САМАРСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ имени академика С. П. КОРОЛЕВА

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ 2-го РОДА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

САМАРА 1992

Министерство науки, высшего образования
и технической политики Российской Федерации

Самарский ордена Трудового Красного Знамени
авиационный институт имени академика С.П.Королева

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ 2-го РОДА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Методические указания

Самара 1992

Составитель В.М.Б е з м е н о в

УДК 517.373

Криволинейные интегралы 2-го рода и их приложения: Метод.указания /Самар.авиац.ин-т; Сост.В.М.Б е з м е н о в. Самара, 1992. 20 с.

Содержатся теоретические вопросы и упражнения, примеры для устного решения и 30 вариантов индивидуальных заданий. В краткой форме излагается теоретический материал, необходимый для выполнения упражнений и индивидуальных заданий. Приводятся образцы решения типовых задач.

Предназначены для студентов 2-го курса специальности 01.02. Составлены на кафедре прикладной математики.

Печатаются по решению редакционно-издательского совета Самарского ордена Трудового Красного Знамени авиационного института имени академика С.П.Королева

Рецензент С.А.Ш у с т о в

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КРИВОЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛА 2-го РОДА

Пусть Γ - ориентированная кривая в пространстве; $u(M)$ - непрерывная функция, заданная на кривой Γ (рис. I).

По определению, криволинейный интеграл 2-го рода от функции $u(M)$ по кривой Γ есть

$$J=\int_\Gamma u(M)\,dx=$$

$$=\lim_{\delta_\tau\to 0}\sum_{k=1}^{n} u(P_k)\Delta x_k, \qquad (1)$$

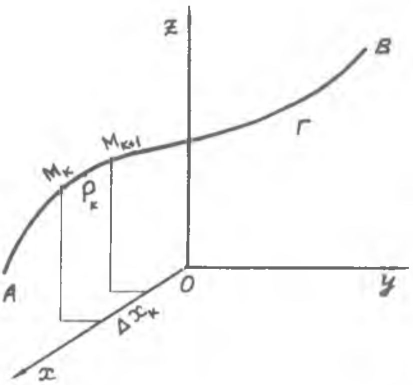


Рис. I

где δ_τ - мелкость разбиения кривой Γ ; Δx_k - проекция k -го участка кривой Γ на ось Ox, $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$; P_k - любая точка, принадлежащая k -му участку кривой. Указанный предел должен существовать и быть одним и тем же для любой последовательности разбиений кривой Γ , удовлетворяющей условию: $\delta_\tau\to 0$ при $n\to\infty$ и при любом выборе системы точек P_k .

З а м е ч а н и е. Аналогично определяются криволинейные интегралы 2-го рода вида $\int_\Gamma v(M)\,dy$ и $\int_\Gamma w(M)\,dz$.

Общий вид криволинейного интеграла 2-го рода:

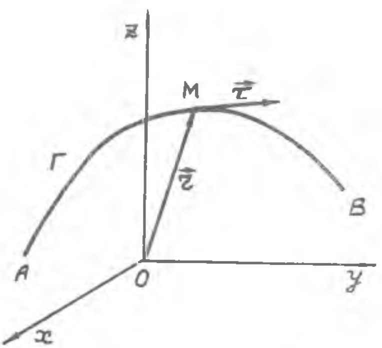
$$J=\int_\Gamma u(M)\,dx+v(M)\,dy+w(M)\,dz. \qquad (2)$$

Криволинейные интегралы 2-го рода обладают всеми свойствами определенных интегралов. Величина $\mathcal{J}$ криволинейного интеграла 2-го рода меняет знак на противоположный при смене направления интегрирования вдоль кривой Γ.

ВЫЧИСЛЕНИЕ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ 2-го РОДА

Криволинейные интегралы 2-го рода сводятся к криволинейным интегралам I-го рода.

Пусть Γ - ориентированная кривая в пространстве, $\vec{\tau}$ - вектор касательной к кривой Γ (рис.2). Имеем



$$dx = \cos\alpha\, ds,\quad dy = \cos\beta\, ds,$$

$$dz = \cos\gamma\, ds,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ - направляющие косинусы $\vec{\tau}$. Заменяя в выражении криволинейного интеграла 2-го рода dx, dy, dz указанными значениями, получаем

Р и с. 2

$$\int\limits_{\Gamma} u\,dx + v\,dy + w\,dz = \int\limits_{\Gamma} (u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma)\,ds. \quad (3)$$

Вычисление криволинейных интегралов 2-го рода сводится к вычислению определенных интегралов.

