МИНИСТЕРСТВО НАУКИ, ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
И ТЕХНИЧЕСКОЙ ПОЛИТИКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

САМАРСКИЙ ордена ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ им. АКАДЕМИКА С. П. КОРОЛЕВА

ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Методические указания
к выполнению индивидуальных домашних заданий

САМАРА 1992

Составитель Л. Н. Прокофьев

УДК 517

Линейные пространства: Метод. указания /Самар. авиац. ин-т; Сост. Л. Н. Прокофьев. Самар, 1992. 47 с.

Содержатся краткие теоретические сведения, решения типовых задач и варианты индивидуальных заданий (25 вариантов) по важному разделу линейной алгебры — линейным пространствам

Предназначены для студентов Самарского авиационного института (специальности 01.02 и 22.02), могут быть полезны также при составлении контрольных и самостоятельных работ. Составлены на кафедре «Прикладная математика».

Печатаются по решению редакционно-издательского совета Самарского ордена Трудового Красного Знамени авиационного института имени академика С. П. Королева

Рецензент А. А. Калентьев

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ.
ТИПОВЫЕ ПРИМЕРЫ

Определение линейного пространства.

Пусть P - произвольное числовое поле.

Определение. Множество V называется линейным пространством над полем P, а его элементы - векторами, если:

а) задан закон (операция сложения), по которому любым двум элементам x и y из V ставится в соответствие элемент из , называемый их суммой и обозначаемый $x+y$;

б) задан закон (операция умножения на число), по которому элементу x из V и числу α из P ставится в соответствие элемент из V, называемый произведением x на α и обозначаемый αx;

в) $\forall x, y, z \in V$ и $\forall \alpha, \beta \in P$ выполнены следующие требования-аксиомы:

1^0. $x+y=y+x$.

2^0. $(x+y)+z=x+(y+z)$.

3^0. Существует элемент $\theta \in V$ такой, что $\forall x \in V$ выполнено равенство $x+\theta=x$.

4^0. $\forall x \in V$ существует элемент "$-x$" $\in V$, такой, что $x+(-x)=\theta$.

5^0 $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$,

6^0. $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$.

$7^0.\ \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x.$

$8^0.\ 1\cdot x = x.$

Вектор "$-x$" называется противоположным вектору x, вектор θ называется нулевым вектором или нулем. Векторы обозначаются малыми латинскими буквами (за исключением нулевого, который обозначается греческой буквой θ), а числа, как правило, греческими.

Линейное пространство над полем R называется вещественным, а над полем C – комплексным.

Если указана природа элементов $x, y, z, \ldots$ и правила действий над ними (аксиомы 1^0–8^0 выполнены), мы будем называть линейное пространство конкретным и использовать для него индивидуальное обозначение.

<u>Пример 1</u>. Пространство V_3 – это совокупность векторов (направленных отрезков) в пространстве. Сложение и умножение на число определяются по правилам векторной алгебры. Сумма векторов есть вектор, произведение вектора на число есть вектор. Выполнение аксиом показано в разд. "Векторная алгебра".

<u>Пример 2</u>. Пространство R^n – это совокупность упорядоченных наборов из n действительных чисел. Если $x=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ и $y=(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$, то $x+y \stackrel{def}{=} (\xi_1+\eta_1, \xi_2+\eta_2, \ldots, \xi_n+\eta_n)$, а $\lambda x \stackrel{def}{=} (\lambda\xi_1, \ldots, \lambda\xi_n)$, где $\lambda \in R$. Таким образом, $x+y \in R^n$, $\lambda x \in R^n$. Аксиомы 1^0–8^0 легко проверяются (проверить). В частности, "$-x$" есть набор $(-\xi_1, -\xi_2, \ldots, -\xi_n)$, нулевой вектор θ – это набор из нулей: $\theta = (0, 0, \ldots, 0)$.

Фактически мы имели дело с элементами этого пространства, рассматривая строки (столбцы) матриц.

<u>Пример 3</u>. Множество $C_{[a,b]}$ вещественных функций, непрерывных на $[a,b]$, с обычными определениями суммы и произведения на действительные числа образует линейное пространство, в котором роль элемента θ играет функция, тождественно равная "0" на $[a,b]$ (убедиться в этом).

<u>Пример 4</u>. Нулевое пространство $\{\theta\}$ – это пространство, состоящее из одного элемента. Единственный элемент по необходимости является нулевым и самому себе противоположным.

<u>Пример 5</u>. Пространство $R_n(x)$ – вещественное пространство, элементами которого являются многочлены с вещественными коэффициен-

тами, степень каждого из которых не превышает n. Многочлен степени k

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k, \; a_k \neq 0 \qquad (I)$$

мы понимаем как объект, вполне определяемый упорядоченным набором $(a_0, a_1, \ldots, a_k)$ действительных коэффициентов, а равенство как совпадение одноименных коэффициентов многочленов. Сами действительные числа считаются многочленами нулевой степени, за исключением числа "0", которое играет роль нулевого элемента в пространстве $R_n(x)$ и считается многочленом, для которого не определена степень. Операции над многочленами (сложение и умножение на число) сводятся к одноименным операциям над упорядоченными наборами их коэффициентов.

