Государственный комитет РСФСР по делам науки
и высшей школы

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени
авиационный институт имени академика С.П. КОРОЛЕВА

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Куйбышев 1991

Государственный комитет РСФСР по делам науки
и высшей школы

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени
авиационный институт имени академика С.П.Королева

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Методические указания
для студентов вечернего отделения

Куйбышев 1991

Составитель О.М.К а р п и л о в а

УДК 517.2.075

Кратные интегралы и их приложения: Метод.указания для студентов вечер.отд-ния /Куйбышев.авиац.ин-т; Сост. О.М.Карпилова. Куйбышев, 1991. 52 с.

Содержатся примеры и задачи по темам: "Двойной интеграл", "Тройной интеграл", "Приложения кратных интегралов", Подробно разбираются решения типовых задач и предлагаются задачи для самостоятельного решения. В приложении даны варианты индивидуальных домашних заданий.

Предназначены для студентов вечернего отделения КуАИ. Подготовлены на кафедре высшей математики.

Печатаются по решению редакционно-издательского совета Куйбышевского ордена Трудового Красного Знамени авиационного института имени академика С.П.Королева

Рецензент Г.Н.Г у т м а н

Тема I. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДВОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

Для вычисления двойного интеграла его представляют в виде повторного (двукратного) интеграла:

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

Решение примеров

Пример I. Перейти от $\iint\limits_{D} f(x,y)\,dx\,dy$ к повторному интегралу и расставить пределы интегрирования, если область D ограничена линиями:

а) $x=1,\ y=2,\ x+y=6$,

б) $y=\frac{x^2}{2},\ y=8$;

в) $y=2x^2,\ y=\sqrt{4x}$;

г) контуром треугольника ABC, где A(I;2), B(3;6), C(3;0);

д) $x^2+y^2=4x$.

Решение:

а) Построим область D :

$x=1$ – прямая, параллельная оси Oy;

$y=2$ – прямая, параллельная оси Ox;

$x+y=6$ – прямая, проходящая через точки (0;6) и (6;0).

Область D – это треугольник ABC (рис.1). Чтобы найти координаты точки C, надо решить систему уравнений $\begin{cases} y=2, \\ x+y=6. \end{cases}$

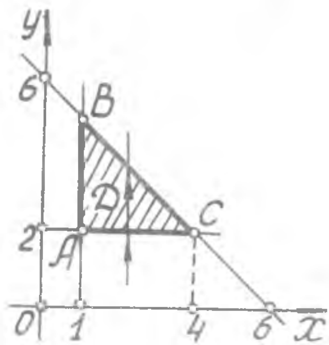


Рис. I

Отсюда C(4;2). Поэтому внутри области $\mathcal{D}$ $1 \le x \le 4$.

Чтобы выяснить, как изменяется y , проведем прямую, параллельную оси Oy и пересекающую область $\mathcal{D}$. Эта прямая входит в область по линии $y=2$, а выходит по линии $x+y=6$ или $y=6-x$. Поэтому $2 \le y \le 6-x$.

Таким образом, область $\mathcal{D}$ можно задать системой неравенств

$$\mathcal{D}: \begin{cases} 1 \le x \le 4, \\ 2 \le y \le 6-x \end{cases}.$$

Теперь легко расставить пределы в двукратном интеграле:

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_1^4 dx \int\limits_2^{6-x} f(x,y)\,dy .$$

б) Построим область $\mathcal{D}$: $y=\frac{x^2}{2}$ - парабола, $y=8$ - прямая, параллельная оси Ox (рис.2). Найдем координаты точек A и B. Для этого решим систему $\begin{cases} y=\frac{x^2}{2}, \\ y=8 \end{cases} \Rightarrow 8=\frac{x^2}{2} \Rightarrow x=\pm 4.$

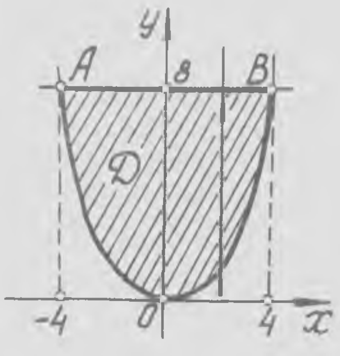


Рис. 2

Проведем прямую, параллельную оси Oy и пересекающую $\mathcal{D}$. Эта линия входит в область по параболе $y=\frac{x^2}{2}$ и выходит по прямой $y=8$.

Таким образом, область $\mathcal{D}$ задается неравенствами

$$\mathcal{D}: \begin{cases} -4 \le x \le 4, \\ \frac{x^2}{2} \le y \le 8 . \end{cases}$$

Поэтому $$\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{-4}^{4} dx \int\limits_{\frac{x^2}{2}}^{8} f(x,y)\,dy .$$

в) Построим область $\mathcal{D}$ (рис.3):

$y=2x^2$ - парабола, симметричная относительно оси , с вершиной в начале координат; $y=\sqrt{4x}$ - положительная ветвь параболы $y^2=4x$, симметричной относительно оси Ox, с вершиной в начале координат. Найдем точки пересечения этих линий:

$$\begin{cases} y=2x^2, \\ y=\sqrt{4x} \end{cases} \Rightarrow \ 2x^2=\sqrt{4x}.$$

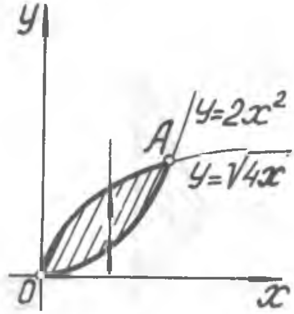


Рис. 3

Возводя обе части уравнения в квадрат, получим $4x^4=4x \Rightarrow x^4-x=0 \Rightarrow x(x^3-1)=0.$

Отсюда $x_1=0,\ x_2=1 \Rightarrow y_1=0,\ y_2=2.$

Таким образом, линии $y=2x^2$ и $y=\sqrt{4x}$ пересекаются в точках O(0;0) и A(1;2). Проведя прямую, параллельную Oy и пересекающую область $\mathcal{D}$, видим, что линия входа - $y=2x^2$, а линия выхода - $y=\sqrt{4x}$. Таким образом,

$$\mathcal{D}: \begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 2x^2 \le y \le \sqrt{4x}, \end{cases}$$

поэтому $$\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_{2x^2}^{\sqrt{4x}} f(x,y)\,dy.$$

г) Построим треугольник ABC (рис.4). Из чертежа ясно, что внутри $\mathcal{D}$ $1 \le x \le 3$. Прямая, параллельная Oy и пересекающая область $\mathcal{D}$, входит в треугольник по стороне AC и выходит по стороне AB.

Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ имеет вид $$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Воспользовавшись этой формулой, напишем уравнения сторон AB и AC:

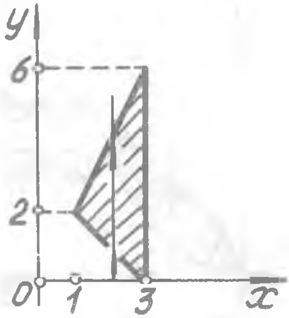
AB: $\dfrac{x-1}{3-1}=\dfrac{y-2}{6-2}$, откуда $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{4}$, т.е. $y=2x$;

AC: $\dfrac{x-1}{3-1}=\dfrac{y-2}{0-2}$, откуда $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{-2}$, т.е. $y=3-x$.

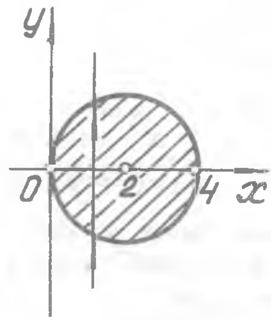
Таким образом,

$$\mathcal{D}: \begin{cases} 1 \le x \le 3, \\ 3-x \le y \le 2x. \end{cases}$$

Поэтому $$\iint\limits_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_1^3 dx \int_{3-x}^{2x} f(x,y)\,dy.$$



Р и с. 4



Р и с. 5

д) Построим область D. Для этого преобразуем уравнение границы: $x^2+y^2=4x \Rightarrow x^2-4x+y^2=0$.

Выделим полный квадрат относительно переменной x:

$$x^2-4x+4-4+y^2=0 \Rightarrow (x-2)^2-4+y^2=0 \Rightarrow (x-2)^2+y^2=4.$$

Получившееся уравнение задает окружность радиусом 2 с центром в точке (2;0) (рис.5).

Чтобы расставить пределы интегрирования, надо записать уравнения верхней и нижней половины окружности (линии входа в область и выхода из области). Разрешим исходное уравнение $x^2+y^2=4x$ относительно y: $y=\pm\sqrt{4x-x^2}$.

Очевидно, что верхней половине окружности соответствует уравнение $y=+\sqrt{4x-x^2}$, нижней - $y=-\sqrt{4x-x^2}$.

Таким образом,

$$D: \begin{cases} 0 \le x \le 4, \\ -\sqrt{4x-x^2} \le y \le \sqrt{4x-x^2}, \end{cases}$$

поэтому $$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^4 dx \int_{-\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{4x-x^2}} f(x,y)\,dy.$$

Пример 2. Переменить порядок интегрирования:

а) $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$;   б) $\int\limits_2^4 dx \int\limits_{\frac{4}{x}}^{\frac{6-x}{2}} f(x,y)dy$;

в) $\int\limits_{-2}^{-1} dx \int\limits_{-\sqrt{x+2}}^{\sqrt{x+2}} f(x,y)dy + \int\limits_{-1}^{2} dx \int\limits_{x}^{\sqrt{x+2}} f(x,y)dy$.

Решение:

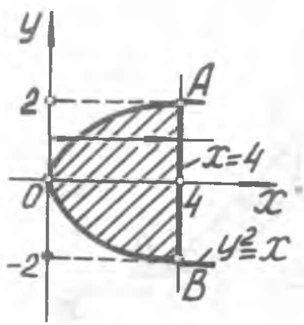
а) Область интегрирования задается системой неравенств

$$D: \begin{cases} 0 \le x \le 4, \\ -\sqrt{x} \le y \le \sqrt{x}. \end{cases}$$

Построим область D (рис. 6):

$y=\sqrt{x}$ - верхняя половина параболы $y^2=x$.

$y=-\sqrt{x}$ - нижняя половина параболы $y^2=x$.



Р и с. 6

При перемене порядка интегрирования интеграл примет вид

$$\int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx.$$

Найдем координаты точек пересечения параболы $y^2=x$ и прямой $x=4$:

$$\begin{cases} y^2=x, \\ x=4 \end{cases} \Rightarrow y^2=4 \Rightarrow y=\pm 2.$$

Таким образом, A(4;2), B(4;-2).

Проведем прямую параллельно оси Ox, пересекающую область D. Линия входа этой прямой в область - парабола $x=y^2$, линия выхода - прямая $x=4$. Таким образом, область D можно задать и системой неравенств

$$D: \begin{cases} -2 \le y \le 2, \\ y^2 \le x \le 4. \end{cases}$$

Поэтому

$$\int_0^4 dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy = \int_{-2}^{2} dy \int_{y^2}^{4} f(x,y)dx .$$

б) В данном случае область интегрирования $\mathcal{D}$ задастся системой неравенств

$$\mathcal{D}: \begin{cases} 2 \le x \le 4, \\ \dfrac{4}{x} \le y \le \dfrac{6-x}{2} \end{cases} .$$

Построим эту область (рис.7):

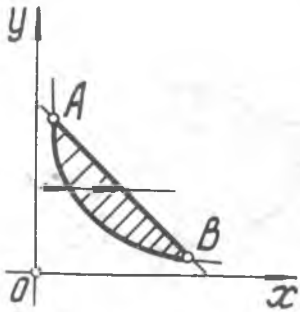


Рис. 7

$y=\dfrac{4}{x}$ - гипербола, $y = \dfrac{6-x}{2}$ - прямая. Найдем координаты точек A и B. В точке A $x=2$, следовательно, $y=\dfrac{4}{2}=2$. В точке B $x=4$, следовательно, $y=\dfrac{4}{2}=1$. Таким образом, A(2;2), B(4;1).

При перемене порядка интегрирования интеграл примет вид

$$\int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx .$$

Так как $1 \le y \le 2$, то $c=1; d=2$.