Ч а с т н ы е с л у ч а и:

I. Кривая Γ задана параметрически:

$$\Gamma = \left\{ \vec{r} = \vec{r}(t);\ \alpha \leqslant t \leqslant \beta \right\}.$$

Тогда

$$\int\limits_{\Gamma} u(M)\,dx + v(M)\,dy + w(M)\,dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} (u(t)x'(t) + v(t)y'(t) + w(t)z'(t))\,dt. \quad (4)$$

2. Плоская кривая Γ задана в декартовых координатах:

$$\Gamma=\{y=y(x);\ a\leqslant x\leqslant b\}.$$

В этом случае имеем

$$\int\limits_{\Gamma} u(M)dx=\int\limits_{a}^{b} u(x)dx;\quad \int\limits_{\Gamma} v(M)dy=\int\limits_{a}^{b} v(x)y'(x)dx. \qquad (5)$$

Пример I. Вычислить $\int\limits_{\Gamma} yz\,dx+z\sqrt{R^2-y^2}\,dy+xy\,dz$ по винтовой линии $x=R\cos t$, $y=R\sin t$, $z=\frac{a}{2\pi}t$ от точки $t=0$ до точки $t=\frac{\pi}{2}$.

Решение: $$J=\frac{aR^2}{2\pi}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}(-t\sin^2 t+t\cos^2 t+\sin t\cos t)dt=$$
$$=\frac{aR^2}{2\pi}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} t\cos 2t\,dt.$$

Ответ: $J=-\frac{aR^2}{4\pi}$.

Пример 2. Вычислить $\int\limits_{\Gamma} y^2dx+x^2dy$ по кривой $y^2=x$ от точки A(0,0) до точки B(I,I).

Решение: $$J=\int\limits_{0}^{1}\left(x+\frac{x^{3/2}}{2}\right)dx.$$

Ответ: $J=\frac{7}{10}$,

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ 2-го РОДА, НЕ ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПУТИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Если выполняется условие

$$u\,dx+v\,dy+w\,dz=d\varphi, \qquad (6)$$

то для любого пути, соединяющего точки A и B, имеем

$$\int\limits_{\overline{AB}} u\,dx+v\,dy+w\,dz=\varphi(B)-\varphi(A). \qquad (7)$$

1/2 2-1435

Необходимые и достаточные условия независимости криволинейного интеграла 2-го рода от пути интегрирования записываются следующим образом:

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial z}; \quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial w}{\partial x}; \quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial y}. \qquad (8)$$

З а м е ч а н и е. В случае выполнения необходимых и достаточных условий (8) для любого контура C :

$$\oint_C u\,dx+v\,dy+w\,dz=0. \qquad (9)$$

Пример 3. Вычислить $\int_\Gamma (2xy+z^2)dx+(2yz+x^2)dy+(2zx+y^2)dz$

по конической винтовой линии $x=t\cos t,\ y=t\sin t,\ z=t$ от точки $t=\pi$ до $t=0$.

Решение: $J=\int_{\overset{\frown}{AB}} d(x^2y+y^2z+z^2x),\ A(-\pi,0,\pi),\ B(0,0,0).$

Ответ: $J=\pi^3.$

Пример 4. Вычислить $\int_\Gamma \frac{(x+1)dy-y\,dx}{(x+1)^2+y^2}$

по параболе $y=2x^2$ от точки А $(0,0)$ до точки $B(1,2)$.

Решение: $J=\int_\Gamma d\,\mathrm{arctg}\frac{y}{x+1}.$

Ответ: $J=\frac{\pi}{4}.$

ФОРМУЛА ГРИНА

Пусть G – односвязная плоская область; C – контур, ограничивающий G ; $u(x,y)$, $v(x,y)$ – непрерывно дифференцируемые в $\bar{G}$ функции.

Имеет место следующее равенство:

$$\oint_C u\,dx+v\,dy=\iint_G\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx\,dy. \qquad (10)$$

Это – формула Грина.