На многочлен (I) возможен взгляд как на функцию переменного x, однако определение равенства двух функций отличается от принятого выше "алгебраического" определения равенства двух многочленов, так как функции считаются равными, если равны их значения при всех значениях переменной. Оба определения равенства многочленов равносильны.

З а м е ч а н и е. Все свойства элементов конкретных линейных пространств, основанные только на аксиомах $1^0 - 8^0$, справедливы и для элементов любых других линейных пространств. Например, анализируя доказательство теоремы Крамера о решении системы линейных уравнений

$$a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{in} x_n = b_i \;, \quad i = \overline{1, n} \;,$$

мы можем заметить, что в той части, которая касалась величин b_1, $b_2, \ldots, b_n$ оно (доказательство) основывалось только на том факте, что эти величины можно было складывать и умножать на числа из P, причем использовались правила $1^0 - 8^0$. Это позволяет обобщить теорему Крамера на системы, в которых величины $b_1, b_2, \ldots, b_n$ являются векторами произвольного линейного пространства V (например пространства V_3). Отметим только, что значения неизвестных будут тогда также элементами этого пространства V.

Пример 6. Решить систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \bar{i} - 3\bar{j}, \\ x_1 - x_2 = \bar{i} + 5\bar{j}. \end{cases}$$

Решение.

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}\bar{i}-3\bar{j} & 1\\ i+5j & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}}=i+j,\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=-4\bar{j}.$$

Заметим теперь, что во всяком линейном пространстве можно определить вычитание векторов как операцию, обратную сложению. Положим по определению: $z=x-y$, если $z+y=x$.

Пример 7. Доказать теорему: для того, чтобы из вектора x вычесть вектор y, достаточно к вектору x прибавить противоположный вектору y вектор $-y$, т.е. $x-y=x+(-y)$.

Как следствие этой теоремы получаем утверждение: если $x+y=\theta$, то $x=-y$. Обратно, если $x=-y$, то $x+y=\theta$.

Т.о., в векторных равенствах слагаемые из одной части в другую можно переносить с противоположным знаком.

Из определения линейного пространства немедленно вытекает справедливость следующих утверждений:

1. В линейном пространстве существует единственный нулевой вектор.

2. В линейном пространстве каждый вектор имеет единственный противоположный вектор.

3. $\forall x\in V \quad 0\cdot x=\theta$,

4. $\forall \alpha\in P \quad \alpha\cdot\theta=\theta$,

5. Если $\alpha x=\theta$, то или $\alpha=0$ или $x=\theta$.

6. $\forall x\in V \, (-1)x=-x$,

7. $(-\alpha)x=-(\alpha x)$, $\alpha(-x)=-(\alpha x)$.

8. $\alpha(x-y)=\alpha x-\alpha y$, $(\alpha-\beta)x=\alpha x-\beta x$.

Линейная зависимость и независимость векторов

Пусть P – произвольное числовое поле, V – линейное пространство над ним и пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (I) – произвольная система векторов пространства V.

Определение. Система векторов (I) называется линейно зависимой над полем P, если в поле P существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, не все равные "0", и такие, что

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n = \theta. \tag{2}$$

Если же равенство (2) выполняется лишь в том случае, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots \lambda_n = 0$, то система векторов (I) называется линейно независимой.

Так как равенство $\lambda x = 0$, где $\lambda \neq 0$ выполняется лишь при $x = \theta$, то из последнего утверждения вытекает следующее утверждение:

система (I) при $n = 1$ линейно зависима только в том случае, когда $x_1 = \theta$, если же $x_1 \neq \theta$, то система из одного вектора x_1 линейно независима.

О п р е д е л е н и е. Пусть $x_1, x_2, \ldots x_n$ - произвольная система векторов пространства V, а $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (2) - произвольная система чисел поля P. Вектор $y = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ называется линейной комбинацией векторов системы (I) с коэффициентами (2).

Пример 8. Доказать теорему: при $n \geqslant 2$ система векторов (I) линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один ее вектор является линейной комбинацией остальных.

Пример 9. Доказать теорему: если какая-нибудь подсистема системы (I) линейно зависима, то и сама система (I) линейно зависима.

Пример 10. Доказать теорему: если система (I) содержит вектор θ, то она линейно зависима.

Пример 11. Доказать теорему: если система (I) линейно независима, то любая ее подсистема линейно независима.

Рассмотрим множество C комплексных чисел. Оно образует линейное пространство и над полем R и над самим собой. Числа $z_1 = 1$ и $z_2 = i$ являются линейно независимыми в первом случае и линейно зависимыми во втором случае. Действительно, в первом случае из справедливости равенства $\alpha \cdot 1 + \beta i = 0$, где α и β - действительные числа, следует, что $\alpha = \beta = 0$ (так как комплексное число равно "0" тогда и только тогда, когда $\alpha = \beta = 0$). Те же числа $z_1 = 1$ и $z_2 = i$ во втором случае являются линейно зависимыми, так как равенству $\alpha \cdot 1 + \beta i = 0$, где α и β - комплексные числа, удовлетворяют неравные "0" числа $\alpha = i$, $\beta = -1$.

