<1.$$

Прогрессия, составленная из квадратов ее членов, будет иметь вид:

$$a^2;\ a^2q^2;\ a^2q^4;\ \ldots;\ a^2q^{2n};\ \ldots$$

Знаменатель этой прогрессии равен q^2.

Из $|q|<1 => |q^2|<1$.

Используя условие задачи, можно составить 2 уравнения, связывающие неизвестные «a» и «q»; сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии $S=\dfrac{a}{1-q}$, отсюда

$$\begin{cases}aq=6\\ \dfrac{a}{1-q}=\dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{a^2}{1-q^2}.\end{cases}$$

Решим эту систему.

Разделив обе части 2-го уравнения на $\dfrac{a}{1-q}\neq0$, получим систему, равносильную данной

$$\begin{cases} aq=6 \\ \dfrac{a}{1-q}=\dfrac{1}{8}\,\dfrac{a^2}{1-q^2} \end{cases} \quad \begin{cases} aq=6 \\ \dfrac{a}{1+q}=8 \end{cases} \iff \begin{cases} a=\dfrac{6}{q}\ (q\neq 0) \\ \dfrac{6}{(1+q)\,q}=8 \end{cases}.$$

Решим 2-е уравнение системы

$$\frac{6}{(1+q)\,q}=8 \iff 4q^2+4q-3=0,$$

$$q_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{4}=\frac{-2\pm 4}{4}\Rightarrow$$

$$q_1=\frac{1}{2};\quad q_2=-\frac{6}{4};\quad |q_2|=\frac{6}{4}>1,$$

не удовлетворяет условию;

$$a_1=\frac{6}{\frac{1}{2}}=12.$$

Ответ: 12; 6; 3; ...

Пример 3. Решить уравнение

$$1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{8}+\ldots=3x+\frac{7}{2}. \qquad (1)$$

Решение. В левой части (1) стоит сумма бесконечной прогрессии с первым членом $b_1=1$ и со знаменателем $q=-\frac{x}{2}$. Эта сумма будет конечна, если прогрессия убывающая, т. е.

$$|q|<1 \iff \left|-\frac{x}{2}\right|<1 \iff |x|<2.$$

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$S=\frac{b_1}{1-q}=\frac{1}{1+\frac{x}{2}}=\frac{2}{2+x}.$$

Следовательно, уравнение (1) равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} |x|<2 \\ \dfrac{2}{2+x}=3x+\dfrac{7}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} |x|<2 \\ 2+x\neq 0 \\ 6x^2+19x+10=0. \end{cases} \qquad (2)$$

$$|x|<2\Rightarrow 2+x\neq 0.$$

Решением третьего уравнения системы являются числа $x_1=-{}^2/_3$, $x_2={}^5/_2$. При $x_2={}^5/_2$ первое неравенство системы (2) ложно; $x_1 = -{}^2/_3$, удовлетворяет обоим неравенствам системы (2).

Ответ: $x = -{}^2/_3$.

II. БЕСКОНЕЧНО-ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

[А 9], гл. III, § 6; [А 10] «Материалы для повторения», п. 11

При работе над этой темой обратите внимание на определение бесконечной числовой последовательности ([А 9] § 6, п. 19); определение ограниченной последовательности ([А 9], § 7, п. 26); определение возрастающей, убывающей, монотонной последовательности ([А 9], § 7, п. 31).

Определение предела числовой последовательности дано в ([А 9], § 6, п. 21).

Большое значение имеет в теории пределов теорема Вейерштрасса ([А 9], п. 32). В учебнике она приводится без доказательства, но ее формулировку надо помнить. В этом же пункте нужно рассмотреть пример № 1, в котором приведено доказательство того, что $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = 0$ при $|q| < 1$. Это доказательство значительно проще доказательства, приведенного ранее в п. 23, так как оно основывается на теореме Вейерштрасса.

Очень важна теорема о единственности предела см. [А 9], п. 22. В этом же пункте даны примеры расходящихся последовательностей с обоснованием (примеры № 1 и 2). Для решения контрольной № 3 необходимо рассмотреть эти примеры.

Рассмотрим еще один пример.

Пример 4. Выпишите несколько первых членов последовательности $x_n = \frac{1 + (-1)^n}{2n}$, изобразите их геометрически двумя способами, имеет ли эта последовательность предел? Ответ обоснуйте.