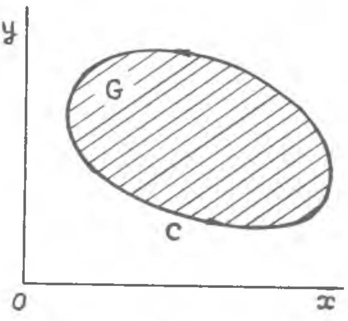
З а м е ч а н и е. При положительном направлении обхода по контуру C область G остается слева (рис.3).

Пример 5. С помощью формулы Грина вычислить $\oint\limits_C xy^2dy - x^2y\,dx$ по окружности $x^2+y^2=R^2$.

Решение:

$$J=\iint\limits_G (x^2+y^2)\,dx\,dy = 2\pi\int\limits_0^R \rho^3 d\rho.$$

Ответ: $J=\dfrac{\pi R^4}{2}$.



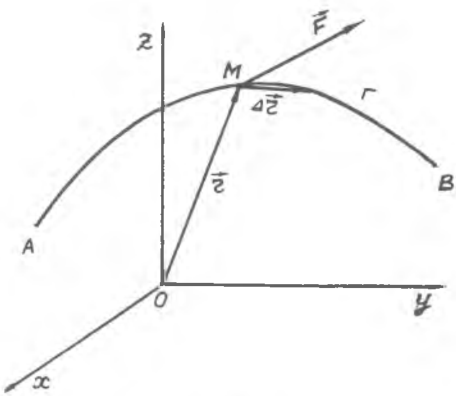
Р и с. 3

ПРИЛОЖЕНИЯ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ 2-го РОДА

Работа силового поля

Пусть Γ - траектория движения материальной точки M в силовом поле; $\vec F$ - сила, действующая на точку M : $\vec F = Xi + Yj + Zk$; $\Delta\vec z$ - перемещение точки M (рис. 4). Работа, совершаемая силой $\vec F$ при перемещении материальной точки M вдоль кривой Γ , равна

$$A=\int\limits_\Gamma \vec F\cdot d\vec z = \int\limits_\Gamma X\,dx + Y\,dy + Z\,dz. \qquad (11)$$



Р и с. 4

Ч а с т н ы й с л у ч а й. Если силовое поле $\vec F(M)$ - потенциальное, то $\vec F\cdot d\vec z = d\varphi$, где $\varphi=\varphi(M)$ - потенциал поля. Следовательно, работа, совершаемая потенциальным силовым полем при перемещении материальной точки M от точки A до точки B вдоль любого пути, соединяющего эти точки, равна

$$A=\int\limits_{\overset{\frown}{AB}}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\varphi(B)-\varphi(A). \qquad (12)$$

Задача I. Поле образовано силой, имеющей направление отрицательной полуоси ординат и равной квадрату абсциссы точки приложения. Найти работу поля при перемещении материальной частицы по параболе $y^2=1-x$ от точки $A(0,1)$ до точки $B(1,0)$.

Решение: $\vec{F}=-x^2\vec{j}\Rightarrow A=-\int\limits_{\Gamma}x^2dy=\int\limits_0^1(1-2y^2+y^4)\,dy.$

Ответ: $A=\frac{8}{15}$.

Задача 2. Вычислить работу силы $\vec{F}(x+y^2, 2xy-8)$ при перемещении материальной частицы из точки (2,0) в точку (0,2).

Решение: $\varphi(x,y)=\frac{x^2}{2}+xy^2-8y$; $\varphi(A)=2$; $\varphi(B)=-16$.

Ответ: $A=-18$.

Восстановление функции по ее полному дифференциалу

Пусть

$$d\varphi=u\,dx+v\,dy+w\,dz.$$

Имеем:

$$\varphi(M)=\int\limits_{\overset{\frown}{M_0M}}u\,dx+v\,dy+w\,dz, \qquad (13)$$

где $\overset{\frown}{M_0M}$ – любая кривая, соединяющая произвольную точку M_0 с текущей точкой $M(x,y,z)$.

Замечания: I. Функция $\varphi(M)$ находится с точностью до произвольной аддитивной постоянной.

2. На практике интегрирование в формуле (I3) удобно вести по пути, состоящему из отрезков, параллельных координатным осям; точку M_0 выбираем из соображения наибольшей простоты вычисления интеграла.