Таким образом, одни и те же векторы могут быть линейно зависимы в линейном пространстве над одним полем и линейно независимыми в том же пространстве, но над другим полем.

Следует иметь также в виду, что одно и то же множество может образовывать линейное пространство над одним полем и не образовывать линейного пространства над другим полем. Так, например, множество рациональных чисел образует линейное пространство над самим собой, но не является линейным пространством над полем R.

Действительно, сумма двух рациональных чисел m и n есть рациональное число, но произведение $\alpha \cdot m$, где $\alpha \in R$, может уже не быть рациональным числом. Однако всякое поле является пространством над самим собой.

Размерность и базис линейного пространства

Пусть P – произвольное числовое поле, V – линейное пространство над этим полем.

О п р е д е л е н и е. Линейное пространство V называется n-мерным, если в нем можно найти n линейно независимых векторов, но больше, чем n, линейно независимых векторов оно не содержит. Число n называется при этом размерностью линейного пространства и обозначается $dim(V)$.

Таким образом, размерность линейного пространства – это максимальное число линейно независимых векторов, содержащихся в нем.

Нулевому линейному пространству $\{\theta\}$ приписывается нулевая размерность.

О п р е д е л е н и е. Любая упорядоченная совокупность n линейно независимых векторов n-мерного линейного пространства V называется его базисом. Векторы, образующие базис, называются базисными.

Существует единственное линейное пространство, не имеющее базиса – это нулевое пространство.

О п р е д е л е н и е. Если в пространстве V существует любое число линейно независимых векторов, то оно называется ∞-мерным.

Каждый вектор x n-мерного линейного пространства V можно представить единственным образом в виде линейной комбинации базисных векторов, т.е. если $e_1, e_2, \dots, e_n$ – базис, то $\forall x \in V$ единственным образом найдутся числа $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ такие, что $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n$.

Зафиксируем конкретный базис $e_1, e_2, \dots, e_n$. Условимся в дальнейшем всякий вектор $x = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n$ в данном базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ записывать также в виде $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ или $x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$.

Числа $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ называются координатами вектора x в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Для фиксированного базиса легко установить следующее:

I. При сложении (вычитании) векторов складываются (вычитаются) их одноименные координаты.

2. При умножении вектора на число α его координаты умножаются на это число.

3. Вектор x является нулевым тогда и только тогда, когда все его координаты равны 0.

4. Если всякий вектор $y \in V$ может быть представлен в виде линейной комбинации n линейно независимых векторов, то пространство V имеет размерность n.

Пример I2. Множество многочленов $R_n(x)$ степени не выше n образует линейное пространство размерности $n+1$. Действительно, многочлены $e_1 = 1$, $e_2 = x$, $e_3 = x^2, \dots, e_{n+1} = x^n$ в этом пространстве линейно независимы, так как тождество

$$\alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots \alpha_n x^n = 0$$

имеет место только при $\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$.

Большего числа линейно независимых многочленов в этом пространстве нет, так как всякий $n+2$-й многочлен $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ может быть представлен в виде линейной комбинации многочленов $1, x, x^2, \dots, x^n$ с коэффициентами $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$. Поэтому в качестве базиса в этом пространстве можно взять многочлены $1, x, x^2, \dots, x^n$, а поскольку

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = a_0 e_1 + a_1 e_2 + \dots + a_n e_{n+1},$$

то коэффициенты многочлена являются его координатами в базисе

$1, x, x^2, \dots, x^n$.

Пример 13. Множество непрерывных на $[a, b]$ функций $f(x)$ образует ∞ -мерное пространство, так как в нем существует любое число линейно независимых функций. Например, при любом сколь угодно большом n, функции $1, x, x^2, \dots, x^n$ линейно независимы.

Пример 14. Легко заметить, что множество квадратных матриц второго порядка с обычными операциями сложения и умножения на число образует действительное линейное пространство, в котором роль нулевого элемента играет нулевая матрица. Покажем, что это пространство 4-мерное. Действительно, матрицы

$$e_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\quad e_2=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad e_3=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\quad e_4=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

являются линейно независимыми, так как равенство $\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2+\alpha_3 e_3+\alpha_4 e_4=0$ выполняется лишь при $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0$.

С другой стороны, всякую матрицу $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ можно представить в виде линейной комбинации матриц e_1, e_2, e_3, e_4:

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=a e_1+b e_2+c e_3+d e_4 .$$

Таким образом, матрицы e_1, e_2, e_3, e_4 образуют базис, т.е. пространство 4-мерно.