Решение. Выпишем несколько членов последовательности:

$$x_1 = \frac{1 + (-1)}{2} = 0; \quad x_2 = \frac{1 + (-1)^2}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2}; \quad x_3 = \frac{1 + (-1)^3}{2 \cdot 3} = 0;$$

$$x_4 = \frac{1 + (-1)^4}{2 \cdot 4} = \frac{1}{4}; \; x_5 = 0,$$

т. е. при четном $n = 2k$

$$x_n = x_{2k} = \frac{1 + (-1)^{2k}}{2 \cdot 2k} = \frac{1}{2k} = \frac{1}{n};$$

при нечетном $n=2k+1$

$$x_n = x_{2k+1} = \frac{1+(-1)^{2k+1}}{2\cdot(2k+1)} = 0;$$

$$0;\ \frac{1}{2};\ 0;\ \frac{1}{4};\ 0;\ \frac{1}{6};\ \ldots;\ 0;\ \frac{1}{2k};\ 0;\ \ldots$$

Изобразим члены последовательности геометрически двумя способами (рис. 1). Замечаем, что члены с нечетными номерами рав-

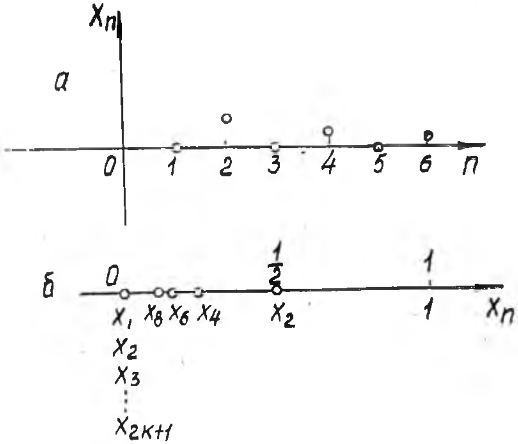

Рис. 1

ны 0, а с четными номерами при возрастании номера приближаются к 0. Вероятно, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Докажем это.

Возьмем произвольное $\varepsilon>0$. Докажем, что существует такое натуральное число N, что при всех $n>N$ выполняется неравенство

$$|x_n - 0| < \varepsilon. \tag{1}$$

Для любых нечетных $n=2k+1$, $x_n=0$, т. е.

$$|x_n - 0| = 0 < \varepsilon. \tag{2}$$

Для четных $n=2k$, $x_n=\frac{1}{n}$. Выясним, при каких n

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon <=> \frac{1}{n} < \varepsilon <=> n > \frac{1}{\varepsilon}. \tag{3}$$

Очевидно, в качестве N можно взять натуральное число $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$ $\left(\text{где } \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] \text{ — целая часть } \frac{1}{\varepsilon}\right)$.

Возьмем $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$, тогда при $n>N>\frac{1}{\varepsilon}$ будет выполняться неравенство (3) в обратном порядке, так как они равносильны, т. е.

$$\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon \qquad \text{или}$$

$$|x_n-0|<\varepsilon \qquad \text{при } n=2k.$$

Учитывая (2), можно сказать, что мы для любого $\varepsilon>0$ нашли $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$, что при всех $n>N$ выполняется неравенство

$$|x_n-0|<\varepsilon.$$

По определению предела последовательности это означает, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n=0$$

ч. и т. д.

СВОДКА ФОРМУЛ

Арифметическая прогрессия

$$\div\, a_1;\ a_2;\ a_3;\ \dots;\ a_n;\ \dots$$

$$a_n=a_{n-1}+d$$

$$a_n=a_1+d\,(n-1)$$

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n.$$

Геометрическая прогрессия

$$\div\div\, b_1;\ b_2;\ b_3;\ \dots;\ b_n\dots$$

$$b_n=b_{n-1}\,q$$

$$b_n=b_1\,q^{n-1}$$

$$S_n=\frac{b_n\,q-b_1}{q-1}=b_1\,\frac{q^n-1}{q-1}.$$

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

$$|q|<1;$$

$$S=\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{b_1}{1-q}.$$

Пример 5. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2+3+\dots+n)$.

Решение. Теорему о пределе суммы здесь применить нельзя, так как число слагаемых бесконечно. Под знаком суммы мы имеем сумму n членов арифметической прогрессии с первым членом $a_1=1$, разностью $d=1$.

$$S_n=\frac{1+n}{2}\cdot n.$$

Имеем

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+n}{2}=\infty.$$

III. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

[А 10], п. 14; «Материал для повторения»

Основные элементарные функции

1. $y=x^n$ — степенная функция.
2. $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$ — показательная функция.
3. $y=\log_a x$ $(x>0,\ a\neq 1)$ — логарифмическая функция.
4. $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$ — тригонометрические функции.
5. $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\operatorname{arctg} x$, $y=\operatorname{arcctg} x$ — обратные тригонометрические функции.

Элементарной функцией называется функция, состоящая из одного аналитического выражения, которое получается из основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических действий и конечного числа операций взятия функции от функции.

Примеры элементарных функций:

$y=ax+b$ — линейная функция;

$y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ — дробно-линейная функция;

$y=ax^2+bx+c$ — квадратичная функция;

$y=\dfrac{x^2+5x-1}{x-3}$ — дробно-рациональная функция;

$y=\ln\left(\dfrac{\sqrt{\sin x}+e^{3x}}{x^2}\right)$ и т. д.