Задача 3. Определить функцию $\varphi(x,y)$, если

$$d\varphi=\frac{x^2dy-2xydx}{x^4+y^2}.$$

Решение: $M_0(1,0)\Longrightarrow\ \varphi(x,y)=\int_0^y\frac{x^2dy}{x^4+y^2}.$

Ответ: $\varphi(x,y)=\operatorname{arctg}\frac{y}{x^2}+C.$

Задача 4. Найти функцию $\varphi(x,y,z)$, если

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=y+2xz^2;\ \frac{\partial\varphi}{\partial y}=x+2yz;\ \frac{\partial\varphi}{\partial z}=y^2+2x^2z.$$

Решение: $M_0(0,0,0)$.

Ответ: $\varphi(x,y,z)=xy+y^2z+x^2z^2+C.$

Вычисление площади плоской фигуры, ограниченной контуром

Пусть G – односвязная плоская область, ограниченная контуром C. Площадь плоской области G может быть вычислена по одной из следующих трех формул:

$$S=\oint_C -ydx;\quad S=\oint_C xdy;$$

$$S=\frac{1}{2}\oint_C xdy-ydx. \tag{14}$$

Задача 5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ и осью Ox.

Решение: $S=-\oint_C ydx=\int_0^{2\pi}y(t)x'(t)dt=a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2dt.$

Ответ: $S=3\pi a^2.$

Задача 6. Найти площадь фигуры, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Решение: $S=\frac{1}{2}\oint\limits_C xdy-ydx;$

$x=a\cos t;\ y=b\sin t;\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi;\ xdy-ydx=ab\,dt.$

Ответ: $S=\pi ab$.

Контрольные вопросы

1. Определение криволинейного интеграла 2-го рода как предела интегральных сумм.
2. Физический смысл криволинейного интеграла 2-го рода.
3. Основные свойства криволинейных интегралов 2-го рода.
4. Сведение криволинейного интеграла 2-го рода к криволинейному интегралу 1-го рода.
5. Вычисление криволинейных интегралов 2-го рода.
6. Криволинейные интегралы 2-го рода, не зависящие от пути интегрирования; необходимые и достаточные условия.
7. Формула Грина.
8. Работа силового поля. Случай потенциального силового поля.
9. Восстановление функции по ее полному дифференциалу.
10. Вычисление площади плоской фигуры, ограниченной контуром, с помощью криволинейных интегралов.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать, что для криволинейного интеграла 2-го рода справедлива оценка

$$\left|\int\limits_\Gamma Pdx+Qdy\right|\leqslant Ml,$$

где l – длина дуги кривой Γ; $M=\max\limits_\Gamma\sqrt{P^2+Q^2}$.

2. Оценить интеграл

$$J(R)=\oint\frac{ydx-xdy}{(x^2+xy+y^2)},$$

где C – окружность $x^2+y^2=R^2$. Показать, что $\lim\limits_{R\to\infty}J(R)=0$.

3. Вычислить интеграл

$$J=\oint_C \frac{(x+y)dx+(y-x)dy}{x^2+y^2},$$

где C - окружность $x^2+y^2=R^2$.

4. Вычислить интеграл

$$J=\oint_C \frac{xy(ydx-xdy)}{x^2+y^2},$$

где C - правый лепесток лемнискаты $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$.

5. Показать, что если $f(u)$ - непрерывная функция и C - кусочно-гладкий контур, то

$$\oint_C f(x^2+y^2)(xdy+ydx)=0.$$

6. Определить функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ так, чтобы криволинейный интеграл

$$J=\oint_C P(x+\alpha,\,y+\beta)dx+Q(x+\alpha,\,y+\beta)dy$$

для любого контура C не зависел от постоянных α и β.

7. Каким условиям должна удовлетворять функция $F(x,y)$, чтобы криволинейный интеграл $J=\int_\Gamma F(x,y)(ydx+xdy)$ не зависел от пути интегрирования Γ ?

8. С помощью формулы Грина преобразовать криволинейный интеграл

$$J=\oint_C \sqrt{x^2+y^2}\,dx+y(xy+\ln(x+\sqrt{x^2+y^2}))dy,$$

где C - контур, ограничивающий область G.