Проведем прямую, параллельную оси Ох и пересекающую область $\mathcal{D}$. Линия входа - гипербола $y=\dfrac{4}{x}$, откуда $x=\dfrac{4}{y}$. Линия выхода - - прямая $y=\dfrac{6-x}{2}$, откуда $x=6-2y$. Область $\mathcal{D}$ задается неравенствами

$$\mathcal{D}: \begin{cases} 1 \le y \le 2, \\ \dfrac{4}{y} \le x \le 6-2y . \end{cases}$$

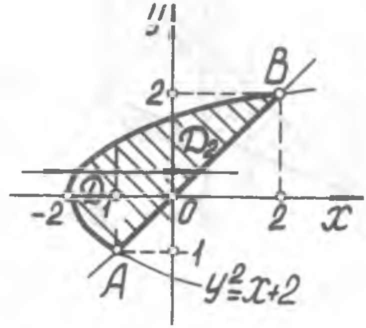
Окончательно получим

$$\int_2^4 dx \int_{4/x}^{\frac{6-x}{2}} f(x,y)dy = \int_1^2 dy \int_{4/y}^{6-2y} f(x,y)dx .$$

в) Построим области $\mathcal{D}_1: \begin{cases} -2 \le x \le -1, \\ -\sqrt{x+2} \le y \le \sqrt{x+2} \end{cases}$ и $\mathcal{D}_2: \begin{cases} -1 \le x \le 2, \\ x \le y \le \sqrt{x+2} . \end{cases}$

Граница области D_1 определяется уравнением $y=\pm\sqrt{x+2}$. Возводя обе части уравнения в квадрат, получим $y^2=x+2$ – уравнение параболы, вершина которой находится в точке (-2;0), а осью симметрии является ось Ox.

Граница области D_2 задается следующими уравнениями: $y=x$ – прямая, проходящая через начало координат, и $y=\sqrt{x+2}$ – верхняя ветвь параболы $y^2=x+2$. Таким образом, область интегрирования $D=D_1\cup D_2$ (рис. 8).



Р и с. 8

Чтобы расставить пределы интегрирования, найдем координаты точек пересечения линий границы. Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} y^2=x+2 \\ y=x \end{cases} \Rightarrow x^2=x+2 \Rightarrow$$

$$x^2-x-2=0 \Rightarrow x_1=-1;\ x_2=2.$$

Отсюда $y_1=-1,\ y_2=2$. Таким образом, A(-I;-I), B(2;2).

При перемене порядка интегрирования внешний интеграл будем брать по переменной y, внутренний – по x. Поэтому проведем прямую, пересекающую область D и параллельную оси Ox. Она входит в область по линии $y^2=x+2$ и выходит по линии $y=x$.

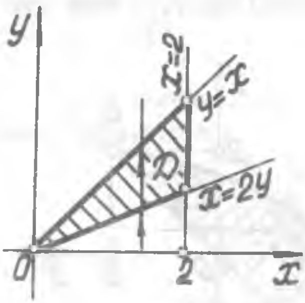
Итак, меняя порядок интегрирования, получаем

$$\int_{-2}^{-1}dx\int_{-\sqrt{x+2}}^{\sqrt{x+2}}f(x,y)dy+\int_{-1}^{2}dx\int_{x}^{\sqrt{x+2}}f(x,y)dy=\int_{-1}^{2}dy\int_{y^2-2}^{y}f(x,y)dx.$$

Здесь перемена порядка интегрирования упрощает выкладки, так как вместо вычисления двух интегралов понадобиться вычислить всего один.

<u>Пример 3.</u> Вычислить $\iint\limits_D (x+2y)dxdy$, где D ограничена линиями $x=2;\ y=x,\ x=2y$.

Решение. Построим область D (рис. 9):



Р и с. 9

$x=2$ – прямая, параллельная оси Оу, $x=2y$ и $y=x$ – прямые, проходящие через начало координат.

Для вычисления интеграла перейдем от двойного интеграла к повторному. Так как область D можно задать системой неравенств

$$D:\begin{cases} 0\le x\le 2, \\ \frac{x}{2}\le y\le x, \end{cases}$$

то

$$\iint\limits_D (x+2y)\,dx\,dy=\int_0^2 dx\int_{\frac{x}{2}}^{x}(x+2y)\,dy.$$

Вычисляем сначала внутренний интеграл, считая x постоянной величиной (так как интегрирование ведется по переменной y):

$$\int_0^2 dx\int_{\frac{x}{2}}^{x}(x+2y)\,dy=\int_0^2 dx\left((xy+y^2)\Big|_{\frac{x}{2}}^{x}\right)=\int_0^2 dx\left(x^2+x^2-\frac{x^2}{2}-\frac{x^2}{4}\right)=$$

$$=\int_0^2\frac{5}{4}x^2dx=\frac{5}{4}\int_0^2 x^2dx.$$

Теперь осталось вычислить получившийся внешний интеграл:

$$\frac{5}{4}\int_0^2 x^2dx=\frac{5}{4}\,\frac{x^3}{3}\Big|_0^2=\frac{10}{3}.$$

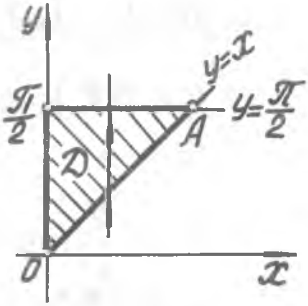
Таким образом, $\iint\limits_D (x+2y)\,dx\,dy=\frac{10}{3}.$

Пример 4. Вычислить $\iint\limits_D \cos(x+y)\,dx\,dy$, если D ограничена линиями $x=0$, $y=x$, $y=\frac{\pi}{2}$.

Решение. Построим область D :

$x=0$ – ось Оу, $y=\frac{\pi}{2}$ – прямая, параллельная оси Ох, $y=x$ – прямая, проходящая через начало координат (рис. 10).

Прямые $y=\frac{\pi}{2}$ и $y=x$ пересекаются в точке $A\left(\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Переходя к двукратному интегралу и вычисляя его, получим



Р и с. 10

$$\iint_D \cos(x+y)\,dx\,dy = \int_0^{\pi/2} dx \int_x^{\pi/2} \cos(x+y)\,dy =$$

$$= \int_0^{\pi/2} dx \left(\sin(x+y)\Big|_x^{\pi/2}\right) = \int_0^{\pi/2} dx \left(\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) -\right.$$

$$\left.- \sin 2x\right) = \left[\begin{matrix}\text{по формулам}\\ \text{приведения}\end{matrix}\quad \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x\right] =$$

$$= \int_0^{\pi/2} (\cos x - \sin 2x)\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos x\,dx - \int_0^{\pi/2} \sin 2x\,dx = \sin x\Big|_0^{\pi/2} +$$

$$+ \frac{1}{2}\cos 2x\Big|_0^{\pi/2} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 + \frac{1}{2}\cos\pi - \frac{1}{2}\cos 0 = 1 - 0 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Расставить пределы интегрирования в повторных интегралах, к которым сводится $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$, если D ограничена линиями:

а) $y=3,\ x=5,\ y=2x+1$; б) $y=4-x^2,\ y=0$;

в) $y=x^2+1,\ x-y+3=0$; г) $x^2+y^2=4,\ y=2x-x^2,\ x=0$ $(x\geq 0,\ y\geq 0)$;

д) D – треугольник ABC, где A(1;1), B(4;1), C(4;4).

2. Переменить порядок интегрирования:

а) $\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy$; б) $\int_{-2}^{2} dx \int_0^{4-x^2} f(x,y)\,dy$;

в) $\int_0^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy$; г) $\int_0^2 dx \int_x^{2x} f(x,y)\,dy$.

3. Вычислить двойные интегралы, считая, что D ограничена указанными линиями:

а) $\iint_D x\,dx\,dy$; $y=\frac{x+1}{3},\ y=\frac{17-x}{3},\ x=1,\ x=3$;

б) $\iint_D x^3\,dx\,dy$; $y=x+2,\ y=x^2$;

в) $\iint\limits_D (xy^2+1)\,dx\,dy$; $\quad 2y^2 = x,\ y = \dfrac{x}{2}$;

г) $\iint\limits_D e^{x+y}\,dx\,dy$; $\quad x+y=6,\ x=2,\ y=1$.

О т в е т ы

I. а) $\int\limits_1^5 dx \int\limits_3^{2x+1} f(x,y)\,dy$; б) $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_0^{4-x^2} f(x,y)\,dy$;

в) $\int\limits_{-1}^{2} dx \int\limits_{x^2+1}^{x+3} f(x,y)\,dy$; г) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{2x-x^2}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy$;

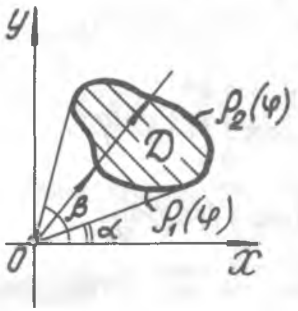
д) $\int\limits_1^4 dx \int\limits_1^{x} f(x,y)\,dy$.

2. а) $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{y^2}^{y} f(x,y)\,dx$; б) $\int\limits_0^4 dy \int\limits_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4-y}} f(x,y)\,dx$;

в) $\int\limits_0^2 dy \int\limits_{\sqrt{2-y}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dx$; г) $\int\limits_0^2 dy \int\limits_{y/2}^{y} f(x,y)\,dx + \int\limits_2^4 dy \int\limits_{y/2}^{2} f(x,y)\,dx$.

3. а) $\dfrac{140}{3}$; б) $24\dfrac{8}{21}$; в) $\dfrac{47}{105}$; г) $2e^6 + e^3$.

Тема 2. ДВОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ



Р и с. II

При переходе в $\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$ к полярным координатам используют формулы

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ dx\,dy = \rho\,d\rho\,d\varphi. \end{cases}$$

При этом (рис. II)

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_D f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\,\rho\,d\rho\,d\varphi = \int\limits_\alpha^\beta d\varphi \int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho,\varphi)\,\rho\,d\rho.$$

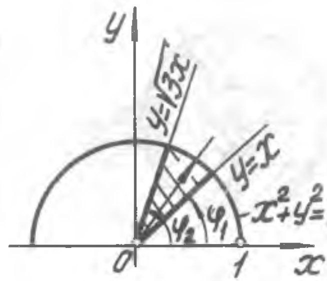
Решение примеров

Пример I. Вычислить $\iint\limits_{D}(x^2+y^2)\,dx\,dy$, где D ограничена линиями $y=x$, $y=\sqrt{3}x$,
$x^2+y^2=1$ $(y>0)$.

Решение. Построим область D (рис.I2):

$x^2+y^2=1$ – окружность радиусом I,

$y=x$, $y=\sqrt{3}x$ – прямые, проходящие через начало координат.



Р и с. I2

Так как область D представляет собой часть круга, удобно перейти к полярным координатам. При этом полюс совместим с точкой О(0;0), а полярную ось пустим по оси Ох.

Тогда

$$\iint\limits_{D}(x^2+y^2)\,dx\,dy=\left[\begin{array}{l}x=\rho\cos\varphi\\ y=\rho\sin\varphi\\ dx\,dy=\rho\,d\rho\,d\varphi\end{array}\right]=$$

$$=\iint\limits_{D}(\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi)\rho\,d\rho\,d\varphi=\iint\limits_{D}\rho^3\,d\rho\,d\varphi.$$

Теперь надо описать область D в полярной системе координат. Угол φ внутри области D меняется от φ_1 до φ_2 (см.рис.I2). Прямая $y=kx$ наклонена к оси Ох под углом, тангенс которого равен k. Поэтому $tg\varphi_1=1$; $tg\varphi_2=\sqrt{3}$. Отсюда $\varphi_1=\frac{\pi}{4}$; $\varphi_2=\frac{\pi}{3}$. Итак, внутри D $\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{3}$.

Луч, исходящий из полюса О и пересекающий D , выходит из области по окружности $x^2+y^2=1$, уравнение которой в полярных координатах имеет вид $\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=1\Rightarrow\rho^2=1\Rightarrow\rho=1$.

Таким образом, область D описывается системой неравенств

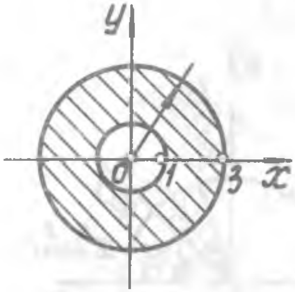
$$D:\begin{cases}\frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{3}\\ 0\le\rho\le1\end{cases}$$

Теперь легко расставить пределы в повторном интеграле и вычислить его $\iint\limits_{D}\rho^3\,d\rho\,d\varphi=\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3}d\varphi\int\limits_{0}^{1}\rho^3\,d\rho=\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3}d\varphi\,\frac{\rho^4}{4}\Big|_0^1=\frac{1}{4}\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3}d\varphi=\frac{1}{4}\varphi\Big|_{\pi/4}^{\pi/3}=\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{48}$

Пример 2. Вычислить $\iint\limits_D e^{x^2+y^2}dxdy$, где D - кольцо, $1\le x^2+y^2\le 9$.