Заметим, что функции

$$y=|x|=\begin{cases} x, & \text{при } x>0 \\ -x, & \text{при } x<0\end{cases}$$

и $y=\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}}$ ... не являются элементарными, так как первая состоит из двух аналитических выражений, а вторая — представляет из себя хотя и одно аналитическое выражение, но содержит бесконечное число операций извлечения корня.

IV. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

[Л 10], «Материал для повторения», п. 15

При вычислении пределов элементарных функций используем тот факт, что если $f(x)$ — элементарная функция, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, где $x_0 \in D(f)$.

Пример 1. Вычислить

$$\lim_{x\to -1}\frac{x}{x^2+1}=\frac{-1}{(-1)^2+1}=-\frac{1}{2}.$$

Если при вычислении предела частного при $x\to x_0$ предел числителя равен нулю и предел знаменателя равен нулю, т. е. числитель и знаменатель бесконечно малые при $x\to x_0$, то говорят, что это неопределенность, которую символически записывают в виде $\frac{0}{0}$. Существуют также неопределенности вида: $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$ и т. п. Для раскрытия этих неопределенностей применяют различные приемы. Рассмотрим несколько примеров раскрытия неопределенностей.

Пример 2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-5x+3}{3x^2+4x-7}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right).$

Разделим числитель и знаменатель дроби на высшую степень переменной, т. е. на x^2

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-5x+3}{3x^2+4x-7}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{5}{x}+\frac{3}{x^2}}{3+\frac{4}{x}-\frac{7}{x^2}}=\frac{2}{3},$$

так как

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5}{x}=0,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{3}{x^2}=0,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{4}{x}=0,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{7}{x^2}=0.$$

Пример 3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2-\sin x}{5^x+\cos x}.$

Решение. Sin x и $\cos x$ — ограниченные функции, так как $|\sin x|\leqslant 1$ и $|\cos x|\leqslant 1$, $\lim\limits_{x\to\infty}5^x=\infty$, значит имеем неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$. Разделим числитель и знаменатель дроби на 5^x. Тогда

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5^x-\sin x}{5^x+\cos x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{\sin x}{5^x}}{1+\frac{\cos x}{5^x}}=1,$$

так как

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{5^x}=0 \text{ и } \lim_{x\to\infty}\frac{\cos x}{5^x}=0.$$

(Частное от деления ограниченной функции на бесконечно большую есть функция бесконечно малая).

Пример 4. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-5x^2+8x-4}{x^3-3x^2+4}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Если при $x\to a$ $(|a|<\infty)$ получается неопределенность $\frac{0}{0}$, рекомендуется разделить числитель и знаменатель дроби на $x-a\neq 0$, так как $x\to a$ и $x\neq a$.

В нашем случае разделим числитель и знаменатель на $x-2$:

$$\begin{array}{r|l}
x^3-5x^2+8x-4 & x-2 \\
\underline{-\;x^3-2x^2} & \overline{x^2-3x+2} \\
-3x^2+8x-4 & \\
\underline{-\;-3x^2+6x} & \\
2x-4 & \\
\underline{-\;2x-4} & \\
0 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{r|l}
x^3-3x^2+4 & x-2 \\
\underline{-\;x^3-2x^2} & \overline{x^2-x-2} \\
-x^2+4 & \\
\underline{-\;-x^2+2x} & \\
-2x+4 & \\
\underline{-\;-2x+4} & \\
0 &
\end{array}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-5x^2+8x-4}{x^3-3x^2+4}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-x-2}=$$

$$=\frac{4-6+2}{4-2-2}=\left(\frac{0}{0}\right).$$

Повторим деление на $x-2$, разложив квадратный трехчлен на множители

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x+1}=\frac{2-1}{2+1}=\frac{1}{3}.$$

Пример 5. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2+4x})=(\infty-\infty)$.

Переведем иррациональность в знаменатель, для чего умножим и разделим на $x+\sqrt{x^2+4x}$. При этом мы освободимся от радикалов в числителе

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-\sqrt{x^2+4x})}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-\sqrt{x^2+4x})(x+\sqrt{x^2+4x})}{x+\sqrt{x^2+4x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x^2-4x}{x+\sqrt{x^2+4x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2-3x}{x+\sqrt{x^2+4x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1-\frac{3}{x}}{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^3}}}=-\infty.$$

Пример 6.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x}.$$

Решение. Чтобы освободиться от радикалов в числителе, умножим числитель и знаменатель дроби на неполный квадрат суммы. Получим в числителе разность кубов этих чисел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x}\left|\frac{0}{0}\right.=\lim_{x\to 0}\frac{(x+8)-2^3}{x\left(\sqrt[3]{(x+8)^2}+2\sqrt[3]{x+8}+4\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{(x+8)^2}+2\sqrt[3]{x+8}+4}=\frac{1}{12}.$$

Второй способ решения:

$$\sqrt[3]{x+8}=t\ =>\ x=t^3-8;\ \text{При } x\to 0,\quad t\to 2;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x}=\lim_{t\to 2}\frac{t-2}{t^3-8}=\lim_{t\to 2}\frac{1}{t^2+2t+4}=\frac{1}{12}.$$

При вычислении пределов от тригонометрических функций в случае неопределенности $\frac{0}{0}$ часто применяется замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Пример 7.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}\left|\frac{0}{0}\right.=\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{kx}\cdot k=1\cdot k=k.$$

Пример 8.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\sin 8x}\left|\frac{0}{0}\right.=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 7x}{x}}{\frac{\sin 8x}{x}}=\frac{7}{8}.$$

Пример 9.