9. Вычислить интеграл

$$J=\oint_C \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2},$$

если: а) контур C охватывает начало координат; б) начало координат не охватывается контуром C.

10. Найти потенциальную функцию силы $\vec{F}=(X,Y,Z)$ и определить работу силы на данном участке пути, если:

а) $X=Y=0$, $Z=-mg$ (сила тяжести); материальная точка перемещается из положения $A(x_1,y_1,z_1)$ в положение $B(x_2,y_2,z_2)$;

б) $X=-\mu \frac{x}{r^3}$, $Y=-\mu \frac{y}{r^3}$, $Z=-\mu \frac{z}{r^3}$,

где $\mu = const$ (сила ньютоновского притяжения); материальная точка перемещается из положения $A(a, b, c)$ в бесконечность;

в) $X=-k^2 x$, $Y=-k^2 y$, $Z=-k^2 z$,

где $k=const$ (упругая сила); материальная точка перемещается с поверхности сферы $x^2+y^2+z^2=R_1^2$ на поверхность сферы $x^2+y^2+z^2=R_2^2$.

11. Вычислить площадь петли кривой

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{2n+1}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2n+1}=c\left(\frac{x}{a}\right)^n\left(\frac{y}{b}\right)^n$$

$(a>0,\ b>0,\ c>0)$.

12. Вычислить площадь, ограниченную лемнискатой

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2).$$

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

А. Применяя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл

$$J=\oint_C P\,dx+Q\,dy:$$

1. $P=-x^2y$, $Q=xy^2$; C – окружность $x^2+y^2=R^2$.

2. $P=e^{y^2-x^2}\cos 2xy$, $Q=e^{y^2-x^2}\sin 2xy$; $C: x^2+y^2=R^2$.

3. $P=(x+y)^2$, $Q=-(x^2+y^2)$; C – контур треугольника ABC, $A(1,1)$, $B(3,2)$, $C(2,5)$.

4. $P=e^x(1-\cos y)$, $Q=e^x(\sin y-y)$; $C: y=0,\ y=\sin x$, $0\leqslant x\leqslant \pi$.

5. $P=\sqrt{x^2+y^2}$, $Q=y(xy+\ln(x+\sqrt{x^2+y^2}))$; C – контур прямоугольника, ограниченного прямыми $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$, $y = 2$.

B. Вычислить площадь фигуры, ограниченной контуром C :

1. C: $x=a\sin t$, $y=b\sin 2t$.

2. C: $x=a\cos t$, $y=b\sin^3 t$.

3. C: $x=a\cos t$, $y=b\sin t\cos^2 t$.

4. C: $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$.

5. C: $x=a(2\cos t-\cos 2t)$, $y=a(2\sin t-\sin 2t)$.

C. Вычислить площадь фигуры, ограниченной петлей кривой Γ :

1. Γ: $y^2=x(x-1)^2$.

2. Γ: $4(y^2-x^2)+x^3=0$.

3. Γ: $x^3=y^2-x^2$.

4. Γ: $x^3+y^3=3axy$.

5. Γ: $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^{12}=xy$.

Д. Найти потенциальную функцию $\varphi(x,y,z)$ силы $\vec{F}(x,y,z)$ и определить работу силы при перемещении материальной частицы из точки A в точку B :

1. $\vec{F}=(x^2-2yz;\ y^2-2xz;\ z^2-2xy)$; $A(1,2,1)$, $B(2,1,2)$.

2. $\vec{F}=(1-\frac{1}{y}+\frac{y}{z};\ \frac{x}{z}+\frac{x}{y^2};\ -\frac{xy}{z^2})$; $A(0,1,2)$, $B(1,2,3)$.

3. $\vec{F}=(yz;\ zx;\ xy)$; $A(1,1,1)$, $B(3,4,5)$.

4. $\vec{F}=(\frac{x}{r};\ \frac{y}{r};\ \frac{z}{r})$; $(r=\sqrt{x^2+y^2+z^2})$; $A(1,0,2)$, $B(2,1,1/2)$.

5. $\vec{F}=\dfrac{yzi+xzj+xyk}{1+x^2y^2z^2}$; $A(1,0,2)$, $B(2,1,1/2)$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ УСТНОГО РЕШЕНИЯ

$=\oint\limits_C x\,dy$

1. Вычислить интеграл $J=\oint\limits_C x\,dy$; $C: x=a\cos t,\ y=b\sin t$.