Пример 15. Множество C комплексных чисел над полем R действительных чисел образует линейное пространство размерности $n = 2$. Действительно, в нем есть пара линейно независимых чисел, например, $e_1=1$ и $e_2=i$ (см. выше), но нет большего числа линейно независимых чисел. Поэтому числа 1 и i можно принять за базис. То же множество комплексных чисел над полем комплексных чисел лишь одномерно, так как любая пара z_1 и z_2 отличных от 0 комплексных чисел линейно зависима, так как равенству $\alpha z_1+\beta z_2=0$, где α и β – комплексные числа, а $z_1, z_2 \neq 0$ можно удовлетворить неравными 0 числами $\alpha=z_2$ и $\beta=-z_1$. В качестве базиса можно взять любое комплексное число $z \neq 0$.

Рассмотрим теперь пример линейного пространства с "необычными" определениями сложения и умножения на число.

Пример II. Пусть R^+ - множество всех положительных чисел. Будем обозначать их буквами $a, b, c, \ldots$. Сумму двух чисел a и b будем в этом множестве обозначать через $a \oplus b$ и определим равенством $a \oplus b \overset{def}{=} a \cdot b$, где $a \cdot b$ - обычное произведение чисел a и b . Произведение любого действительного числа λ на число $a \in R^+$ обозначим через $\lambda(\cdot)a$ и определим равенством $\lambda(\cdot)a \overset{def}{=} a^\lambda$. Покажем, что R^+ - линейное действительное пространство размерности "I". Для этого прежде всего заметим, что если $a \in R^+$, $b \in R^+$, то и $a \oplus b \in R^+$ и $\lambda(\cdot)a \in R^+$.Проверим теперь справедливость аксиом:

1. $a \oplus b = b \oplus a$, так как $ab = ba$.

2. $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$, так как $(ab)c = a(bc)$.

3. В R^+ существует θ , обозначаемый через "I", такой, что $a \oplus 1 = a$, так как $a \oplus 1 = a \cdot 1 = a$.

4. $\forall a \in R^+$ существует противоположный элемент, обозначаемый в R^+ через $\frac{1}{a}$, такой, что $a \oplus \frac{1}{a} = \theta$, так как $a \oplus \frac{1}{a} = a \cdot \frac{1}{a} = 1$, где $1 = \theta$.

5. $\alpha(\cdot)(a \oplus b) = (\alpha(\cdot)a) \oplus (\alpha(\cdot)b)$, так как $\alpha(\cdot)(a \oplus b) =$
$= (a \oplus b)^\alpha = (ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha = a^\alpha \oplus b^\alpha = (\alpha(\cdot)a) \oplus (\alpha(\cdot)b)$.

6. $(\alpha + \beta)(\cdot)a = (\alpha(\cdot)a) \oplus (\beta(\cdot)a)$, так как $(\alpha + \beta)(\cdot)a =$
$= a^{\alpha+\beta} = a^\alpha \cdot a^\beta = (\alpha(\cdot)a) \oplus (\beta(\cdot)a)$.

7. $\alpha(\cdot)(\beta(\cdot)a) = (\alpha\beta)(\cdot)a$, так как $\alpha(\cdot)(\beta(\cdot)a) =$
$= (\beta(\cdot)a)^\alpha = (a^\beta)^\alpha = a^{\alpha\beta} = (\alpha\beta)(\cdot)a$.

8. $1(\cdot)a = a$, так как $1(\cdot)a = a^1 = a$.

Таким образом, аксиомы выполнены, значит R^+ - линейное пространство.

В этом пространстве имеются ненулевые элементы, т.е. числа, отличные от "I", поэтому его размерность больше "0". Однако любые два его элемента уже линейно зависимы, так как равенству

$$(\alpha(\cdot)a) \oplus (\beta(\cdot)b) = 1 \qquad (3)$$

можно удовлетворить при одном из коэффициентов α или β не равном "0". Действительно, равенство (3) равносильно равенству

$$a^{\alpha}\cdot b^{\beta}=1. \qquad (4)$$

Если $a=1$ (т.е. $a=b$), то можно положить $\alpha=2$, $\beta=0$. Если $b=1$, то можно положить $\alpha=0$, $\beta=2$. Если $a=b=1$, то равенство (4) справедливо при любых α и β.

Пусть $a\neq 1$, $b\neq 1$. Положим $\alpha=2$. Тогда $a^2 b^{\beta}=1$, откуда $2\ln a+\beta\ln b=0$ и, следовательно, $\beta=-\dfrac{2\ln a}{\ln b}\neq 0$. Таким образом, равенство (4), а следовательно, и равносильное ему равенство (3), имеет место хотя бы при одном из коэффициентов, не равном "0". Следовательно, любые два числа a и b из R^+ линейно зависимы. Это означает, что размерность пространства R^+ равна "1".

Понятие линейного подпространства

Пусть P - произвольное числовое поле, V - линейное пространство над ним.

Определение. Подмножество $\mathcal{L}$ линейного пространства V называется линейным подпространством этого пространства, если относительно заданных в V операций сложения векторов и умножения их на число подмножество $\mathcal{L}$ само является линейным пространством.