Решение. Так как область D ограничена окружностями $x^2+y^2=1$ и $x^2+y^2=9$ (рис. 13), удобно перейти к полярным координатам:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi, \\ y=\rho\sin\varphi. \end{cases}$$



Р и с. 13

Тогда уравнения границ примут вид

$$\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=1 \Rightarrow \rho^2=1 \Rightarrow \rho=1;$$

$$\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=9 \Rightarrow \rho^2=9 \Rightarrow \rho=3.$$

Чтобы расставить пределы интегрирования в повторном интеграле, заметим, что внутри области D угол φ принимает все значения от 0 до 2π . Проведем из начала координат луч, пересекающий область D . Он входит в область по линии $\rho=1$ и выходит по линии $\rho=3$. Таким образом,

$$D:\begin{cases} 0\le\varphi\le 2\pi, \\ 1\le\rho\le 3. \end{cases}$$

Поэтому

$$\iint\limits_D e^{x^2+y^2}dxdy=\begin{bmatrix} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \\ dxdy=\rho d\rho d\varphi \end{bmatrix}=\iint\limits_D e^{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi}\rho d\rho d\varphi=$$

$$=\iint\limits_D e^{\rho^2}\rho d\rho d\varphi=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_1^3\rho e^{\rho^2}d\rho=\left[\rho d\rho=\frac{1}{2}d\rho^2\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_1^3 e^{\rho^2}d\rho^2=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\left(e^{\rho^2}\Big|_1^3\right)=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi(e^9-e)=\frac{e^9-e}{2}\varphi\Big|_0^{2\pi}=$$

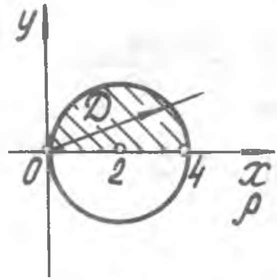
$$=\pi(e^9-e).$$

Пример 3. Вычислить $\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, если D определяется неравенствами

$$D:\begin{cases} x^2+y^2\le 4x,\\ y\ge 0.\end{cases}$$

Решение. Построим область D . Для этого преобразуем уравнение границы $x^2+y^2=4x$:

$$x^2+y^2-4x=0 \Rightarrow$$
$$(x-2)^2+y^2=4.$$



Р и с. I4

Итак, граница - это окружность радиусом 2 с центром в точке (2;0). Так как $y\ge 0$, то D - верхняя половина круга (рис. I4).

Перейдем к полярным координатам:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi,\\ y=\rho\sin\varphi.\end{cases}$$

Уравнение границы $x^2+y^2=4x$ в полярных координатах примет вид $\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=4\rho\cos\varphi \Rightarrow \rho^2=4\rho\cos\varphi$. Полагая $\rho\ne 0$, получим $\rho=4\cos\varphi$.

Область D целиком расположена в I-й четверти, поэтому $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$. Таким образом, в полярных координатах область D задается неравенствами

$$\begin{cases} 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2},\\ 0\le\rho\le 4\cos\varphi.\end{cases}$$

Теперь можно вычислить двоиной интеграл

$$\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\begin{bmatrix} x=\rho\cos\varphi\\ y=\rho\sin\varphi\\ dx\,dy=\rho\,d\rho\,d\varphi\end{bmatrix}=\iint\limits_D \frac{\rho\,d\rho\,d\varphi}{\rho}=\iint\limits_D d\rho\,d\varphi=$$

$$=\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi\int\limits_0^{4\cos\varphi} d\rho=\int\limits_0^{\pi/2} 4\cos\varphi\,d\varphi=4\sin\varphi\Big|_0^{\pi/2}=4.$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить, переходя к полярным координатам:

1) $\iint\limits_{D}(x^2+y^2+3)\,dxdy$, где D – верхняя половина круга $x^2+y^2\leq 16$.

2. $\iint\limits_{D}\dfrac{\cos\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy$, где D удовлетворяет неравенствам $\dfrac{\pi^2}{4}\leq x^2+y^2\leq 4\pi^2$.

3. $\iint\limits_{D}\dfrac{dxdy}{\sqrt{25-x^2-y^2}}$, где D ограничена линиями $x^2+y^2=9$, $x^2+y^2=16$, $y=x$, $y=\sqrt{3}x$ $(x\geq 0,\ y\geq 0)$.

4. $\iint\limits_{D}\dfrac{dxdy}{x}$, где D ограничена линиями $x^2+y^2=6x$, $y=0$ $(y\geq 0)$.

5. $\iint\limits_{D}(x^2+y^2)\,dxdy$, где D ограничена кривыми $x^2+y^2=2x$, $x^2+y^2=4x$, $y=0\ (y\geq 0)$.

О т в е т ы

1. 88π. 2. -2π. 3. $\dfrac{\pi}{12}$. 4. 3π. 5. $11{,}25\pi$.

Тема 3. ПРИЛОЖЕНИЯ ДВОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Двойной интеграл применяется при вычислении:

а) площади плоской фигуры, ограниченной областью D:

$$S=\iint\limits_{D}dxdy\,; \tag{1}$$

б) объема цилиндрического тела, ограниченного сверху непрерывной поверхностью $z=f(x,y)$, снизу плоскостью $z=0$ и сбоку прямой цилиндрической поверхностью, вырезающей на плоскости Oxy область D:

$$V=\iint\limits_{D} f(x,y)\,dx\,dy; \qquad (2)$$

в) площади поверхности, заданной уравнением $z=f(x,y)$, проекцией которой на плоскость Oxy является область D :

$$\sigma=\iint\limits_{D}\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,dx\,dy. \qquad (3)$$

Кроме того, двойные интегралы используются в механике для вычисления:

а) массы плоской пластинки, занимающей область D плоскости Oxy и имеющей переменную поверхностную плотность $\gamma=\gamma(x,y)$:

$$M=\iint\limits_{D}\gamma(x,y)\,dx\,dy \qquad (4)$$

б) статических моментов пластинки относительно осей Ox и Oy:

$$M_x=\iint\limits_{D} y\gamma(x,y)\,dx\,dy\ ; \qquad M_y=\iint\limits_{D} x\gamma(x,y)\,dx\,dy \qquad (5)$$

в) координат центра тяжести пластинки:

$$x_ц=\frac{M_y}{M}=\frac{\iint\limits_{D} x\gamma(x,y)\,dx\,dy}{\iint\limits_{D}\gamma(x,y)\,dx\,dy}; \quad y_ц=\frac{M_x}{M}=\frac{\iint\limits_{D} y\gamma(x,y)\,dx\,dy}{\iint\limits_{D}\gamma(x,y)\,dx\,dy} \qquad (6)$$

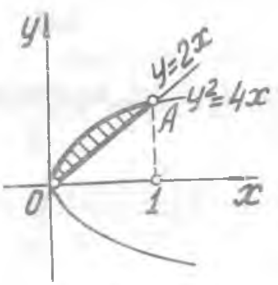
Решение примеров

Пример I. Найти площадь области, ограниченной линиями

$$y^2=4x,\ y=2x.$$

Решение. Построим область. Уравнение $y^2=4x$ задает параболу, уравнение $y=2x$ – прямую, проходящую через начало координат (рис. 15). Чтобы найти точки пересечения этих линий, решим систему уравнений:

$$\begin{cases} y^2=4x, \\ y=2x \end{cases} \Rightarrow 4x^2=4x \Rightarrow 4x(x-1)=0.$$



Р и с. I5

Отсюда $x_1=0,\ x_2=1$. Тогда $y_1=0,\ y_2=2$

Таким образом, прямая пересекает параболу в точках O(0;0) и A(I;2). По формуле (I)

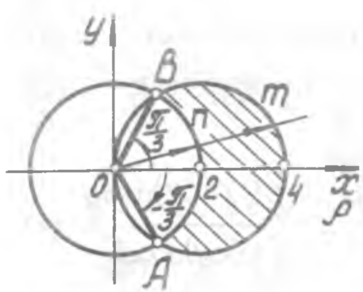
$$S=\iint\limits_D dxdy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{2x}^{\sqrt{4x}}dy=\int\limits_0^1(\sqrt{4x}-2x)dx=$$

$$=\left(2\frac{x^{3/2}}{3/2}-x^2\right)\Big|_0^1=\frac{4}{3}-1=\frac{1}{3}.$$

Пример 2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $x^2+y^2=4$; $x^2+y^2=4x$, вне первой окружности.

Решение. Уравнение $x^2+y^2=4$ задает окружность радиусом 2 с центром в начале координат. Уравнение $x^2+y^2=4x$ задает окружность радиусом 2 с центром в точке (2;0):

$$(x-2)^2+y^2=4.$$



Р и с. 16

Требуется найти площадь фигуры $AmBn$ (рис. 16).

Здесь удобно перейти к полярным координатам $\begin{cases} x=\rho\cos\varphi, \\ y=\rho\sin\varphi. \end{cases}$

Тогда первое уравнение примет вид

$$\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=4 \Rightarrow \rho^2=4 \Rightarrow \rho=2.$$

Второе уравнение:

$$\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi=4\rho\cos\varphi \Rightarrow \rho^2-4\rho\cos\varphi=0 \Rightarrow \rho=4\cos\varphi.$$

Чтобы определить координаты точек A и B, решим совместно систему уравнений

$$\begin{cases} \rho=2, \\ \rho=4\cos\varphi \end{cases} \Rightarrow 2=4\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi=\frac{1}{2} \Rightarrow \varphi=\pm\frac{\pi}{3}.$$

Итак, $A\left(-\frac{\pi}{3}; 2\right)$, $B\left(\frac{\pi}{3}; 2\right)$. Область $AmBn$ можно задать неравенствами
$$\begin{cases} -\frac{\pi}{3} \le \varphi \le \frac{\pi}{3}, \\ 2 \le \rho \le 4\cos\varphi . \end{cases}$$
По формуле (I)

$$S=\iint\limits_{D} dx\,dy = \begin{bmatrix} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \\ dx\,dy=\rho\,d\rho\,d\varphi \end{bmatrix} = \iint\limits_{D} \rho\,d\rho\,d\varphi = \int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3} d\varphi \int\limits_{2}^{4\cos\varphi} \rho\,d\rho =$$

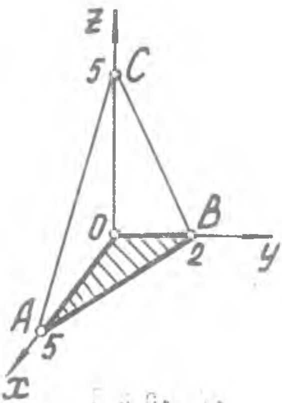
$$= \int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3} d\varphi \left(\frac{\rho^2}{2}\right)\Bigg|_{2}^{4\cos\varphi} = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3} (16\cos^2\varphi - 4)\,d\varphi = 8\int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3}\cos^2\varphi\,d\varphi - 2\int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3} d\varphi =$$

$$= 8\int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{1}{2}\,(1+\cos 2\varphi)\,d\varphi - 2\varphi\Bigg|_{-\pi/3}^{\pi/3} = 4\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_{-\pi/3}^{\pi/3} -$$

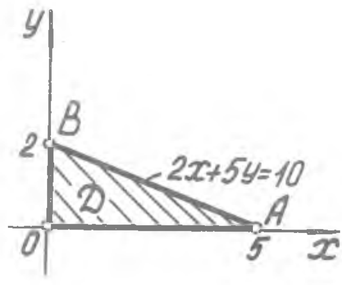
$$- 2\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right) = 2\cdot\frac{2\pi}{3} + 2\left(\sin\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{4\pi}{3} + 2\sqrt{3}.$$

Пример 3. Найти объем тела, ограниченного координатными плоскостями и плоскостью $2x+5y+2z=10$.

Решение. Построим тело (рис.17) и его проекцию на плоскость Оху, $z=0$ (рис.18).



Р и с. 17



Р и с. 18

По формуле (2) $V=\iint\limits_D z\,dx\,dy$. В примере область D – это треугольник OAB, изображенный на рис. I8, а поверхность z определяется уравнением плоскости $2x+5y+2z=10$, откуда $z=\frac{10-2x-5y}{2}$.

Таким образом,

$$V=\iint\limits_D \frac{10-2x-5y}{2}dx\,dy=\int\limits_0^5 dx\int\limits_0^{\frac{10-2x}{5}}\frac{10-2x-5y}{2}dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^5 dx\left(10y-2xy-\frac{5y^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{10-2x}{5}}=\frac{1}{2}\int\limits_0^5\Big(2(10-2x)-\frac{2x}{5}(10-2x)-$$

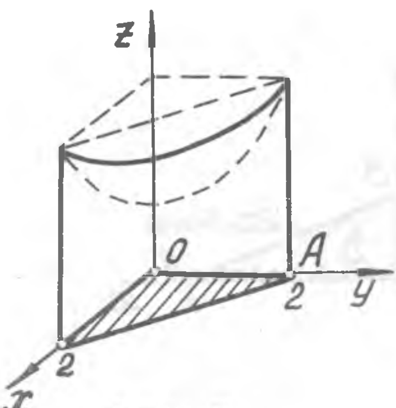
$$-\frac{5}{2}\cdot\frac{(10-2x)^2}{25}\Big)dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^5\left(20-4x-4x-\frac{4}{5}x^2-\frac{1}{10}(100-40x+4x^2)\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^5\left(10-4x+\frac{2}{5}x^2\right)dx=\frac{1}{2}\left(10x-2x^2+\frac{2}{5}\cdot\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^5=$$

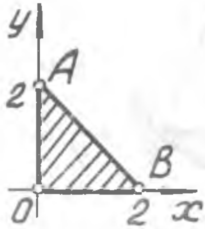
$$=\frac{1}{2}\left(50-50+\frac{2\cdot125}{5\cdot3}\right)=\frac{25}{3}.$$

Пример 4. Найти объем тела, ограниченного координатными плоскостями, плоскостью $x+y=2$ и поверхностью $z=x^2+y^2+1$.