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 7x}{\sin 8x}\left|\frac{0}{0}\right..$$

Обозначим $x-\pi=\alpha\Rightarrow x=\pi+\alpha$, при $x\to\pi$, $\alpha\to 0$,

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 7x}{\sin 8x}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin 7(\pi+\alpha)}{\sin 8(\pi+\alpha)}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin(7\pi+7\alpha)}{\sin(8\pi+8\alpha)}=$$

$$=\lim_{\alpha\to 0}\frac{-\sin 7\alpha}{\sin 8\alpha}=-\frac{7}{8}.$$

V. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x=x_0$, если она определена в этой точке и ее окрестности и $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. Все элементарные функции непрерывны в области их определения, так как для них $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. Поэтому точками разрыва функции могут быть точки, в которых функция не определена.

Примеры:

1. Функция $f(x)=\frac{x}{x-4}$ имеет разрыв при $x=4$.

2. Для $f(x)=\frac{1}{x^2-2x-3}$ точками разрыва будут корни знаменателя, т. е. точки $x=-1$ и $x=3$.

3. Для $f(x)=\frac{5}{x^2(x^2+3)}$, точка $x=0$ — точка разрыва.

4. Для $f(x)=\operatorname{tg} x$, точки разрыва $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, где $k\in Z$ и т. д.

Если функция не элементарна, например задана несколькими аналитическими выражениями на различных интервалах области своего определения, то точками разрыва функции могут оказаться границы этих интервалов. В точке непрерывности функции x_0 должно выполняться равенство

$$f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0),$$

где $f(x_0-0)$ — левый предел функции при $x\to x_0$;

$$f(x_0-0)=\lim_{x\to x_0-0} f(x);$$

$f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ — правый предел функции при $x\to x_0$;

$f(x_0)$ — значение функции в точке x_0.

Если это равенство нарушается, то точка x_0 — точка разрыва функции. Точка разрыва x_0 называется точкой разрыва 1 рода, если левый и правый пределы конечны. Все остальные точки разрыва называются точками разрыва 2 рода.

Пример 1. $f(x)=\frac{x}{|x|}$. Эта функция не определена в точке $x=0$ и задана различными аналитическими выражениями при $x<0$ и при $x>0$.

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{при } x>0\\ -1 & \text{при } x<0;\end{cases}$$

$$f(0-0)=\lim_{x\to 0-0}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0-0}\frac{-x}{x}=-1;$$

$$f(0+0)=\lim_{x\to 0+0}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0+0}\frac{x}{x}=1,$$

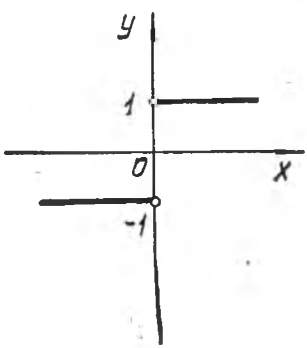

Рис. 2

$f(0)$ — не существует. Точка $x=0$ — точка разрыва 1 рода, так как левый и правый пределы — конечные числа. Модуль разности между левым и правым пределом называется скачком функции.

В точке разрыва 1 рода — конечный скачок функции. В данном примере скачок функции равен $|-1-1|=2$ (рис. 2).

Пример 2.

$$y=f(x)=\begin{cases} x^3 & \text{при } x<-1 \\ x & \text{при } -1\leqslant x<0 \\ x^3+1 & \text{при } x\geqslant 0. \end{cases}$$

$D(y)=R$. Функция может иметь разрыв в точках $x=-1$ и $x=0$.

Исследуем эти точки. Для этого найдем односторонние пределы в этих точках:

$$f(-1-0)=\lim_{x\to-1-0} f(x)=\lim_{x\to-1-0} x^3=-1,$$

$$f(-1+0)=\lim_{x\to-1+0} f(x)=\lim_{x\to-1+0} x=-1,$$

$$f(-1)=x|_{x=-1}=-1.$$

Итак,

$$f(-1-0)=f(-1+0)=f(-1).$$

Точка $x=-1$ — точка непрерывности функции.

$$\begin{cases} f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0-0} x=0, \\ f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0+0}(x^3+1)=1, \quad f(0-0)\neq f(0+0)=f(0), \\ f(0)=x^3+1|_{x=0}=1. \end{cases}$$

Точка $x=0$ — точка разрыва 1 рода.
Скачок функции в этой точке равен 1 (рис. 3).