Справедлива следующая теорема: множество $\mathcal{L}$ векторов линейного пространства V является линейным подпространством этого пространства тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:

1. $\forall x,y\in\mathcal{L},\ x+y\in\mathcal{L}$,

2. $\forall x\in\mathcal{L}$ и $\forall\alpha\in P$, $\alpha x\in\mathcal{L}$.

Эти два условия могут быть объединены в одно:

$$\forall x,y\in\mathcal{L} \text{ и } \forall\alpha,\beta\in P,\ \alpha x+\beta y\in\mathcal{L}.$$

Пример 17. Доказать теорему: множество всех линейных комбинаций векторов системы (I) с коэффициентами из поля P является линейным подпространством пространства V.

Линейное подпространство линейных комбинаций векторов системы называется линейной оболочкой векторов этой системы или линейным подпространством, натянутым на векторы системы (I) и обозначается $\mathcal{L}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Размерность этого подпространства равна максимальному числу линейно независимых среди них векторов.

Простейшим линейным подпространством пространства V является его одномерное подпространство $\mathcal{L}_1$ с базисом e_1, состоящим из одного вектора. Таким образом, $\mathcal{L}_1$ представляет собой совокупность векторов вида αe_1, где α - произвольное число.

Пример 18. Пусть $V = R^n$ - линейное пространство упорядоченных наборов по n действительных чисел. Показать, что множество V' наборов вида $(0, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, 0)$ является линейным подпространством пространства R^n и определить его размерность.

Решение. Прежде всего заметим, что если $x = (0, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0) \in V'$, $y = (0, y_2, \ldots, y_{n-1}, 0) \in V'$, то $x + y = (0, x_2 + y_2, \ldots$ $\ldots, x_{n-1} + y_{n-1}, 0) \in V'$ и $\alpha x = (0, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_{n-1}, 0) \in V'$. Следовательно, V' - линейное подпространство пространства R^n. В V' имеется $n-2$ линейно независимых вектора

$$e_1 = (0,1,0,\ldots,0,0),\ e_2 = (0,0,1,\ldots,0,0),\ \ldots$$
$$\ldots\ e_{n-2} = (0,0,0,\ldots,1,0)$$

и нет большего числа линейно независимых векторов (проверить). Следовательно, $dim\,(V') = n-2$.

Пример 19. Векторное пространство натянуто на векторы

$$x_1 = (3,\ 2,\ 0),\quad x_2 = (-1,\ 4,\ 5),\quad x_3 = (7,\ 0,\ -5).$$

Определить его размерность и указать какой-либо базис.

Решение. Легко обнаруживаем линейную зависимость векторов x_1, x_2, x_3. Однако векторы x_1 и x_2 линейно независимы. Следовательно, размерность данного пространства равна 2. В качестве базиса можно взять векторы x_1 и x_2.

Сумма и пересечение линейных подпространств

Пусть

$$\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \dots, \mathcal{L}_n \qquad (5)$$

- произвольная система линейных подпространств пространства V.

Определение. Множество всех векторов $x \in V$, которые представляются в виде

$$x = x_1 + x_2 + \dots + x_n ,$$

где $x_1 \in \mathcal{L}_1, x_2 \in \mathcal{L}_2, \dots, x_n \in \mathcal{L}_n$ называется суммой подпространств и обозначается через $\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \dots + \mathcal{L}_n$ или $\sum_{i=1}^{n} \mathcal{L}_i$.

Множество векторов $x \in V$, принадлежащих одновременно всем подпространствам, называется пересечением этих подпространств и обозначается $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 \cap \dots \cap \mathcal{L}_n$ или $\bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{L}_i$.

Определение. Говорят, что пространство V является прямой суммой своих подпространств $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \dots, \mathcal{L}_m$, если:

а) $\forall x \in V$ существует разложение

$$x = x_1 + x_2 + \dots + x_m , \text{ где } x_1 \in \mathcal{L}_1, \dots, x_m \in \mathcal{L}_m ;$$

б) это разложение единственно, т.е. если $x = x_1 + x_2 + \dots + x_m = y_1 + y_2 + \dots + y_m$, где $x_j \in \mathcal{L}_j, y_j \in \mathcal{L}_j, j = \overline{1,m}$, то $x_1 = y_1, \dots, x_m = y_m$.

При этом пишут: $V = \mathcal{L}_1 \dotplus \mathcal{L}_2 \dotplus \dots \dotplus \mathcal{L}_m$.

Пример 20. Доказать, что условие б) равносильно условию:

б$'$) если имеется разложение $\theta = z_1 + z_2 + \dots + z_m$, где $z_1 \in \mathcal{L}_1, \dots z_m \in \mathcal{L}_m$, то $z_1 = z_2 = \dots = z_m = \theta$.

Пример 21. Доказать, что из условия б) следует, что всякие два из подпространств $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \dots, \mathcal{L}_m$ имеют общим лишь один элемент θ.

Пример 22. Доказать теорему: если $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \{\theta\}$, то $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \dotplus \mathcal{L}_2$.