Решение. Тело изображено на рис. I9. Плоскость $x+y=2$ проходит параллельно оси Oz; $z=x^2+y^2+1$ – параболоид, вершина которого находится в точке (0;0;I). Проекцией тела на плоскость Oxy является ΔABO (рис.20). AB – линия пересечения плоскости $x+y=2$ с плоскостью $z=0$, поэтому уравнение AB: $x+y=2$, откуда $y=2-x$.



Р и с. I9



Р и с. 20

По формуле (2)

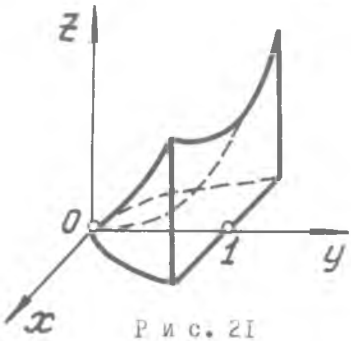
$$V=\iint\limits_{D} z\,dx\,dy=\iint\limits_{D}(x^2+y^2+1)\,dx\,dy=\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{2-x}(x^2+y^2+1)\,dy=$$

$$=\int\limits_0^2 dx\left(x^2y+\frac{y^3}{3}+y\right)\Big|_0^{2-x}=\int\limits_0^2 dx\left(x^2(2-x)+\frac{(2-x)^3}{3}+(2-x)\right)=$$

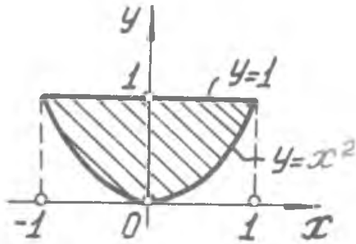
$$=\int\limits_0^2\left(\frac{14}{3}-5x+4x^2-\frac{4}{3}x^3\right)dx=\left(\frac{14}{3}x-\frac{5x^2}{2}+\frac{4x^3}{3}-\frac{4x^4}{3\cdot 4}\right)\Big|_0^2=$$

$$=\frac{28}{3}-10+\frac{32}{3}-\frac{16}{3}=\frac{14}{3}\,.$$

Пример 5. Найти объем тела, ограниченного параболоидом $z=x^2+y^2$, цилиндром $y=x^2$ и плоскостями $y=1$ и $z=0$.



Р и с. 21



Р и с. 22

Решение. Тело изображено на рис. 21. Для удобства расстановки пределов интегрирования построим проекцию тела на плоскость Оxy (рис.22). По формуле (2)

$$V=\iint\limits_{D} z\,dx\,dy=\iint\limits_{D}(x^2+y^2)\,dx\,dy=\int\limits_{-1}^1 dx\int\limits_{x^2}^1(x^2+y^2)\,dy=$$

$$=\int\limits_{-1}^1 dx\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Big|_{x^2}^1=\int\limits_{-1}^1\left(x^2+\frac{1}{3}-x^4-\frac{x^6}{3}\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x}{3}-\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{21}\right)\Big|_{-1}^1=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{21}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{21}=$$

$$=\frac{88}{105}\,.$$

Пример 6. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

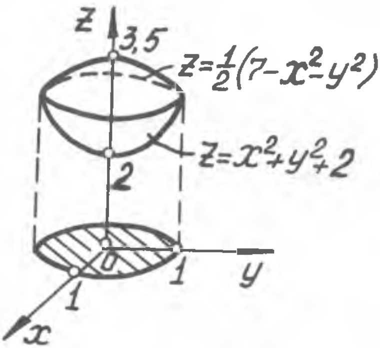
$$x^2+y^2-z+2=0,\ x^2+y^2+2z-7=0.$$

Решение. Данное тело ограничено двумя параболоидами (рис. 23). Линия пересечения параболоидов определяется системой уравнений

$$\begin{cases} z=x^2+y^2+2, \\ 2z=7-x^2-y^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=z-2, \\ x^2+y^2=7-2z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z-2=7-2z \Rightarrow 3z=9 \Rightarrow z=3.$$



Р и с. 23

Из первого уравнения $x^2+y^2=1$. Итак, линией пересечения является окружность радиусом I, лежащая в плоскости $z=3$: $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=3 \end{cases}$.

Проекция этой линии на плоскость Оху - тоже окружность $x^2+y^2=1$, поэтому удобно перейти к полярным координатам.

Объем тела можно подсчитать как разность объемов двух цилиндрических тел:

$$V=V_1-V_2=\iint\limits_D \frac{1}{2}(7-x^2-y^2)dxdy-\iint\limits_D (x^2+y^2+2)dxdy=$$

$$=\begin{bmatrix} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \\ dxdy=\rho d\rho d\varphi \end{bmatrix}=\iint\limits_D \frac{1}{2}(7-\rho^2)\rho d\rho d\varphi-\iint\limits_D (\rho^2+2)\rho d\rho d\varphi=$$

$$=\iint\limits_D \left(\frac{1}{2}(7-\rho^2)-(\rho^2+2)\right)\rho d\rho d\varphi=\iint\limits_D (1{,}5\rho-1{,}5\rho^3)d\rho d\varphi=$$

$$=1{,}5\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^1(\rho-\rho^3)d\rho=1{,}5\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\left(\frac{\rho^2}{2}-\frac{\rho^4}{4}\right)\Bigg|_0^1=1{,}5\cdot\frac{1}{4}\varphi\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{3\pi}{4}.$$

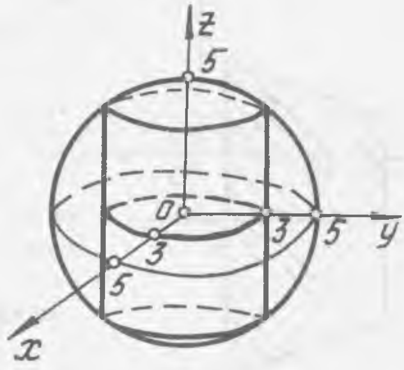
Пример 7. Найти площадь поверхности сферы $x^2+y^2+z^2=25$ внутри цилиндра $x^2+y^2=9$.

Решение. Цилиндр вырезает на поверхности сферы две части, симметричные относительно плоскости Оху (рис. 24). В силу симметрии достаточно вычислить площадь поверхности только верхней "шапочки" ($z \geq 0$) и результат удвоить.

Для вычисления воспользуемся формулой (3). Так как в нее входят частные производные, вычислим z'_x и z'_y. У нас $z \geq 0$, поэтому из уравнения сферы $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$. Тогда

$$z'_x = \frac{-x}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}, \quad z'_y = \frac{-y}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}.$$

Таким образом, по формуле (3)



Р и с. 24

$$\sigma = \iint_D \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dx dy = \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{25 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{25 - x^2 - y^2}}\, dx dy =$$

$$= \iint_D \sqrt{\frac{25 - x^2 - y^2 + x^2 + y^2}{25 - x^2 - y^2}}\, dx dy = \iint_D \frac{5}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}\, dx dy.$$

Проекция поверхности на плоскость Oxy - круг $x^2 + y^2 \leq 9$ следовательно удобно перейти к полярным координатам $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$

В полярной системе координат уравнение окружности $x^2 + y^2 = 9$ примет вид $\rho = 3$. Итак, в полярных координатах

$$\sigma = \iint_D \frac{5}{\sqrt{25 - \rho^2}} \rho\, d\rho\, d\varphi = 5\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 \frac{\rho}{\sqrt{25 - \rho^2}}\, d\rho =$$

$$= \frac{5}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 (25 - \rho^2)^{-\frac{1}{2}}\, d\rho^2 = -\frac{5}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi\, \frac{(25 - \rho^2)^{1/2}}{1/2}\Bigg|_0^3 =$$

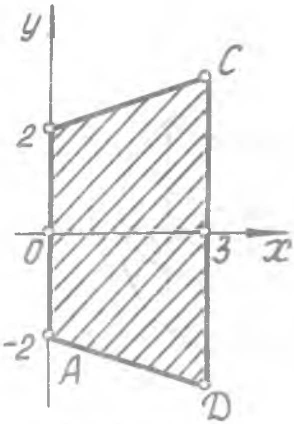
$$= -5\int_0^{2\pi} d\varphi\, (4 - 5) = 5\varphi\Big|_0^{2\pi} = 10\pi.$$

Так как мы считали площадь только верхней "шапочки", то вся площадь поверхности равна $\sigma_n = 2\sigma = 20\pi$.

Пример 5. Найти центр тяжести однородной пластинки $ABCD$, если A(0;-[illegible]), B(0;2), C([illegible];5), D([illegible];-[illegible]).

Решение. Для вычисления координат центра тяжести воспользуемся формулами ([illegible]). Так как пластинка однородна, то поверхностная плотность $\gamma(x,y)$ постоянна, поэтому формулы примут вид

$$x_{ц}=\frac{\iint\limits_{D} x\,dx\,dy}{\iint\limits_{D} dx\,dy}\,, \quad y_{ц}=\frac{\iint\limits_{D} y\,dx\,dy}{\iint\limits_{D} dx\,dy}\,.$$



Р и с. 25

Из чертежа (рис.25) видно, что пластинка имеет форму трапеции и симметрична относительно оси Ох, поэтому $y_{ц}=0$. Запишем уравнения прямых BC и AD , воспользовавшись формулой, определяющей уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$;

$$BC:\ \frac{x}{3}=\frac{y-2}{3-2} \Rightarrow y=2+\frac{x}{3}\,;$$

$$AD:\ \frac{x}{3}=\frac{y+2}{-3+2} \Rightarrow y=-2-\frac{x}{3}\,.$$

Вычислим теперь отдельно числитель и знаменатель дроби, определяющей $x_{ц}$.

$$\iint\limits_{D} x\,dx\,dy=\int\limits_0^3 x\,dx\int\limits_{-\frac{x}{3}-2}^{\frac{x}{3}+2} dy=2\int\limits_0^3 x\left(\frac{x}{3}+2\right)dx=2\left(\frac{x^3}{9}+x^2\right)\Big|_0^3=24.$$

В знаменателе стоит $\iint\limits_{D} dx\,dy$, равный площади области D , т.е. площади трапеции $ABCD$. Поэтому $\iint\limits_{D} dx\,dy=\frac{|AB|+|CD|}{2}h=15$,

иначе $\iint\limits_{D} dx\,dy=\int\limits_0^3 dx\int\limits_{-\frac{x}{3}-2}^{\frac{x}{3}+2} dy=2\int\limits_0^3\left(\frac{x}{3}+2\right)dx=15$. Таким образом,

$$x_{ц}=\frac{24}{15}=1,8\,;$$

$$y_{ц}=0.$$

Пример 9. Найти массу верхней половины эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, если плотность в каждой точке равна ординате точки.

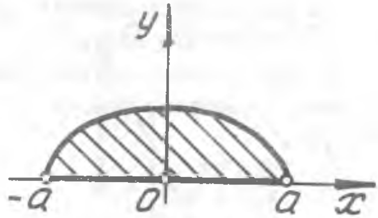
Решение. Плотность в каждой точке равна ординате, т.е. $\gamma(x,y)=y$.

По формуле (4) $M=\iint\limits_{D}\gamma(x,y)\,dx\,dy=\iint\limits_{D} y\,dx\,dy$. Для верхней половины эллипса $y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$, поэтому

$$M=\int\limits_{-a}^{a}dx\int\limits_{0}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}y\,dy=\int\limits_{-a}^{a}dx\,\frac{y^2}{2}\Bigg|_{0}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{-a}^{a}b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\frac{b^2}{2}\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_{-a}^{a}=$$

$$=\frac{b^2}{2}\left(a-\frac{a^3}{3a^2}+a-\frac{a^3}{3a^2}\right)=\frac{2}{3}ab^2.$$



Р и с. 26

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $x=y^2+1,\ x=5$; б) $y=x^2+1,\ x-y+3=0$;

в) $\rho=a\sqrt{2\cos 2\varphi}$; г) $x^2+y^2-2ax=0,\ x^2+y^2-2ay=0$;

д) $y=4-x^2,\ y=\frac{x^2}{2}-2$.

2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями:

а) $x^2+y^2-z=0,\ x=3,\ y=2,\ x=0,\ y=0,\ z=0$;

б) $y=x^2,\ x=y^2,\ z=12-x^2-y^2$;

в) $z=\sqrt{x^2+y^2},\ x^2+y^2=a^2,\ z=0$;

г) $z=1-x^2-y^2,\ y=x,\ y=\sqrt{3}x,\ z=0$.

3. Найти площадь поверхности:

а) части плоскости $2x+3y+z=6$, заключенной в I-м октанте;

б) части плоскости $x+y+z=2a$, вырезаемой цилиндром $x^2+y^2=a^2$;

в) параболоида $z=x^2+y^2+1$ внутри цилиндра $x^2+y^2=2$;

г) параболоида $y^2+z^2=2x$, отсекаемого параболическим цилиндром $y^2=x$ и плоскостью $x=1$.