2. Вычислить интеграл $J=\oint\limits_C y\,dx$; $C: x^2+y^2=R^2$.

3. Вычислить интеграл $J=\oint\limits_C x\,dy+y\,dx$; $C: x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t$.

4. Вычислить интеграл $J=\oint\limits_C x\sin x\,dx-y\cos y\,dy$; C - контур треугольника ABC; $A(0,0)$, $B(2,1)$, $C(1,2)$.

5. Вычислить интеграл $\oint\limits_C x\,dy-y\,dx$; C - контур прямоугольника, ограниченного прямыми $x=0$, $x=2$, $y=0$, $y=4$.

6. Вычислить интеграл $\oint\limits_C (x+y)\,dx+(x-y)\,dy$; $C: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ

Индивидуальное задание содержит две задачи на вычисление криволинейных интегралов 2-го рода. В первой задаче кривая интегрирования Γ задана явным образом, а во второй - параметрически. В случае необходимости индивидуальное задание может быть дополнено задачами из раздела "Задачи для самостоятельной работы".

Задача I. Вычислить интеграл $J=\int\limits_\Gamma P\,dx+Q\,dy$ по кривой Γ, заданной явным образом, от точки A до точки B :

1. $P=x-\dfrac{1}{y}$; $Q=y+\dfrac{1}{x}$; $\Gamma: y=x^2$; $A(1,1)$, $B(2,4)$.

2. $P=xy$, $Q=x+y$; $\Gamma: y=\sin x$; $x_A=\pi$, $x_B=0$.

3. $P=y^2$, $Q=x^2$; Γ – ломаная ABC; $A(0,0)$, $B(2,1)$, $C(3,4)$.

4. $P=x^2-y$, $Q=y^2+x$; Γ – ломаная ABC; $A(0,0)$, $B(2,1)$, $C(3,1)$.

5. $P=xy-y^2$, $Q=x$; $\Gamma: y=2x$; $x_A=0$, $x_B=1$.

6. $P=xy-x$, $Q=x^2-y$; $\Gamma: y=2x^2$; $x_A=1$, $x_B=3$.

7. $P=xy^2+y$, $Q=x^2-y^2$; $\Gamma: y=2\sqrt{x}$; $A(0,0)$, $B(2,2)$.

8. $P=x^2-y^2$, $Q=x^2+y^2$; $\Gamma: y=2\sqrt{1-x^2}$; $A(0,2)$, $B(2,0)$.

9. $P=4x\sin^2 y$, $Q=y\cos^2 2x$; Γ – отрезок AB; $A(0,0)$, $B(3,6)$

10. $P=-x\cos y$, $Q=y\sin x$; Γ – отрезок AB; $A(0,0)$, $B(\pi,2\pi)$.

11. $P=x^2-2xy$, $Q=2xy+y^2$; $\Gamma: y=x^2$; $A(1,1)$, $B(2,4)$.

12. $P=\sin y$, $Q=\sin x$; Γ – отрезок AB; $A(0,\pi)$, $B(\pi,0)$.

13. $P=x+y^2$; $Q=x^2-y$; $\Gamma: 2y=\sqrt{4-x^2}$; $x_A=0$, $x_B=1$.

14. $P=x^2+y^2$, $Q=x^2-y^2$; $\Gamma: y=1-|1-x|$; $x_A=0$, $x_B=2$.

15. $P=x^2-2xy$, $Q=y^2-2xy$; $\Gamma: y=x^2$; $x_A=-1$; $x_B=1$.

16. $P=Q=\dfrac{1}{|x|+|y|}$; Γ – ломаная ABC; $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(-1,0)$.

17. $P=\cos y$, $Q=\sin x$; Γ – отрезок AB; $A(0,\pi)$, $B(\pi,0)$.

18. $P=y$, $Q=-y+x^2$; $\Gamma: y=2x-x^2$; $x_A=0$, $x_B=2$.

19. $P=\dfrac{1}{x}$, $Q=-\dfrac{1}{y}$; $\Gamma: y=\sqrt{4-x^2}$; $x_A=0$, $x_B=2$.