Пример 3.

$$f(x)=\frac{4x}{x+2},\quad D(f(x)):\{x/x\neq-2\}.$$

Точка $x=-2$ — точка разрыва функции.

$$\lim_{x\to-2-0} f(x)=\lim_{x\to-2-0}\frac{4x}{x+2}=+\infty;$$

$$\lim_{x\to-2-0} f(x)=\lim_{x\to-2+0}\frac{4x}{x+2}=-\infty,$$

$x=-2$ — точка разрыва 2 рода. (График вблизи точки разрыва смотрите на рис. 4).

Пример 4.

$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ не определена в точке $x=0$,
точка $x=0$ — точка разрыва.

$$\lim_{x\to 0-0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ в точке $x=0$ имеет разрыв 1 рода.

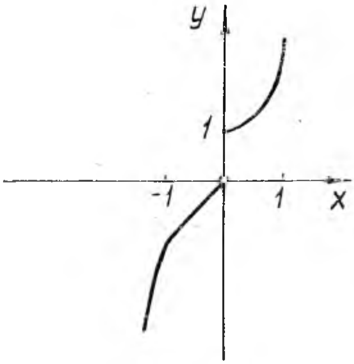

Рис. 3

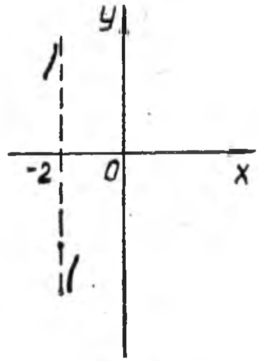

Рис. 4

(Односторонние пределы конечны). Скачок равен 0.
Такой разрыв называется устранимым (рис. 5).

Если определить $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ в точке $x=0$, положив $f(0)=1$, то функция

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & \text{при } x\neq 0,\\ 1 & \text{при } x=0\end{cases}$$

станет непрерывной.

Пример 5. Функция $f(x)=[x]$ — целая часть числа x имеет разрывы 1 рода при всех целых значениях x. Действительно:

$$[-1,7]=-2,\ [2,3]=2,\ [2,4]=2,\ldots,[3,1]=3 \text{ и т. д.}$$

Скачок функции в каждой точке разрыва равен 1 (рис. 6).

Пример 6. $f(x)=\{x\}$ — дробная часть числа x.

$$\{1{,}5\}=0{,}5, \{-1{,}5\}=\{-2+0{,}5\}=0{,}5.$$

Функция $\{x\}$ имеет разрыв 1 рода при всех $x\in Z$. Скачок равен 1.

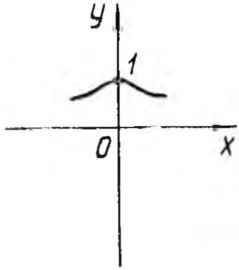

Рис. 5

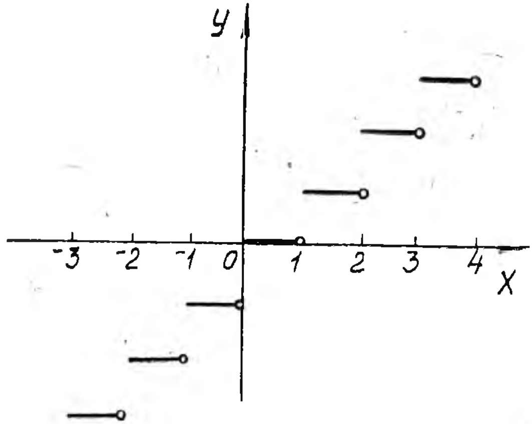

Рис. 6

VI. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

При вычислении производных чаще всего ошибаются при вычислении производной сложной функции.

Если $y=f(u)$, где $u=\varphi(x)$, то $y=f[\varphi(x)]$ — сложная функция. $y_x'=y_u'\cdot u_x'$, т. е. производная сложной функции равна произведению производной этой функции по промежуточному аргументу u и производной промежуточного аргумента u по независимой переменной x.

Пример 1.

$y=\sin^2 x$. Здесь $y=u^2$, где $u=\sin x$, значит $y'_x=2u\cdot u'=$ $=2\sin x\cdot(\sin x)'=2\sin x\cdot\cos x=\sin 2x$.

Пример 2. $y=e^{\sin 5x}$.

Здесь $y=e^u$, где $u=\sin v$, $v=5x$.

$$y'_x=(e^{\sin 5x})'=e^{\sin 5x}(\sin 5x)'=e^{\sin 5x}\cdot\cos 5x\,(5x)'=$$
$$=e^{\sin 5x}\cdot\cos 5x\cdot 5.$$

Пример 3. $y=\sqrt{x^2+1}$.