4. Найти центр тяжести трапеции $ABCD$, где A(0;-2), B(0;2), C(3;3), D(3;3), если плотность в каждой точке равна абсциссе этой точки.

5. Найти центр тяжести однородной фигуры, ограниченной параболой $y^2=20x+100$ и прямой $y=10-x$.

6. Найти массу круглой пластинки радиусом R, если поверхностная плотность в каждой точке пропорциональна расстоянию от центра круга.

О т в е т ы

I. а) $\frac{32}{3}$; б) 4,5; в) $2a^2$; г) $a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$; д) I6.

2. а) 26; б) $\frac{402}{105}$; в) $\frac{2}{3}\pi a^3$; г) $\frac{\pi}{48}$.

3. а) $3\sqrt{14}$ б) $\pi a^2\sqrt{3}$; в) $\frac{13\pi}{3}$; г) $\frac{\pi}{3}(3\sqrt{3}-1)$.

4. $x_ц=2\frac{1}{16}$, $y_ц=0$; 5. $x_ц=12, y_ц=-10$. 6. $\frac{2}{3}k\pi R^3$.

Тема 4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ТРОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ

Для вычисления тройного интеграла его представляют в виде трехкратного:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)}dy\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}f(x,y,z)\,dz.$$

Решение примеров

Пример I. Перейти от $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ к трехкратному и расставить пределы интегрирования, если область V ограничена:

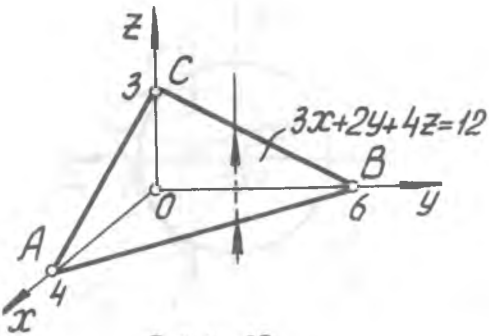
а) плоскостью $3x+2y+4z=12$ и координатными плоскостями;

б) конусом $x^2+y^2-z^2=0$ и плоскостью $z=h$;

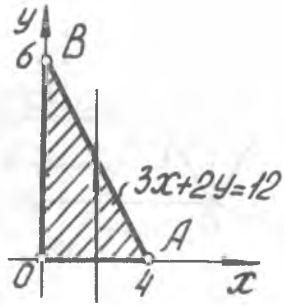
в) шаром $x^2+y^2+z^2\le R^2$.

Решение. а) Построим область V и проекцию этой области на плоскость Oxy (V_{xy}) (рис.27,28).

Прямая AB - это линия пересечения плоскости $3x+2y+4z=12$ с плоскостью $z=0$, поэтому ее уравнение $3x+2y=12$. Таким образом, V_{xy} - это Δ OAB.



Р и с. 27



Р и с. 28

Из рис. 28 легко увидеть, что $0 \le x \le 4$. Проведя прямую, параллельную Oy и пересекающую Δ OAB (рис. 28), замечаем, что она входит в V_{xy} по линии $y=0$, а выходит по линии $3x+2y=12$, т.е. $0 \le y \le \frac{12-3x}{2}$.

Чтобы выяснить пределы изменения z, проведем прямую, параллельную оси Oz и пересекающую область V (рис.27). Она входит в область по поверхности $z=0$ и выходит по поверхности $3x+2y+4z=12$, т.е. $0 \le z \le \frac{12-3x-2y}{4}$.

Таким образом, область V можно описать системой неравенств

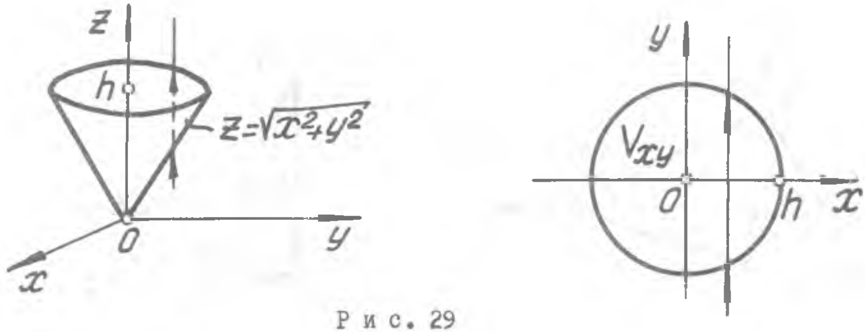
$$\begin{cases} 0 \le x \le 4, \\ 0 \le y \le 6-\frac{3}{2}x, \\ 0 \le z \le \frac{12-3x-2y}{4}, \end{cases}$$

поэтому

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_0^4 dx \int\limits_0^{6-\frac{3x}{2}} dy \int\limits_0^{\frac{12-3x-2y}{4}} f(x,y,z)\,dz.$$

б) Для расстановки пределов в трехкратном интеграле построим область V и ее проекцию на плоскость Oxy - V_{xy} (рис. 29).

Уравнение линии, ограничивающей V_{xy}, получают, решая систему уравнений $\begin{cases} x^2+y^2-z^2=0, \\ z=h \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2=h^2.$



Р и с. 29

То есть V_{xy} - круг радиусом h с центром в начале координат. Проводя прямые, параллельные Oy и Oz, пересекающие V_{xy} и V, получаем, что V описывается системой неравенств

$$\begin{gathered} -h \le x \le h, \\ -\sqrt{h^2-x^2} \le y \le \sqrt{h^2-x^2}, \\ \sqrt{x^2+y^2} \le z \le h. \end{gathered}$$

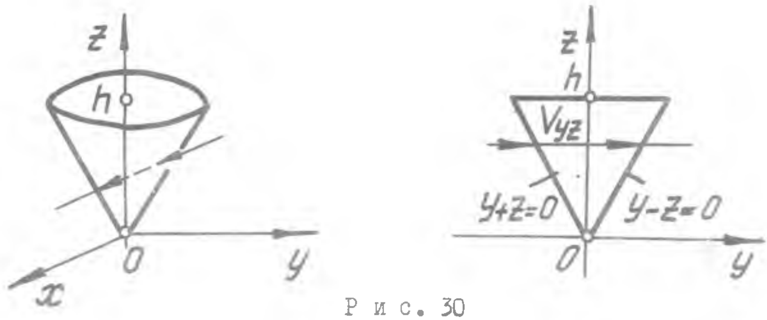
Поэтому
$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\limits_{-h}^{h} dx \int\limits_{-\sqrt{h^2-x^2}}^{\sqrt{h^2-x^2}} dy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{h} f(x,y,z)\,dz.$$

Можно выбрать в трехкратном интеграле и другой порядок интегрирования, тогда, естественно, изменятся и пределы интегрирования. Например, представим исходный интеграл в виде

$$\int\limits_{c}^{d} dz \int\limits_{y_1(z)}^{y_2(z)} dy \int\limits_{x_1(y,z)}^{x_2(y,z)} f(y,x,z)\,dx.$$

Чтобы расставить пределы интегрирования, спроектируем V на плоскость Oyz и проведем прямые, параллельные Oy и Ox и пересекающие соответственно V_{yz} и V (рис.30).

В этом случае V задается неравенствами
$$V: \begin{cases} 0 \le z \le h, \\ -z \le y \le z, \\ -\sqrt{z^2-y^2} \le x \le \sqrt{z^2-y^2} \end{cases}$$

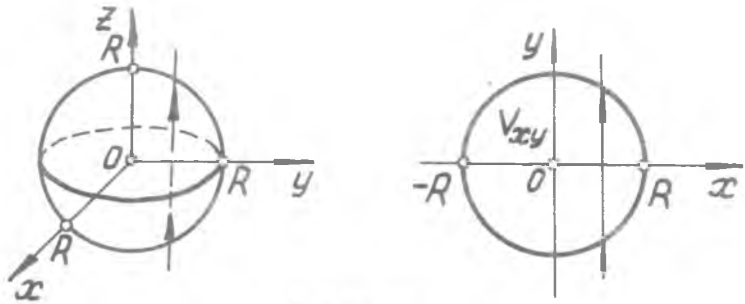


Р и с. 30

поэтому

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^h dz \int_{-z}^{z} dy \int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} f(x,y,z)\,dx .$$

в) Построим область V и ее проекцию на плоскость Oxy (рис.31).



Р и с. 31

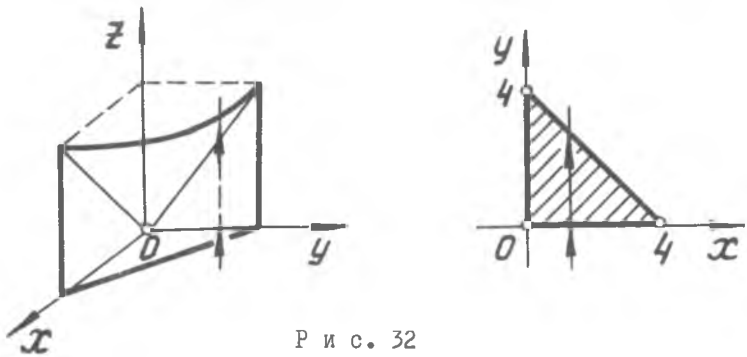
Из чертежа видно, что

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} f(x,y,z)\,dz =$$

$$= \int_{-R}^{R} dy \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} f(x,y,z)\,dz = \int_{-R}^{R} dz \int_{-\sqrt{R^2-z^2}}^{\sqrt{R^2-z^2}} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2-z^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-z^2}} f(x,y,z)\,dy .$$

Пример 2. Вычислить $\iiint\limits_V \frac{z}{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz$, если тело V ограничено координатными плоскостями, плоскостью $x+y=4$ и конусом $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

Решение. Построим тело V и его проекцию на плоскость Оху (рис. 32).



Р и с. 32

Из чертежа видно, что V описывается неравенствами

$$V:\begin{cases} 0\le x\le 4, \\ 0\le y\le 4-x, \\ 0\le z\le \sqrt{x^2+y^2}. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\iiint\limits_V \frac{z}{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz=\int\limits_0^4 dx\int\limits_0^{4-x}dy\int\limits_0^{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{z}{x^2+y^2}\,dz=\int\limits_0^4 dx\int\limits_0^{4-x}\frac{dy}{x^2+y^2}\left(\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{x^2+y^2}}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^4 dx\int\limits_0^{4-x}\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}\,dy=\frac{1}{2}\int\limits_0^4 dx\int\limits_0^{4-x}dy=\frac{1}{2}\int\limits_0^4 dx\, y\Big|_0^{4-x}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^4(4-x)\,dx=\frac{1}{2}\left(4x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^4=\frac{1}{2}(16-8)=4.$$

Задачи для самостоятельного решения

I. Перейти от $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$ к трехкратному и расставить пределы интегрирования, если тело V ограничено:

а) эллипсоидом $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{25}=1$;

б) поверхностью $z=4-x^2-y^2$ и плоскостью $z=0$;

в) координатными плоскостями и плоскостью $x+2y+3z-6=0$.

2. Вычислить $\iiint\limits_V \frac{y\,dxdydz}{1-x^2-y^2}$, если V ограничено плоскостями $x=0, y=0, z=0$ и сферой $x^2+y^2+z^2=1$ $(x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0)$.

3. Вычислить $\iiint\limits_V y\,dxdydz$, если V ограничено плоскостями $x=0, y=0, z=0$, $x+y+z=2$.

4. Вычислить $\iiint\limits_V \frac{z}{x^2+y^2}dxdydz$,если V ограничено плоскостями $z=0, x=0, y=x$, $y=2$ и конусом $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

О т в е т ы

I)а) $\int\limits_{-3}^{3}dx\int\limits_{-\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}}^{\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}}dy\int\limits_{-5\sqrt{1-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}}}^{5\sqrt{1-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}}}f(x,y,z)dz$; б) $\int\limits_{-2}^{2}dx\int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}dy\int\limits_{0}^{4-x^2-y^2}f(x,y,z)dz$;

в) $\int\limits_0^6 dx\int\limits_0^{\frac{6-x}{2}}dy\int\limits_0^{\frac{6-x-2y}{3}}f(x,y,z)dz$.

2. $\frac{I}{6}$. 3. $\frac{2}{3}$. 4. I.

Тема 5. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В ТРОЙНОМ ИНТЕГРАЛЕ. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ И СФЕРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ

Формулы перехода к цилиндрическим координатам (рис. 33):

$$x=\rho\cos\varphi;\ y=\rho\sin\varphi;\ z=z;\ dxdydz=\rho d\rho d\varphi dz.$$

Формулы перехода к сферическим координатам (рис. 34):

$$x=r\cos\varphi\sin\theta;\ y=r\sin\varphi\sin\theta;\ z=r\cos\theta;\ dxdydz=r^2\sin\theta dr d\varphi d\theta.$$

Здесь $0\le\varphi\le 2\pi$; $0\le\theta\le\pi$; $0\le r<+\infty$.