Справедлива следующая теорема:

Для того, чтобы пространство V было прямой суммой своих подпространств $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \dots, \mathcal{L}_m$, необходимо и достаточно, чтобы объединение базисов этих подпространств составляло базис всего пространства.

Таким образом, размерность прямой суммы подпространств равна сумме размерностей подпространств.

Переход к новому базису в линейном пространстве

Пусть в n -мерном линейном пространстве V имеется два базиса: $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ и пусть

$$\begin{cases} e'_1 = \alpha_{11} e_1 + \ldots + \alpha_{n1} e_n \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ e'_n = \alpha_{1n} e_1 + \ldots + \alpha_{nn} e_n \end{cases}$$

или, короче, $(e'_1, \ldots, e'_n) = (e_1, \ldots, e_n)A$, где $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \ldots \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \ldots \alpha_{2n} \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} \ldots \alpha_{nn} \end{pmatrix}$.

Матрица A называется матрицей перехода от базиса e к базису e'.

Пример 23. Доказать, что матрица перехода является невырожденной и обратно: любая невырожденная матрица может служить матрицей перехода от базиса e к некоторому другому базису.

Пример 24. Пусть $x = \xi_1 e_1 + \ldots + \xi_n e_n$ и $x = \xi'_1 e'_1 + \ldots + \xi'_n e'_n$. Доказать, что

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \xi'_1 \\ \vdots \\ \xi'_n \end{pmatrix}.$$

Ранг системы векторов. Связь с рангом матрицы

Пусть дана конечная или бесконечная система векторов $\{(x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$. Максимальное число линейно независимых векторов данной системы называется рангом этой системы.

Каждый столбец (строку) матрицы A над любым числовым полем можно принять за координаты некоторого вектора линейного пространства над этим полем. Справедливы следующие теоремы:

I. Если столбцы матрицы рассматривать как n -мерные векторы, то ранг матрицы A равен рангу системы вектор-столбцов этой матрицы.

2. Ранг системы вектор-столбцов матрицы A равен рангу системы ее вектор-строк.

Евклидовы и унитарные пространства

Определение. Евклидовым (унитарным) пространством называется вещественное (комплексное) пространство V если: по некоторому правилу каждым двум векторам $x, y \in V$ ставится в соответствие вещественное (комплексное) число, обозначаемое символом (x, y), и если это число удовлетворяет следующим требованиям-аксиомам:

1. $(x, y) = (y, x)$ $\left((x, y) = \overline{(y, x)}\right)$ $\forall x, y \in V$.

2. $(\alpha x, y) = \alpha (x, y)$ $\forall \alpha \in R(C)$, $\forall x, y \in V$.

3. $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$ $\forall x_1, x_2, y \in V$.

4. $(x, x) \geq 0$ $\forall x \in V$, причем $(x, x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = \theta$. Число (x, y) называется скалярным произведением векторов x и y.

Определение. Пусть x – произвольный вектор евклидова или унитарного пространства. Длиной или модулем вектора x называется число $|x| = \sqrt{(x, x)}$.

Неравенство Коши-Буняковского

А. Для евклидова пространства: $(x, y)^2 \leq |x|^2 |y|^2$, где x, y – два произвольных вектора евклидова пространства V.

Определение. Пусть x и y – два отличных от θ вектора пространства V. Наименьшее неотрицательное действительное число γ, задаваемое равенством $\cos\gamma = \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|}$, будем называть углом между векторами x и y евклидова пространства. Это определение корректно в силу неравенства Коши-Буняковского.

Б. Для унитарного пространства: $|(x, y)|^2 \leq |x|^2 |y|^2$ $\forall x, y \in V$. Понятие угла между векторами, введенное для евклидова пространства, не годится для унитарного пространства, так как (x, y) – комплексное число.

Неравенство треугольника для евклидова и унитарного пространства

Пусть x, y – два произвольных вектора евклидова или унитарного пространства V. Справедливо следующее неравенство, называемое неравенством треугольника: $|x+y| \leqslant |x| + |y|$.

Определение. Два вектора x и y евклидова или унитарного пространства называются ортогональными, если $(x,y)=0$.

Справедлива следующая теорема: любая система попарно ортогональных отличных от θ векторов линейного пространства V линейно независима.

Пример 25. Доказать теорему Пифагора для векторов евклидова и унитарного пространств: если векторы x и y ортогональны, то $|x+y|^2=|x|^2+|y|^2$. Доказать, что обратное утверждение справедливо только для векторов евклидова пространства.

Определение. Если $(e_i, e_k)=\begin{cases}0, & i\neq k,\\ 1, & i=k,\end{cases}$ то базис $e_1, e_2, \ldots$ $\ldots, e_n$ называется ортонормированным. С помощью рассмотренного далее процесса ортогонализации устанавливается существование в произвольном евклидовом и унитарном пространствах ортонормированного базиса.

Справедлива следующая теорема: пусть V – n-мерное евклидово (унитарное) пространство и $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – произвольный базис этого пространства, пусть $x=\xi_1 e_1+\ldots+\xi_n e_n$, $y=\eta_1 e_1+\ldots+\eta_n e_n$.