Здесь $y=\sqrt{u}$, где $u=x^2+1$.

Значит,

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'=\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot(x^2+1)'=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=$$
$$=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Пример 4. $y=2^{x^3}$;

$$y'=2^{x^3}\ln 2\,(x^3)'=2^{x^3}\ln 2\cdot 3x^2$$

Пример 5.

$$y=\operatorname{tg} x\cdot\sqrt{2x^3+1}.$$

Применяем правило дифференцирования произведения $(uv)'=$ $=u'v+v'u$:

$$y'=(\operatorname{tg} x)'\cdot\sqrt{2x^3+1}+\operatorname{tg} x\cdot(\sqrt{2x^3+1})'=$$

$$=\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\sqrt{2x^3+1}+\operatorname{tg} x\cdot\frac{1}{2\sqrt{2x^3+1}}\cdot(2x^3+1)'=$$

$$=\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\sqrt{2x^3+1}+\operatorname{tg} x\frac{1}{2\sqrt{2x^3+1}}\cdot 6x^2.$$

Для справки выпишем правила дифференцирования:

$$(c)'=0\quad (cu)'=cu'\quad (u+v)'=u'+v';$$

$$(uv)'=u'v+v'u\quad \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2},\ v\neq 0.$$

Таблица производных:

$$(u^n)'=nu^{n-1}\cdot u'\quad (\sin u)'=\cos u\cdot u';\quad (\arcsin u)'=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}};$$

$$(a^u)'=a^u\ln a\cdot u';\ (\cos u)'=-\sin u\cdot u';\ (\arccos u)'=-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}};$$

$$(e^u)'=e^u\cdot u';\quad (\operatorname{tg} u)'=\frac{1}{\cos^2 u}\cdot u';\quad (\operatorname{arctg} u)'=\frac{u'}{1+u^2};$$

$$(\ln u)'=\frac{1}{u}\cdot u';\quad (\operatorname{ctg} u)'=-\frac{u'}{\sin^2 u};\ (\operatorname{arcctg} u)'=-\frac{u'}{1+u^2};$$

$$(\log_a u)'=\frac{u'}{u\ln a}.$$

Вопросы для самопроверки

1. Какая последовательность называется арифметической прогрессией?
2. Какая последовательность называется геометрической прогрессией?
3. Какую прогрессию образует натуральный ряд чисел?
4. Найдите сумму n первых нечетных чисел; сумму n первых четных чисел.
5. Какая прогрессия называется сходящейся?

6. Будет ли бесконечно убывающей (сходящейся) геометрическая прогрессия со знаменателем: а) $q=-2$? б) $q=-1$?

7. Могут ли три числа одновременно образовать невырожденные арифметическую и геометрическую прогрессии?

8. Сумма трех первых членов возрастающей арифметической прогрессии равна 15. Если от первых двух членов этой прогрессии отнять по единице, а к третьему члену прибавить единицу, то полученные три числа составят геометрическую прогрессию. Найдите сумму первых десяти членов арифметической прогрессии.

9. Определите первый и пятый члены геометрической прогрессии, если известно, что знаменатель ее равен 3, а сумма шести ее первых членов равна 1820.

10. Найдите знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой каждый член в четыре раза больше суммы всех ее последующих членов.

11. В бесконечно убывающей геометрической прогрессии с положительными членами сумма первых трех членов 10,5, а сумма прогрессии 12. Найдите прогрессию.

12. Что называется бесконечной числовой последовательностью? Как обозначается бесконечная числовая последовательность? Расскажите о двух способах задания числовой последовательности.

13. Какая последовательность называется возрастающей (убывающей)?

14. Какая последовательность называется невозрастающей (неубывающей)?

15. Какая последовательность называется ограниченной?

16. Какие последовательности называются монотонными?

17. Дайте определение предела числовой последовательности с геометрической иллюстрацией (два способа).

18. Что называется ε-окрестностью точки «a»?

19. Какая последовательность называется сходящейся (расходящейся)?

20. Докажите основные теоремы о сходящейся последовательности (смотрите программу вступительных экзаменов).

21. Сформулируйте теорему Вейерштрасса о монотонных и ограниченных последовательностях.

22. Установите правило составления последовательности и продолжите последовательность по этому правилу. Напишите формулу общего члена последовательности:

1) 1; 2; 3; ... 2) 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; ... 3) 1; 4; 9; 16; ...

4) 1; 1,0; 1,0101; ... 5) $\frac{1}{2}$; $-\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$; $-\frac{4}{5}$; ...

6) 27; 22; 17; ... 7) -1; $\frac{1}{4}$; $-\frac{1}{9}$; $\frac{1}{16}$; ...