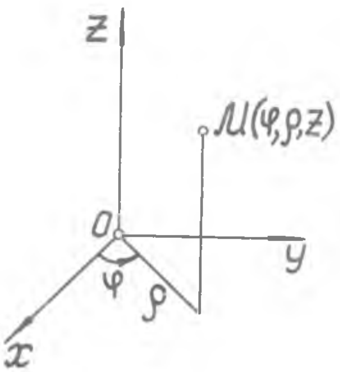


Рис. 33

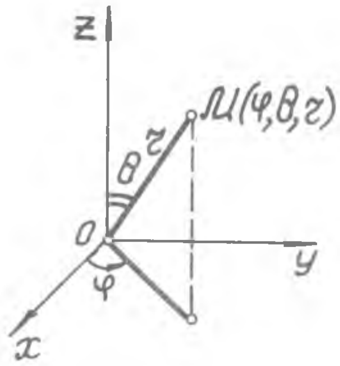
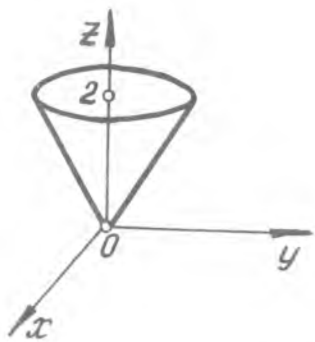


Рис. 34

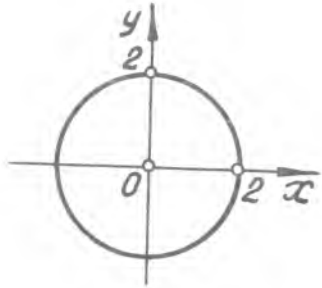
Решение примеров

Пример 1. Вычислить $\iiint\limits_V z\,dxdydz$, если V ограничено конусом $z=\sqrt{x^2+y^2}$ и плоскостью $z=2$.

Решение. Тело V изображено на рис. 35. Линия пересечения конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$ и плоскости $z=2$ имеет уравнение $\sqrt{x^2+y^2}=2$, т.е. $x^2+y^2=4$. Таким образом, проекция V на плоскость Oxy – круг (рис.36).



Р и с. 35



Р и с. 36

Перейдем к цилиндрическим координатам:

$x=\rho\cos\varphi$; $y=\rho\sin\varphi$; $z=z$; $dxdydz=\rho d\rho d\varphi dz$. В этих координатах уравнение окружности следующее (рис.36): $\rho=2$, уравнение конуса $z=\rho$, а тело V задается неравенствами

$0\le\varphi\le 2\pi$; $0\le\rho\le 2$; $\rho\le z\le 2$.

Итак, $$\iiint\limits_V z\,dxdydz=\begin{bmatrix} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \\ z=z \\ dv=\rho d\rho d\varphi dz \end{bmatrix}=\iiint\limits_V z\,\rho d\rho d\varphi dz=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2\rho d\rho\int\limits_\rho^2 z\,dz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2\rho d\rho\,\frac{z^2}{2}\Big|_\rho^2=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2\rho(4-\rho^2)d\rho=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2(4\rho-\rho^3)d\rho=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\left(2\rho^2-\frac{\rho^4}{4}\right)\Big|_0^2=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi(8-4)=2\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=2\varphi\Big|_0^{2\pi}=$$

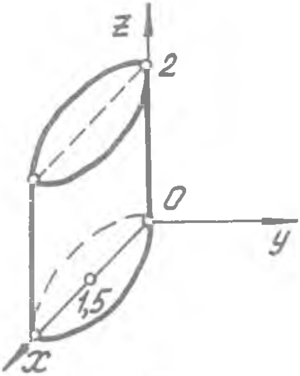
$$=4\pi.$$

Пример 2. Вычислить $\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, если V ограничено поверхностями $z=0$, $z=2$, $y^2=3x-x^2$.

Решение. Построим область V ; $z=0$, $z=2$ - плоскости.

Чтобы построить поверхность $y^2=3x-x^2$, преобразуем уравнение:

$$x^2-3x+y^2=0 \Rightarrow x^2-3x+2{,}25-2{,}25+y^2=0 \Rightarrow (x-1{,}5)^2+y^2=2{,}25.$$



Р и с. 37

Это уравнение определяет круговой цилиндр, в основании которого лежит круг радиусом 1,5 с центром в точке (1,5;0;0). Таким образом, область интегрирования V – цилиндр (рис.37). Поэтому удобно воспользоваться цилиндрическими координатами. В этих координатах уравнение цилиндрической поверхности, ограничивающей область интегрирования, примет вид $\rho^2\sin^2\varphi = 3\rho\cos\varphi - \rho^2\cos^2\varphi$. То есть $\rho^2 = 3\rho\cos\varphi$, откуда $\rho = 3\cos\varphi$.

Исходя из этого, область V можно описать системой неравенств

$$-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2};\quad 0 \le \rho \le 3\cos\varphi;\quad 0 \le z \le 2.$$

Итак, $$\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz = \left[\begin{array}{l} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \\ z=z \\ dx\,dy\,dz=\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz \end{array}\right] =$$

$$=\iiint\limits_V z\sqrt{\rho^2}\,d\rho\,\rho\,d\varphi\,dz = \iiint\limits_V z\rho^2\,d\rho\,d\varphi\,dz = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{3\cos\varphi} \rho^2\,d\rho \int\limits_0^2 z\,dz =$$

$$=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{3\cos\varphi} \rho^2\,d\rho\, \frac{z^2}{2}\Big|_0^2 = 2\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{3\cos\varphi} \rho^2\,d\rho = 2\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi\, \frac{\rho^3}{3}\Big|_0^{3\cos\varphi} = 18\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3\varphi\,d\varphi =$$

$$=18\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\varphi\,d\sin\varphi = 18\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (1-\sin^2\varphi)\,d\sin\varphi = 18\left(\sin\varphi - \frac{\sin^3\varphi}{3}\right)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} =$$

$$=18\left(1-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}\right) = 24.$$

Пример 3. Вычислить $\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$, где V – верхняя половина шара $x^2+y^2+z^2 \le R^2$.

Решение. Так как здесь область интегрирования является частью шара, удобно перейти к сферическим координатам:

$$\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)^2\,dx\,dy\,dz = \begin{bmatrix} x = r\cos\varphi\sin\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\theta \\ dx\,dy\,dz = r^2\sin\theta\,d\varphi\,d\theta\,dr \end{bmatrix} =$$

$$= \iiint\limits_V (r^2\cos^2\varphi\sin^2\theta + r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta)^2 r^2\sin\theta\,d\varphi\,d\theta\,dr =$$

$$= \iiint\limits_V r^4 r^2\sin\theta\,d\varphi\,d\theta\,dr = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta\,d\theta \int\limits_0^R r^6\,dr = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta\,d\theta \left.\frac{r^7}{7}\right|_0^R =$$

$$= \frac{R^7}{7}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta\,d\theta = \frac{R^7}{7}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\,(-\cos\theta)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{R^7}{7}\varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{2\pi R^7}{7}.$$

Задачи для самостоятельного решения

I. Вычислить $\iiint\limits_V (x^2+y^2+z)^3\,dx\,dy\,dz$, если V ограничено поверхностями $x^2+y^2=1$, $z=0$, $z=1$.

2. Вычислить $\iiint\limits_V (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$, где V ограничено поверхностями $z=0$, $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$.

3. Вычислить $\iiint\limits_V (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$, если V ограничено поверхностями $x^2+y^2=2z$, $z=2$.

4. Вычислить $\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz$, если V – шар $x^2+y^2+z^2\le R^2$.

О т в е т ы

1. $\frac{3\pi}{2}$ 2. $\frac{16\pi}{5}$ 3. $\frac{16\pi}{3}$ 4. πR^4.

Тема 6. ПРИЛОЖЕНИЯ ТРОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Тройной интеграл применяется при вычислении:

а) объем тела Ω :

$$V = \iiint\limits_\Omega dx\,dy\,dz \;; \tag{7}$$

б) массы тела, занимающего область Ω, с переменной объемной плотностью $\gamma(x,y,z)$:

$$M=\iiint\limits_{\Omega}\gamma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\,; \tag{8}$$

в) координат центра тяжести тела Ω:

$$\begin{aligned} x_ц&=\frac{1}{M}\iiint\limits_{\Omega}\gamma(x,y,z)\,x\,dx\,dy\,dz,\\ y_ц&=\frac{1}{M}\iiint\limits_{\Omega}\gamma(x,y,z)\,y\,dx\,dy\,dz,\\ z_ц&=\frac{1}{M}\iiint\limits_{\Omega}\gamma(x,y,z)\,z\,dx\,dy\,dz, \end{aligned} \tag{9}$$

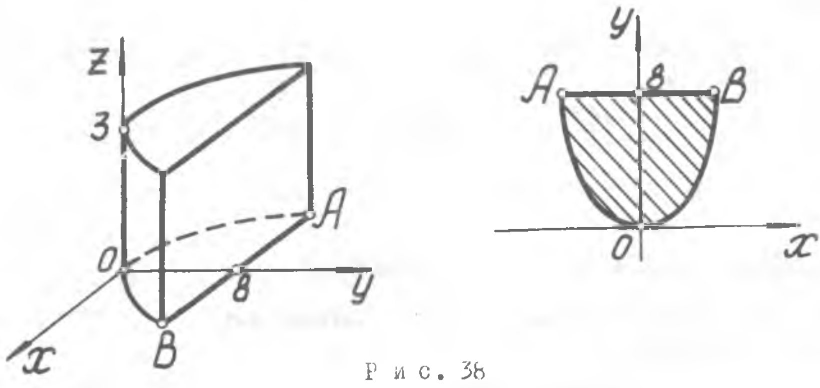
где M - масса тела.

Если тело однородно, то в формулах (9) можно положить $\gamma=1$; $M=V$.

Решение примеров

Пример I. Найти объем тела, ограниченного цилиндром $y=2x^2$ и плоскостями $z=0,\ z=3,\ y=8$.

Решение. Тело и его проекция на плоскость Oxy изображены на рис. 38.



Р и с. 38

Чтобы найти координаты точек A и B, решим систему уравнений:

$$\begin{cases} y=8, \\ y=2x^2 \end{cases} \Rightarrow 8=2x^2 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow \begin{cases} x=\pm 2, \\ y=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} A(-2;8), \\ B(2;8). \end{matrix}$$

Таким образом, область Ω описывается системой неравенств

$$-2 \le x \le 2\ ;\ 2x^2 \le y \le 8\ ;\ 0 \le z \le 3.$$

По формуле (7)

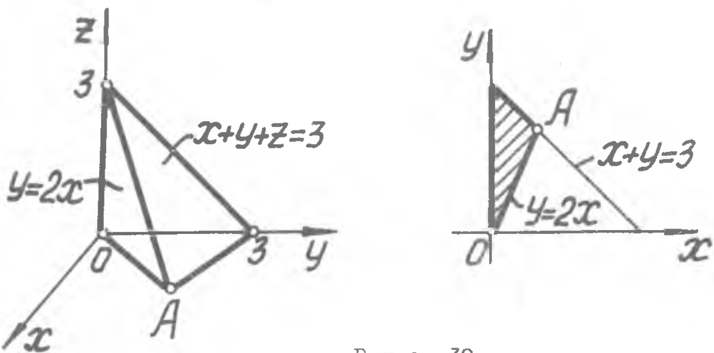
$$V=\iiint\limits_{\Omega} dx\,dy\,dz = \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{2x^2}^{8} dy \int\limits_{0}^{3} dz = \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{2x^2}^{8} dy\, z\Big|_0^3 = 3\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{2x^2}^{8} dy =$$

$$= 3\int\limits_{-2}^{2} dx\, y\Big|_{2x^2}^{8} = 3\int\limits_{-2}^{2}(8-2x^2)dx = 3\left(8x-\frac{2x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{2} =$$

$$= 3\left(16-\frac{16}{3}+16-\frac{16}{3}\right) = 3\cdot\frac{64}{3} = 64.$$

<u>Пример 2.</u> Найти массу тела, ограниченного плоскостями $z=0$, $x=0$, $y=2x$, $x+y+z=3$, если плотность в каждой точке $\gamma = \dfrac{1}{3-x-y}$.

<u>Решение</u>. Построим тело Ω и его проекцию на плоскость Oxy (рис. 39).