20. $P=x^2y$, $Q=x^3$; $\Gamma: x=y^2$; $A(0,0)$, $B(1,1)$.

21. $P=xy$, $Q=y^2-x^2$; Γ – отрезок AB; $A(1,1)$, $B(3,4)$.

22. $P=y^2$, $Q=x^2-y$; $\Gamma: y=x-x^2$; $x_A=1$, $x_B=0$.

23. $P=y^2-x^2$, $Q=xy$; $\Gamma: x=\sqrt{1-y^2}$; $y_A=0$, $y_B=1$.

24. $P=y^2+xy$, $Q=xy-x^2$; $\Gamma: y=x^2$; $A(1,1)$, $B(2,4)$.

25. $P=xy$, $Q=x-y$; $\Gamma: y=\sin x$; $x_A=0, x_B=\dfrac{\pi}{2}$.

26. $P=x+x^2y$, $Q=y^2-x^2$; $\Gamma: y=\sqrt{x}$; $A(0,0)$, $B(4,2)$.

27. $P=x^2+2xy$, $Q=2xy-y^2$; $\Gamma: y=x^2$; $A(1,1)$, $B(2,4)$.

28. $P=xy^2$, $Q=y^3$; $\Gamma: x=y^2$; $y_A=0$, $y_B=1$.

29. $P=x-y^3$, $Q=xy$; $\Gamma: x=y^2$; $A(0,0)$, $B(4,2)$.

30. $P=x^2y^2$, $Q=x^2+y^2$; Γ - отрезок AB; $A(1,1)$, $B(2,3)$.

Задача 2. Вычислить интеграл $J=\int Pdx+Qdy$ по параметрически заданной кривой $\Gamma=\{x=x(t),\ y=y(t);\ \alpha\leqslant t\leqslant\beta\}$:

1. $P=2-y$, $Q=x$; $\Gamma: x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$; $0\leqslant t\leqslant\pi$.

2. $P=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$, $Q=\dfrac{y-x}{x^2+y^2}$; $\Gamma: x=2\sin t$, $y=2\cos t$; $0\leqslant t\leqslant\pi/2$.

3. $P=y^2+x$, $Q=x^2-y$; $\Gamma: x=\sin t$, $y=2\cos t$; $0\leqslant t\leqslant\pi/2$.

4. $P=y^2$, $Q=x^2$; $\Gamma: x=\cos t$, $y=2\sin t$; $0\leqslant t\leqslant\pi/2$.

5. $P=\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $Q=-\dfrac{x}{x^2+y^2}$; $\Gamma: x=2\cos t$, $y=2\sin t$; $\pi/2\leqslant t\leqslant\pi$.

6. $P=x^2y$, $Q=-xy^2$; $\Gamma: x=\sqrt{\cos t}$, $y=\sqrt{\sin t}$; $0\leqslant t\leqslant\pi/2$.

7. $P=-\dfrac{1}{y}$, $Q=\dfrac{1}{x}$; $\Gamma: x=\cos t$, $y=\sin t$; $0\leqslant t\leqslant\pi$.

8. $P = y(2x-1),\ Q = x(x+1);\ \Gamma: x = 3\cos t,\ y = 3\sin t;$
$0 \le t \le \pi/2.$

9. $P = x^2 + y^2,\ Q = x^2 - y^2;\ \Gamma: x = \sin t,\ y = \cos t;\ \frac{\pi}{2} \le t \le \pi.$

10. $P = x + y\sqrt{x^2+y^2},\ Q = y - x\sqrt{x^2+y^2};\ \Gamma: x = \cos t,\ y = \sin t;$
$0 \le t \le \pi.$

11. $P = y^2 - y,\ Q = 2xy + x;\ \Gamma: x = 2\sin t,\ y = 2\cos t;$
$\pi \le t \le 2\pi.$

12. $P = xy - x,\ Q = \frac{x^2}{2};\ \Gamma: x = t^2,\ y = 2t;\ 0 \le t \le 1.$

13. $P = x^2 - y^2,\ Q = x^2 + y^2;\ \Gamma: x = 3\cos t,\ y = 2\sin t;$
$\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{3\pi}{2}.$

14. $P = y^2 - x^2,\ Q = x^2 - y^2;\ \Gamma: x = \sin t,\ y = 2\cos t;$
$0 \le t \le \pi.$