8) $\frac{1}{1\cdot 2}$; $\frac{1}{2\cdot 3}$; $\frac{1}{3\cdot 4}$; ... 9) $\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}$; $\frac{3\cdot 5}{4\cdot 6}$; $\frac{5\cdot 7}{6\cdot 8}$; ...

10) $\frac{5}{3}$; $\frac{10}{9}$; $\frac{15}{27}$.

Какие из этих последовательностей: возрастают; убывают; колеблются; ограничены; неограничены.

23. Напишите первые пять членов числовой последовательности, общий член которой выражается формулой:

$$1)\ a_n=\frac{(-n)^{n-1}}{2n};\quad 2)\ a_n=\frac{n}{3n+2};\quad 3)\ a_n=\frac{3^n}{3n+1}.$$

Укажите, какие из этих последовательностей убывающие, возрастающие, колеблющиеся, ограниченные, неограниченные (см. [А 9], п. 26. Примеры 1, 2, 3, п. 31, замечание и пример к нему).

24. Напишите несколько первых членов последовательности

$$\text{а)}\ x_n=\frac{2+(-2)^n}{n^3};\quad \text{б)}\ x_n=3+(-3)^n.$$

Изобразите их геометрически двумя способами, имеет ли каждая из этих последовательностей предел? Ответ обоснуйте (см. [А 9] п. 22. Пример 1).

25. Решите уравнения:

1) $x^2+x^3+x^4+\ldots=\frac{1}{2}$;

2) $x^2+\frac{x^2}{1+x^2}+\frac{x^2}{(1+x^2)^2}+\ldots=2$;

3) $5^2\cdot 5^4\cdot 5^6\cdot\ldots\cdot 5^{2x}=0{,}04^{-28}$;

4) $1-2x+4x^2-8x^3+\ldots=\frac{2}{3}$;

5) $1-x^2+x^4+\ldots+(-1)^{n-1}x^{2n-2}+\ldots=\frac{9}{19-9x}$.

26. Вычислите пределы:

$$\text{а)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(1+2+3+\ldots+n);$$

$$\text{б)}\ \lim_{n\to\infty}\frac{2-4+6-8+\ldots+(-1)^{n+1}2n}{n+1}.$$

27. Какая величина называется бесконечно малой? Бесконечно большой?

28. Какие из указанных ниже функций будут бесконечно малыми при $x \to \infty$? Бесконечно большими?

$$\text{а) } y = 2^{-x};\quad \text{б) } y = -2^{x};\quad \text{в) } y = \frac{2^{x} - 2^{-x}}{2^{x} + 2^{-x}};\quad \text{г) } y = \frac{\sin x}{x}.$$

29. Дайте определение предела функции при $x \to a$.

30. Какая функция называется непрерывной в точке? На промежутке?

31. Чем отличаются точки разрыва I рода от точек разрыва II рода?

32. Приведите пример функции, разрывной в точке $x = 1$.

33. Дайте определение производной функции в данной точке.

34. Сформулируйте правило дифференцирования сложной функции.

35. Вычислите пределы следующих функций:

$$1)\ \lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - 3}{5x^2 + 4};\quad 2)\ \lim_{x \to \infty} \frac{2x^4 + 3x - 1}{x^3 + 4x^2};\quad 3)\ \lim_{x \to \infty} \frac{5x - 3}{x^2 + 3x + 7};$$

$$4)\ \lim_{x \to 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^2 - x - 1};\quad 5)\ \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{2x^2 - 5x + 2};\quad 6)\ \lim_{x \to -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 + 5x + 6};$$

$$7)\ \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x} - 1};\quad 8)\ \lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{x - 1} - 2}{x - 5};\quad 9)\ \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x^2};$$

$$10)\ \lim_{x \to +\infty} (3x - \sqrt{x^2 + 4x - 1});\quad 11)\ \lim_{x \to \infty} \frac{2^{x} - 1}{2^{x} + 1};$$

$$12)\ \lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x};\quad 13)\ \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos x};\quad 14)\ \lim_{x \to \infty} \frac{\cos 2x - \cos 3x}{x^2}.$$

36. Найдите точки разрыва функции $f(x)$. Найдите односторонние пределы в точках разрыва. Укажите вид разрыва. Постройте схематично график функции вблизи точек разрыва:

$$1)\ f(x) = \frac{1}{x - 1};\quad 2)\ f(x) = x + \frac{1}{x};\quad 3)\ f(x) = \frac{\cos x}{x};$$

$$4)\ f(x) = \frac{x}{x^2 + 5};$$

$$5)\ f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ 0, & 0 \leqslant x < 1; \\ x, & x \geqslant 1 \end{cases}\quad 6)\ f(x) = \begin{cases} x, & |x| > 1 \\ \dfrac{x}{|x|}, & |x| \leqslant 1. \end{cases}$$

37. Вычислите производную функции (не упрощая полученное выражение):

$$1)\ y=x^2\sin 3x+2^{\cos 3x}-\frac{x\sqrt{x}+1}{x^4+5};$$

$$2)\ y=x\operatorname{tg}3x+5^{\sqrt{x}}+\ln(2x-1);$$

$$3)\ y=\ln\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{\pi}{2}}.$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 3

1. Три числа составляют геометрическую прогрессию. Если от третьего отнять 4, то числа составят арифметическую прогрессию. Если от второго и третьего членов полученной арифметической прогрессии отнять по 1, то получим снова геометрическую прогрессию. Найдите эти числа.