Р и с. 39

Плоскость $x+y+z=3$ пересекается с плоскостью $z=0$ по прямой $x+y=3$. Решив систему $\begin{cases} y=2x, \\ x+y=3 \end{cases} \Rightarrow x+2x=3 \Rightarrow 3x=3 \Rightarrow \begin{cases} x=1, \\ y=2, \end{cases}$

получим координаты точки A(I;2). Таким образом, тело Ω описывается системой неравенств $0\le x\le 1;\ 2x\le y\le 3-x;\ 0\le z\le 3-x-y.$
По формуле (8) масса тела

$$M=\iiint\limits_{\Omega}\frac{1}{3-x-y}\,dxdydz=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{2x}^{3-x}dy\int\limits_0^{3-x-y}\frac{1}{3-x-y}\,dz=$$

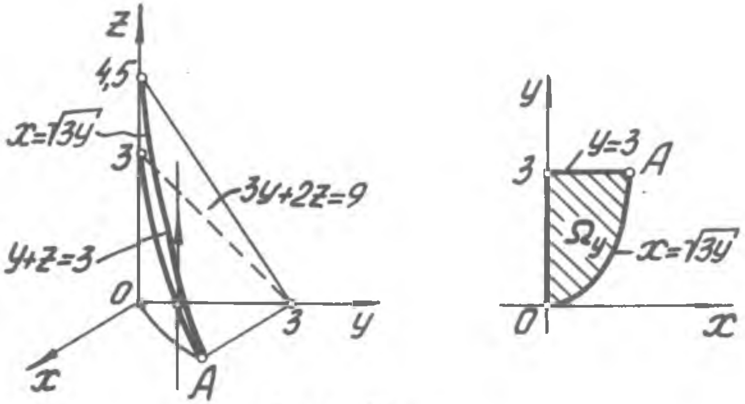
$$=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{2x}^{3-x}dy\left(\frac{z}{3-x-y}\right)\Bigg|_0^{3-x-y}=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{2x}^{3-x}dy=\int\limits_0^1 dx\, y\Big|_{2x}^{3-x}=$$

$$=\int\limits_0^1 dx(3-x-2x)=\int\limits_0^1(3-3x)dx=\left(3x-\frac{3x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=1{,}5.$$

Пример 3. Вычислить массу тела, ограниченного плоскостями $y+z=3,\ 3y+2z=9$ и параболическим цилиндром $x=\sqrt{3y}$, если плотность в каждой точке пропорциональна абсциссе и на единице расстояния от плоскости Oyz равна 8.

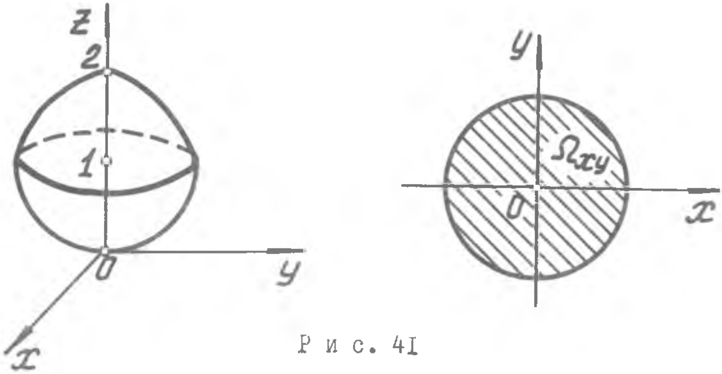
Решение. Плотность пропорциональна абсциссе; следовательно, $\gamma=kx$. На единице расстояния от плоскости Oyz плотность равна 8; следовательно, при $x=1$ $\gamma=8$. Тогда $8=k\cdot 1\Rightarrow k=8.$ Таким образом, $\gamma(x,y,z)=8x$.

Построим тело Ω и его проекцию на плоскость Oxy (рис. 40).



Р и с. 40

Чтобы найти координаты точки A, решим систему уравнений
$\begin{cases} y=3, \\ \sqrt{3y}=x \end{cases}\Rightarrow x=\sqrt{9}\Rightarrow x=3,\ y=3\Rightarrow A(3;3).$



Р и с. 41

Таким образом, область Ω можно задать системой неравенств

$$\Omega: \begin{cases} 0 \le x \le 3 \\ \dfrac{x^2}{3} \le y \le 3 \\ 3-y \le z \le \dfrac{9-3y}{2}. \end{cases}$$

По формуле (8) масса тела равна

$$M = \iiint\limits_{\Omega} 8x\,dx\,dy\,dz = 8\int_0^3 x\,dx \int_{\frac{x^2}{3}}^{3} dy \int_{3-y}^{\frac{9-3y}{2}} dz =$$

$$= 8\int_0^3 x\,dx \int_{\frac{x^2}{3}}^{3} dy \left(\frac{9}{2} - \frac{3}{2}y - 3 + y\right) = 8\int_0^3 x\,dx \int_{\frac{x^2}{3}}^{3} (1{,}5 - 0{,}5y)\,dy =$$

$$= 8\int_0^3 x\,dx \left(1{,}5y - 0{,}5\cdot\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{\frac{x^2}{3}}^{3} = 8\int_0^3 x\,dx\left(4{,}5 - \frac{9}{4} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{36}\right) =$$

$$= 8\int_0^3 \left(\frac{9}{4}x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{36}\right)dx = 8\left(\frac{9}{4}\cdot\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{36\cdot 6}\right)\Bigg|_0^3 = 27.$$

Пример 4. Найти координаты центра тяжести тела, ограниченного нижней половиной сферы $x^2+y^2+z^2-2z=0$ и параболоидом $x^2+y^2=2-z$, если плотность в каждой точке пропорциональна квадрату расстояния от оси Oz .

Решение. Построим тело. Вершина параболоида $x^2+y^2=2-z$ находиться в точке (0;0;2). Уравнение $x^2+y^2+z^2-2z=0$ можно преобразовать к виду $x^2+y^2+(z-1)^2=1$, т.е. оно задает сферу радиусом 1 с центром в точке (0;0;1). Итак, тело имеет вид, представленный на рис. 41.

Проекцией этого тела на плоскость Оху является окружность. Ее уравнение можно получить, решив систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=2-z, \\ x^2+y^2+z^2-2z=0 \end{cases} \Rightarrow 2-z+z^2-2z=0 \Rightarrow z^2-3z+2=0 \Rightarrow z_1=1,\ z_2=2.$$

В плоскости $z=1$ уравнение линии пересечения имеет вид $x^2+y^2=1$. Уравнение проекции тела Ω на плоскость $z=0$ имеет тот же вид $x^2+y^2=1$.

Поскольку Ω_{xy} - окружность, удобно при вычислении перейти к цилиндрическим координатам $x=\rho\cos\varphi$; $y=\rho\sin\varphi$; $z=z$. В этих координатах уравнение границы Ω_{xy} имеет вид

$$\rho=1;\ 0\le\varphi\le 2\pi.$$

Уравнение параболоида в цилиндрических координатах:

$$\rho^2=2-z \Rightarrow z=2-\rho^2.$$

Уравнение сферы: $\rho^2+z^2-2z=0 \Rightarrow z=1\pm\sqrt{1-\rho^2}$. Для нижней половины $z=1-\sqrt{1-\rho^2}$.

Переменная плотность по условию задачи пропорциональна квадрату расстояния от оси Oz , т.е. $\gamma(x,y,z)=k(x^2+y^2)$. В цилиндрических координатах $\gamma=k\rho^2$. Так как тело симметрично относительно оси Oz , то очевидно, что центр тяжести лежит на этой оси, т.е. $x_ц=0$; $y_ц=0$. Для вычисления $z_ц$ воспользуемся формулой (9):

$$z_ц=\frac{1}{M}\iiint\limits_{\Omega}\gamma(x,y,z)z\,dx\,dy\,dz$$

Вычислим сначала массу тела M [формула (8)] :

$$M=\iiint\limits_{\Omega}\gamma(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\left[\begin{array}{c} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \\ z=z \\ dx\,dy\,dz=\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz \end{array}\right]=k\iiint\limits_{\Omega}\rho^2\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz=$$

$$=k\iiint\limits_{\Omega}\rho^3\,d\rho\,d\varphi\,dz=k\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\rho^3\,d\rho\int_{1-\sqrt{1-\rho^2}}^{2-\rho^2}dz=k\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\rho^3\,d\rho\left(2-\rho^2-1+\sqrt{1-\rho^2}\right)=$$

$$=k\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\left(\rho^3-\rho^5+\rho\sqrt{1-\rho^2}\right)d\rho=k\int_0^{2\pi}d\varphi\left(\frac{\rho^4}{4}-\frac{\rho^6}{6}+\frac{\sqrt{(1-\rho^2)^5}}{5}-\frac{\sqrt{(1-\rho^2)^3}}{3}\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=k\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\right)\varphi\Big|_0^{2\pi}=\frac{13}{30}\pi k.$$

Теперь вычислим

$$\iiint_{\Omega}\gamma(x,y,z)\,z\,dxdydz=\left[\begin{array}{l}x=\rho\cos\varphi\\ y=\rho\sin\varphi\\ z=z\\ dxdydz=\rho d\rho d\varphi dz\end{array}\right]=k\iiint_{\Omega}\rho^2 z\,\rho d\rho d\varphi dz=$$

$$=k\iiint_{\Omega}\rho^3 z\,d\rho d\varphi dz=k\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\rho^3 d\rho\int_{1-\sqrt{1-\rho^2}}^{2-\rho^2}z\,dz=k\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\rho^3 d\rho\,\frac{z^2}{2}\Bigg|_{1-\sqrt{1-\rho^2}}^{2-\rho^2}=$$

$$=\frac{k}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\rho^3\left((2-\rho^2)^2-\left(1-\sqrt{1-\rho^2}\right)^2\right)d\rho=\frac{k}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\rho^3(4-4\rho^2+\rho^4-1+$$

$$+2\sqrt{1-\rho^2}-1+\rho^2)d\rho=\frac{k}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\left(2\rho^3-3\rho^5+\rho^7+2\rho^3\sqrt{1-\rho^2}\right)d\rho=$$

$$=\frac{k}{2}\int_0^{2\pi}d\varphi\left(\frac{2\rho^4}{4}-\frac{3\rho^6}{6}+\frac{\rho^8}{8}+\frac{2\sqrt{(1-\rho^2)^5}}{5}-\frac{2\sqrt{(1-\rho^2)^3}}{3}\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{k}{2}\left(\frac{2}{4}-\frac{3}{6}+\frac{1}{8}-\frac{8}{5}+\frac{2}{3}\right)\varphi\Bigg|_0^{2\pi}=\frac{47}{120}k\pi.$$

Таким образом,
$$z_ц=\frac{\frac{47}{120}k\pi}{\frac{13}{30}k\pi}=\frac{47}{52}.$$

<u>Задачи для самостоятельного решения</u>

I. Найти объем тела, ограниченного:

а) плоскостями $2x+3y+4z=12,\ x=0,\ y=0,\ z=0$;

б) параболоидом $2z=x^2+y^2$ и плоскостью $z=2$;

в) поверхностями $z=x^2+y^2$ и $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

2. Найти массу тела, ограниченного:

а) сферами $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x^2+y^2+z^2=2Rz$, если плотность $\gamma(x,y,z)=kz^2$;

б) поверхностями $z=xy$, $y=x$, $x=1$, $z=0$, если плотность $\gamma(x,y,z)=kxy^2z^3$;

в) конусом $y=\sqrt{x^2+y^2}$ и плоскостью $y=b$, если плотность пропорциональна ординате точки и на единице расстояния от плоскости Oxz равна γ.

3. Найти координаты центра тяжести однородного тела, ограниченного плоскостями $x+y+z=a$, $x=0, y=0, z=0$.

О т в е т ы

1. а) 12 ; б) 4π ; в) $\frac{\pi}{6}$.

2. а) $\frac{59}{480}k\pi R^5$; б) $\frac{k}{364}$; в) $\frac{\gamma\pi b^4}{4}$.

3. $C\left(\frac{1}{2};1;2\right)$.

П р и л о ж е н и е

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ДОМАШНИХ ЗАДАНИЙ

Задания к примерам

1. Найти центр тяжести плоской фигуры, ограниченной линиями....
2. Найти площадь поверхности...
3. Найти объем тела, ограниченного поверхностями...
4. Найти массу тела, ограниченного...

Вариант I

1) $y=x^2$, $x=4$, $y=0$.

2) цилиндра $x^2+z^2=1$, заключенную внутри цилиндра $x^2+y^2=1$.

3) $z=x^2+y^2$, $x+y=4$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

4) сферой $x^2+y^2+z^2=4$ и параболоидом $x^2+y^2=3z$, если плотность в любой точке равна аппликате этой точки.

Вариант 2

1) $y=0$ и одной полуволной синусоиды $y=\sin x$.

2) конуса $z^2=2xy$, отсеченную плоскостями $x=2, y=2 (x\geq 0, y\geq 0)$.

3) $z=x+y+1,\ y^2=x,\ x=1,\ z=0,\ y=0\ (y\geq 0)$.

4) частью шара радиусом 2, находящейся в первом октанте, если плотность в любой точке равна расстоянию от точки до плоскости Oxy.

Вариант 3

1) $y^2=3x,\ y=x$.

2) конуса $y^2+z^2=x^2$ внутри цилиндра $x^2+y^2=9$.

3) $x^2+y^2=9,\ x^2+z^2=9$.

4) сферическим слоем между поверхностями $x^2+y^2+z^2=9$ и $x^2+y^2+z^2=36$, если плотность в каждой точке обратно пропорциональна расстоянию от точки до начала координат.