Для того чтобы было справедливо равенство

$$(x,y)=\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2+\ldots+\xi_n\eta_n \quad ((x,y)=\xi_1\bar\eta_1+\xi_2\bar\eta_2+\ldots+\xi_n\bar\eta_n),$$

необходимо и достаточно, чтобы базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ был ортонормированным.

Пример 26. Пусть V – действительное линейное пространство действительных квадратных матриц второго порядка с обычными определениями сложения и умножения на число. Матрицам $A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1\\ c_1 & d_1\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} a_2 & b_2\\ c_2 & d_2\end{pmatrix}$ поставим в соответствие число $(A,B)=a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2+d_1d_2$. Выяснить, является ли данное пространство евклидовым и если да, то найти длину матрицы $A_1=\begin{pmatrix} 2 & 3\\ 5 & -1\end{pmatrix}$ и угол, который она образует с матрицей $B_1=\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$, написать неравенство треугольника для матриц A и B.

Решение. $|A_1| = \sqrt{(A_1, A_1)} = \sqrt{2\cdot2+3\cdot3+5\cdot5+(-1)\cdot(-1)} = \sqrt{39}$.

$$\varphi = \arccos\frac{(A_1, B_1)}{|A_1|\cdot|B_1|} = \arccos\frac{2\cdot0+3\cdot1+5\cdot3+(-1)\cdot1}{\sqrt{39}\sqrt{0\cdot0+1\cdot1+3\cdot3+1\cdot1}} = \arccos\frac{17}{\sqrt{429}}.$$

Заметим, что здесь символы $|A_1|$ и $|B_1|$ никакого отношения к определителям матриц A_1 и B_1 не имеют.

Неравенство треугольника имеет вид $|A+B| \leqslant |A| + |B|$, где $|A|$, $|B|$ и $|A+B|$ соответственно длины матриц $A, B, A+B$. Так как $|A| = \sqrt{(A,A)} = \sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2}$, $|B| = \sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2+d_2^2}$,

$$|A+B| = \sqrt{(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2+(c_1+c_2)^2+(d_1+d_2)^2},$$

то неравенство треугольника для матриц выглядит так

$$\sqrt{(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2+(c_1+c_2)^2+(d_1+d_2)^2} \leqslant \sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2} + \sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2+d_2^2}.$$

Пример 27. Написать неравенство Коши-Буняковского для векторов $x=(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)$, $y=(\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_n)$ пространства R^n, в котором $(x,y) \stackrel{def}{=} \xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2+\dots+\xi_n\eta_n$.

Решение. Неравенство Коши-Буняковского имеет вид $(x,y)^2 \leqslant (x,x)(y,y)$. Так как $(x,x) = \xi_1^2+\xi_2^2+\dots+\xi_n^2$, $(y,y) = \eta_1^2+\eta_2^2+\dots+\eta_n^2$, то в нашем случае оно переписывается в виде

$$(\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2+\dots+\xi_n\eta_n)^2 \leqslant (\xi_1^2+\xi_2^2+\dots+\xi_n^2)(\eta_1^2+\eta_2^2+\dots+\eta_n^2)$$

или, сокращенно

$$\Big(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\eta_k\Big)^2 \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2\Big)\cdot\Big(\sum_{k=1}^{n}\eta_k^2\Big).$$

Пример 28. Пусть V – действительное линейное пространство функций $f(x)$, непрерывных на $[0,1]$ с обычными определениями сложения и умножения на число. Функциям $f(x)$ и $\varphi(x)$ поставим в соответствие число $(f,\varphi) = \int_0^1 f(x)\varphi(x)\,dx$.

Доказать, что V – евклидово пространство. Найти длину функции $y_1 = \sin\pi x$ и ее угол с функцией $y_2 = x-1$. Написать неравенство Коши-Буняковского для функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ и для функций y_1 и y_2.

Решение. $|\varphi_1| = \sqrt{(\sin\pi x, \sin\pi x)} = \sqrt{\int_0^1 \sin^2\pi x\, dx} =$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}\int_0^1 (1-\cos 2\pi x)\, dx} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \varphi = \arccos\frac{(\sin\pi x, x-1)}{|\varphi_1|\cdot|\varphi_2|} =$$

$$= \arccos\frac{\int_0^1 (x-1)\sin\pi x\, dx}{\sqrt{\int_0^1 \sin^2\pi x\, dx}\cdot\sqrt{\int_0^1 (x-1)^2 dx}} = \arccos\left(-\frac{1}{\pi\sqrt{6}}\right).$$

Заметим, что символами $|\varphi_1|$ и $|\varphi_2|$ у нас обозначены не модули функций, а их длины. Неравенство Коши-Буняковского имеет вид $(x,y)^2 \leqslant (x,x)\cdot(y,y)$. Так как $(f,\varphi) = \int_0^1 f(x)\varphi(x)dx$, $(f,f) = \int_0^1 f^2(x)dx$, то в нашем случае оно переписывается в виде

$$\left(\int_0^1 f(x)\varphi(x)dx\right)^2 \leqslant \int_0^1 (f(x))^2 dx \int_0^1 (\varphi(x))^2 dx.$$