2. Сумма бесконечной геометрической прогрессии равна 4, а сумма кубов ее членов равна $\frac{64}{7}$. Найдите эту прогрессию.

3. Решите уравнение

$$1+x+x^2+x^3+\ldots=\frac{1}{x}-\frac{10}{3(x+1)}.$$

4. Докажите, что последовательность $x_n=\frac{n+1}{2n+1}$ является возрастающей и ограниченной.

5. Напишите несколько первых членов последовательности:

$$а)\ x_n=\frac{1+(-1)^n}{2};$$

$$б)\ x_n=\frac{1+(-1)^n}{n^2}.$$

Изобразите их геометрически двумя способами. Имеет ли каждая из этих последовательностей предел? Ответ обоснуйте.

6. Вычислите предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+3+\ldots+n}{n+2}-\frac{n}{2}\right).$$

7. Вычислите пределы:

$$а)\ \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-5x+2}{x^2-5x+6};\qquad б)\ \lim_{x\to-2}\frac{x^2+5x+6}{x^3+4x^2+4x};$$

$$в)\ \lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2x}}{\sqrt{4x+1}-3};\qquad г)\ \lim_{x\to\infty}\frac{6^x-5}{6^x+1};$$

$$д)\ \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 2x}{x^2};\qquad е)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\operatorname{tg}x.$$

8. Найдите точки разрыва функции. Укажите род разрыва. Постройте схематично график функции:

$$а)\ f(x)=\frac{x}{x^2-1};$$

$$б)\ f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{при } x<-1 \\ 1-x & \text{при } -1\leqslant x<1 \\ 1+x & \text{при } x\geqslant 1 \end{cases};$$

$$в)\ f(x)=\begin{cases} \frac{x}{|x|} & \text{при } |x|>1 \\ 0 & \text{при } |x|\leqslant 1 \end{cases}.$$

9. Вычислите производную функции, не упрощая полученное выражение:

$$y=\sqrt{x}\cdot\sin 5x+\frac{x^3+8}{x^3-4}-3^{2x+1}+\operatorname{ctg} e^x.$$

Ответы к упражнениям для самопроверки (тема 3)

6. а) нет; б) нет.
7. Нет. 8. 120. 9. 5; 405. 10. $^1/_5$. 11. 6; 3; $^3/_2$; ...
23. 1) колеблющаяся, ограниченная ($|x_n|={}^1/_2$);
 2) возрастающая, ограниченная ($|x_n|<1$);
 3) возрастающая, неограниченная.
25. 1) $^1/_2$; 2) 1; 3) 7; 4) $^1/_4$; 5) $^2/_3$.
26. а) $\frac{1}{2}$; б) -1.
28. а) бесконечно малая; б) бесконечно большая;

$$в)\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=1.$$

35. 1) $\frac{2}{5}$; 2) ∞; 3) 0; 4) $\frac{4}{3}$; 5) $\frac{4}{3}$; 6) 12; 7) $\frac{3}{2}$; 8) $\frac{1}{4}$;
 9) $\frac{1}{2}$; 10) ∞; 11) 1; 12) $\frac{3}{2}$; 13) 0; 14) $\frac{5}{2}$.

36. 1) $x=1$ точка разрыва II рода; 2) $x=0$ точка разрыва II рода; 3) $x=0$ точка разрыва II рода; 4) непрерывна на R; 5) $x=1$ точка разрыва I рода, скачок равен 1; 6) $x=0$ точка разрыва I рода, скачок равен 2.

37. 3) $$\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{\pi}{2}}}\cdot\frac{1}{3\sqrt[3]{\left(\frac{1}{x}+\frac{\pi}{2}\right)^2}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right).$$

Составители:

Фаина Андреевна Матвеева,
Изабелла Аркадьевна Сапожникова

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ

(Методические указания)

Редактор И. Чулкова
Техн. редактор Н. Каленюк
Корректор Т. Пикурова

Сдано в набор 4.07.79. Подписано в печать 12.09.79 г. Формат 60×84 1/16.
Бумага оберточная белая. Литературная гарнитура. Высокая печать.
Усл. п. л. 1,39. Уч.-изд. л. 1,3. Тираж 1500 экз. Заказ № 3503. Бесплатно.

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени
авиационный институт им. С. П. Королева,
г. Куйбышев, ул. Молодогвардейская, 151.
Областная тип. им. В. П. Мяги, г. Куйбышев, ул. Венцека, 60.