Вариант 4

1) $x^2+y^2=16,\ y=0\ (y>0)$.

2) $4z=xy$, расположенную внутри цилиндра $x^2+y^2=16$.

3) $4z=x^2-y^2,\ z=0,\ x=4$.

4) прямым круговым цилиндром радиусом R, высотой H, если плотность в каждой точке равна квадрату расстояния от точки до центра основания цилиндра.

Вариант 5

1) окружностью с центром в начале координат радиусом 5 и двумя лучами, расположенными симметрично относительно оси Ox и образующими между собой угол α.

2) конуса $x^2+y^2=z^2$, расположенную внутри цилиндра $z^2=10x$.

3) $z^2=xy,\ x+y=5$.

4) координатными плоскостями и плоскостью $2x+2y+z-6=0$, если плотность в каждой точке равна абсциссе этой точки.

Вариант 6

1) осью Ох и верхней частью эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

2) цилиндра $2z=x^2$, отсеченную плоскостями $y=\frac{x}{2}, y=2x, x=2\sqrt{2}$.

3) $x+y+z=18, x^2+y^2=36, z=0$.

4) поверхностями $x^2+y^2-z^2=0, z=\sqrt{6}$, если плотность в каждой точке равна аппликате этой точки.

Вариант 7

1) образующими прямоугольный треугольник, катеты которого равны a и b, если в каждой точке треугольника поверхностная плотность пропорциональна квадрату расстояния от вершины прямого угла.

2) цилиндра $y^2=4x$, вырезанную сферой $x^2+y^2+z^2=5x$.

3) $z=7x, x^2+y^2=1, z=0$.

4) поверхностями $2x+z=2\sqrt{7}, x+z=\sqrt{7}, y^2=\sqrt{7}x, y=0 \ (y\geq0)$,

если плотность равна ординате точки.

Вариант 8

1) $y^2=2px, x=8$.

2) параболоида $x^2+y^2=2z$ внутри цилиндра $x^2+y^2=3$.

3) $8z=64-x^2-y^2, z=0$.

4) поверхностями $y=x^2, x=y^2, z=xy, z=0$, если плотность в каждой точке равна xyz.

Вариант 9

1) $y^2=9x, x=9, y=0 \ (y>0)$.

2) тела, ограниченную сферой $x^2+y^2+z^2=243$ и параболоидом $x^2+y^2=18z \ (z\geq0)$.

3) $x^2+y^2+z^2=36, x^2+y^2=9$ (вне цилиндра).

4) поверхностью эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. если плотность в каждой точке равна квадрату расстояния до начала координат.

Вариант 10

1) $y=\sin x$ и прямой ОА, проходящей через начало координат и точку А ($\frac{\pi}{2}$; 1) ($y \geq 0$).

2) сферы $x^2+y^2+z^2=4$, вырезанную цилиндром $x^2+y^2=1$.

3) $x^2+y^2+z^2=1$; $x^2+y^2+x=0$; $x^2+y^2-x=0$ (внутри цилиндров).

4) шаром радиусом R, если плотность пропорциональна кубу расстояния от центра шара и на единице расстояния равна γ.

Вариант II

I) $x^2+y^2=r^2$, $x^2+y^2=R^2$ $(r<R)$, $y=x\,tg\frac{\alpha}{2}$, $y=-x\,tg\frac{\alpha}{2}$ $(x \geq 0)$.

2) цилиндра $x^2+y^2=1$ $(z \geq 0)$ между плоскостями $z=4x$, $z=2x$.

3) $z^2=xy$, $x=1$, $x=0$, $y=1$, $y=0$.

4) цилиндрической поверхностью $x^2=2y$ и плоскостями $y+z=1$, $2y+z=2$, если плотность равна ординате точки.

Вариант I2

I) кардиоидой $\rho=2(1+\cos\varphi)$.

2) шара $x^2+y^2+z^2=4$, вырезанную поверхностью $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$.

3) $z^2=2x$, $x^2+y^2=x$.

4) октантом шара $x^2+y^2+z^2 \leq c^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, координатными плоскостями и плоскостью $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ $(a \leq c, b \leq c)$, если плотность в каждой точке равна аппликате этой точки.

Вариант I3

I) $y^2=4x+4$, $y^2=-2x+4$.

2) параболоида $y^2+z^2=2x$, заключенную между цилиндром $y^2=x$ и плоскостью $x=1$.

3) $\frac{z}{c} = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$, $z=0$.

4) параболоидом $x^2+y^2=2z$ и сферой $x^2+y^2+z^2=3$ $(z>0)$, если плотность равна сумме квадратов координат точки.

Вариант I4

I) $y^2=x^2-x^4$, $x \geqslant 0$.

2) цилиндра $x^2+y^2=2x$, заключенную между плоскостью Oxy и поверхностью $x^2+y^2=z^2$.

3) $z=2-x$, $y^2=2x$, $z=0$.

4) цилиндром $x^2+y^2 \leqslant 16$, $0 \leqslant z \leqslant 1$, если плотность пропорциональна квадрату расстояния от точки до оси цилиндра.

Вариант I5

I) $x^2+y^2=1$ $(x \geqslant 0)$, $y = x \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, $y = -x \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

2) конуса $x^2+y^2=z^2$, расположенную внутри цилиндра $x^2+y^2=10x$.

3) $z=x^2+y^2$, $y=x^2$, $y=1$, $z=0$.

4) поверхностями $2x+z=2\sqrt{5}$, $x+z=\sqrt{5}$, $y^2=x\sqrt{5}$, $y=0$ $(y>0)$, если плотность равна ординате точки.

Вариант I6

I) $y^2=6x$, $y=x$.

2) шара $x^2+y^2+z^2 \leqslant 16$ внутри цилиндров $x^2+y^2+4x=0$, $x^2+y^2-4x=0$.

3) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

4) поверхностями $x^2+y^2-z^2=0$, $z=4$, если плотность равна аппликате точки.

Вариант 17

1) образующими прямоугольный треугольник с катетами 1 и 7, если плотность в каждой точке пропорциональна квадрату расстояния от вершины прямого угла.

2) конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$, вырезанную цилиндром $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$.
Указание. Перейти к полярным координатам.

3) $z=x,\ x^2+y^2=49,\ z=0.$

4) шаром радиусом 1, если плотность пропорциональна кубу расстояния от центра и на единице расстояния равна γ.

Вариант 18

1) $y^2=8x,\ x=1.$

2) параболоида $8y=x^2+z^2$, заключенную в первом октанте. Параболоид ограничен плоскостью $y=16$.

3) $z^2=(x+4)^2,\ x^2+y^2=16.$

4) частью шара радиусом $\sqrt{8}$, находящейся в первом октанте, если плотность в каждой точке равна расстоянию от плоскости Oxy.

Вариант 19

1) $y^2=x,\ x=1,\ y=0\quad (y\geq 0).$

2) тела, ограниченную сферой $x^2+y^2+z^2=12$ и параболоидом $x^2+y^2=4z\quad (z\geq 0).$

3) $z=\dfrac{4}{x^2+y^2},\ z=0,\ x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=4.$

4) прямым круговым цилиндром радиусом 3, высотой 1, если плотность равна квадрату расстояния точки от центра основания цилиндра.

Вариант 20

1) $x^2+y^2=4,\ y=0\quad (y>0).$

2) сферы $x^2+y^2+z^2=9$, вырезанную цилиндром $x^2+y^2=4$.

3) $2z=x^2+y^2$, $z=0$, $x^2+y^2+2x=0$, $x^2+y^2-2x=0$.

4) шаром радиусом 2, если плотность пропорциональна кубу расстояния от центра и на единице расстояния равна γ .

Вариант 21

I) $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=2$ $(x\geq 0)$, $y=x\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$, $y=-x\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$.

2) цилиндра $x^2+z^2=4$ внутри цилиндра $x^2+y^2=4$.

3) $2z=4-x^2-y^2$, $z=0$, $x^2+y^2+2x=0$, $x^2+y^2-2x=0$. (внутри цилиндров).

4) общей частью двух шаров $x^2+y^2+z^2\leq R^2$, $x^2+y^2+z^2\leq 2Rz$, если плотность пропорциональна расстоянию от точки до плоскости Oxy.

Вариант 22

I) кардиоидой $\rho=1+\cos\varphi$.

2) конуса $z^2=2xy$, отсеченную плоскостями $x=4$, $y=4$ $(x\geq 0, y\geq 0)$.

3) $4z=16-x^2-y^2$, $x^2+y^2=4$, $z=0$ (вне цилиндра).

4) частью шара радиусом $\sqrt{2}$, находящейся в первом октанте, если плотность в каждой точке равна расстоянию до плоскости Oxy.

Вариант 23

I) $y^2=2x$, $y=x$.

2) параболоида $y^2+z^2=6x$, заключенную между цилиндром $y^2=3x$ и плоскостью $x=3$.

3) $x^2+y^2=4$, $x^2+z^2=4$.

4) сферическим слоем между поверхностями $x^2+y^2+z^2=4$, $x^2+y^2+z^2=16$, если плотность обратно пропорциональна расстоянию от начала координат.

Вариант 24

1) $x^2+y^2=9,\ y=0\ (y\geqslant 0)$.

2) $2z=xy$, расположенную внутри цилиндра $x^2+y^2=4$.

3) $2z=x^2-y^2;\ z=0,\ x=2$.

4) параболоидом $x^2+y^2=4z$ и сферой $x^2+y^2+z^2=12\ (z\geqslant 0)$, если плотность равна сумме квадратов координат точки.

Вариант 25

1) $y^2=5x,\ x=5,\ y=0\ (y\geqslant 0)$.

2) конуса $x^2-y^2=z^2$ внутри цилиндра $x^2+y^2=4x$.

3) $z^2=xy,\ x+y=2$.

4) общей частью двух шаров $x^2+y^2+z^2\leqslant 25,\ x^2+y^2+z^2\leqslant 10z$, если плотность пропорциональна расстоянию от точки до плоскости Oxy.

Вариант 26

1) $y=0,\ \dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{4}=1\ (y\geqslant 0)$.

2) шара $x^2+y^2+z^2\leqslant 4$ внутри цилиндров $x^2+y^2+2x=0$, $x^2+y^2-2x=0$.

3) $x+y+z=6,\ x^2+y^2=4,\ z=0$.

4) поверхностями $x^2+y^2-z^2=0,\ z=2$, если плотность равна аппликате точки.

Вариант 27

1) кардиоидой $\rho=7(1+\cos\varphi)$.

2) конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$, вырезанную цилиндром $(x^2+y^2)^2=4(x^2-y^2)$

Указание. Перейти к полярным координатам.

3) $z=2x,\ x^2+y^2=1,\ z=0$.

4) поверхностями $2x+z=4,\ x+z=2,\ y^2=2x,\ y=0\ (y>0)$, если плотность равна ординате точки.

Вариант 28

1) $y^2=16x,\ x=2.$

2) параболоида $2y=x^2+z^2$, расположенную в первом октанте и ограниченного плоскостью $y=4$.

3) $z^2=(x+2)^2,\ x^2+y^2=4.$

4) цилиндром $x^2+y^2\le 4,\ 0\le z\le 8$, если плотность пропорциональна квадрату расстояния от точки до оси цилиндра.

Вариант 29

1) $x^2+y^2=4\ (x\ge 0),\quad y=\pm x\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}.$

2) сферы $x^2+y^2+z^2=12$, внутри параболоида $x^2+y^2=4z.$

3) $x^2+y^2+z^2=64,\ x^2+y^2=16$ (вне цилиндра).

4) сферическим слоем между поверхностями $x^2+y^2+z^2=4,\ x^2+y^2+z^2=64$, если плотность обратно пропорциональна расстоянию точки от начала координат.

С О Д Е Р Ж А Н И Е

Тема I. Вычисление двойных интегралов в декартовых координатах........................ 3

Тема 2. Двойной интеграл в полярных координатах. 12

Тема 3. Приложения двойных интегралов........... 16

Тема 4. Вычисление тройных интегралов в декартовых координатах........................ 26

Тема 5. Замена переменных в тройном интеграле. Цилиндрические и сферические координаты. 32

Тема 6. Приложения тройных интегралов........... 35

П р и л о ж е н и е. Варианты индивидуальных домашних заданий.......................... 42

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Составитель К а р п и л о в а Ольга Михайловна

Редактор Н.Д.Ч а й н и к о в а
Техн.редактор Н.М.К а л е н ю к
Корректор Н.Д. Ч а й н и к о в а

Подписано в печать 04.02.91 Формат 60х84 1/16.
Бумага оберточная белая. Печать оперативная.
Усл.п.л. 3,0. Усл.кр.-отт. 3,1. Уч.-изд.л.2,8.
Тираж 300 экз. Заказ № 546. Бесплатно.

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени авиационный институт имени академика С.П.Королева.
443086 Куйбышев, Московское шоссе, 34.

Типография им. В.П.Мяги Куйбышевского полиграфического объединения. 443099 Куйбышев, ул. Венцека,60.