15. $P = y(x-y),\ Q = x;\ \Gamma: x = t,\ y = 2t^2;\ 0 \le t \le 1.$

16. $P = (x+y)^2,\ Q = -(x^2+y^2);\ \Gamma: x = 2t^2,\ y = t;\ 0 \le t \le 1.$

17. $P = yx,\ Q = y + x^2;\ \Gamma: x = t,\ y = t(1-t);\ 0 \le t \le 1.$

18. $P = \frac{1}{x},\ Q = -\frac{1}{y};\ \Gamma: x = 2\cos t,\ y = 2\sin t;\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$

19. $P=x^2y,\ Q=x^3;\ \Gamma: x=\sqrt{t},\ y=t,\quad 0\leqslant t\leqslant 1.$

20. $P=x^2-y^2,\ Q=xy;\ \Gamma: x=\cos t,\ y=\sin t;\ \pi\leqslant t\leqslant 2\pi.$

21. $P=x-\frac{1}{y},\ Q=y+\frac{1}{x};\ \Gamma: x=t,\ y=t^2;\ 1\leqslant t\leqslant 2.$

22. $P=\frac{x}{y},\ Q=\frac{1}{y-1};\ \Gamma: x=t-\sin t,\ y=1-\cos t;$
$\frac{\pi}{6}\leqslant t\leqslant \frac{\pi}{3}.$

23. $P=\frac{x^2}{x^{5/3}+y^{5/3}},\ Q=\frac{-y^2}{x^{5/3}+y^{5/3}};\ \Gamma: x=\cos^3 t,\ y=\sin^3 t;$
$0\leqslant t\leqslant \pi.$

24. $P=x,\ Q=xy;\ \Gamma: x=2(1+\cos t),\ y=2\sin t;\ 0\leqslant t\leqslant \pi.$

25. $P=\frac{x-y}{x^2+y^2},\ Q=\frac{x+y}{x^2+y^2};\ \Gamma: x=\cos t,\ y=\sin t;$
$\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant \pi.$

26. $P=x^2-y^2,\ Q=x^2+y^2;\ \Gamma: x=\sin t,\ y=3\cos t;$
$0\leqslant t\leqslant \pi.$

27. $P=x^2+y^2,\ Q=y^2-x^2;\ \Gamma: x=\cos t,\ y=2\sin t;$
$0\leqslant t\leqslant \frac{\pi}{2}.$

28. $P=xy^2,\ Q=yx^2;\ \Gamma: x=\sqrt{\cos t},\ y=\sqrt{\sin t};$
$0\leqslant t\leqslant \pi/2.$

29. $P = x(2y+1)$, $Q = y(y-1)$; $\Gamma: x = 2\sin t$, $y = 2\cos t$;
$0 \leqslant t \leqslant \pi$.

30. $P = x(y-x)$, $Q = x^2 - y$; $\Gamma: x = \cos t$, $y = 2\sin t$;
$0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Библиографический список

1. К у д р я в ц е в Л.Д. Математический анализ: Т.II. М.: Высш.шк., 1973.

2. Б е р м а н Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М.: Наука, 1985.

3. Д е м и д о в и ч Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.:Наука, 1977.

4. Криволинейные интегралы I-го рода и их приложения: Метод. указания /Сост. В.М.Б е з м е н о в; Самар. авиац.ин-т. Самара,1991.

5. К у з н е ц о в Л.А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты). М.: Высш.шк., 1983.

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ 2-го РОДА
И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ
Составитель Б е з м е н о в Виталий Михайлович

Редактор Н.Д.Ч а й н и к о в а
Техн.редактор Г.А.У с а ч е в а
Корректор Т.П.Ж б а н н и к о в а

Подписано в печать 10.02.92. Формат 60х84 1/16.
Бумага оберточная. Печать офсетная. Усл.печ.л. 1,2.
Усл.кр.-отт. 1,3. Уч.-изд.л. 1,1. Тираж 300 экз.
Заказ № 1435. Бесплатно.

Самарский ордена Трудового Красного Знамени
авиационный институт имени академика С.П.Королева.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

Тип.им.В.П.Мяги Самарского полиграфического
объединения. 443099 Самара, ул. Венцека,60.