Если $f(x) = \sin\pi x$, $\varphi(x) = x-1$, то имеем

$$\left(\int_0^1 (x-1)\sin\pi x\, dx\right)^2 \leqslant \int_0^1 (x-1)^2 dx \int_0^1 \sin^2\pi x\, dx.$$

Пример 29. Пусть в пространстве C^n (пространство упорядоченных наборов из n комплексных чисел) пара векторов $x = (x_1,\dots,x_n)$, $y = (y_1,\dots,y_n)$ поставлено в соответствие число $x_1\overline{y_1} + \dots x_n\overline{y_n}$ (здесь $\overline{y_k}$ комплексно сопряжено с y_k). Выяснить, является ли данное пространство унитарным, и если является, то найти длину вектора $a = (i, 3-i) \in C^2$ и скалярное произведение a на $b = (3-i, 2i)$.

Решение. Проверим, является ли введенная операция скалярным умножением векторов. Для простоты положим $n = 2$. Условие $(x,y) = \overline{(y,x)}$ справедливо. Действительно, $(x,y) = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2}$, $(y,x) = y_1\overline{x_1} + y_2\overline{x_2} = \overline{\overline{y_1}x_1 + \overline{y_2}x_2} = \overline{x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2}} = \overline{(x,y)}$.

Условие $(x+y, z) = (x,z) + (y,z)$ тоже выполняется. Действительно, для трех векторов $x = (x_1,x_2)$, $y = (y_1,y_2)$, $z = (z_1,z_2)$ имеем $(x+y, z) = (x_1+y_1)\overline{z_1} + (x_2+y_2)\overline{z_2}$,

$(x,z) + (y,z) = x_1\overline{z_1} + x_2\overline{z_2} + y_1\overline{z_1} + y_2\overline{z_2} = (x_1+y_1)\overline{z_1} + (x_2+y_2)\overline{z_2} = (x+y, z)$.

Условие $(\lambda x, y)=\lambda(x,y)$ выполняется, так как $(\lambda x, y)=\lambda x_1\bar{y}_1+\lambda x_2\bar{y}_2=\lambda(x_1\bar{y}_1+x_2\bar{y}_2)=\lambda(x,y)$. Условие $(x,x)\geqslant 0$, где равенство достигается только в том случае, когда $x=\theta$, выполнено, так как

$$(x,x)=x_1\bar{x}_1+x_2\bar{x}_2=|x_1|^2+|x_2|^2\geqslant 0,$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $x_1=x_2=0$, т.е. $x=\theta$. Таким образом, введенная операция является скалярным умножением векторов, а рассматриваемое пространство – унитарным.

Так как, согласно определению, $|a|^2=(a,a)=i(-i)+(3-i)(3+i)=11$, то $|a|=\sqrt{11}$.

Скалярное произведение $(a,b)=i(3+i)+(3-i)(-2i)=-3-3i$.

Процесс ортогонализации

В каждом евклидовом и унитарном пространствах размерности n существует ортонормированный базис $e_1, e_2, \dots, e_n$, векторы которого можно найти с помощью так называемого процесса ортогонализации.

Пусть $f_1, f_2, \dots, f_n$ – произвольный базис данного пространства. Положим $e_1=f_1$. Второй базисный вектор e_2 отыскивается в виде $e_2=f_2+\alpha e_1$, где α находится из условия $(e_1,e_2)=0$.

Легко заметить, что $\alpha=-\frac{(f_2,e_1)}{(e_1,e_1)}$ и, следовательно,

$$e_2=f_2-\frac{(f_2,e_1)}{(e_1,e_1)}e_1. \qquad (6)$$

Так как $e_1=f_1\neq\theta$, то $(e_1,e_1)\neq 0$. В силу линейной независимости векторов f_1, f_2 имеем $e_2\neq\theta$.

Третий базисный вектор e_3 следует искать в виде

$$e_3=f_3+\beta_1 e_1+\beta_2 e_2.$$

Коэффициенты β_1 и β_2 отыскиваются из условий

$(e_1,e_3)=0; \quad (e_2,e_3)=0.$

Выкладки приводят к результату

$$e_3=f_3-\frac{(f_3,e_1)}{(e_1,e_1)}e_1-\frac{(f_3,e_2)}{(e_2,e_2)}e_2. \qquad (7)$$

Так как $e_1 \neq \theta$, $e_2 \neq \theta$, то $(e_1,e_1)\neq 0$, $(e_2,e_2)\neq 0$. В силу линейной независимости векторов f_1, f_2, f_3 имеем $e_3 \neq \theta$.

Если векторы $e_1, e_2, \dots, e_{k-1}$ уже найдены, то k -й базисный вектор, ортогональный к предыдущим, находят по формуле

$$e_k = f_k - \frac{(f_k, e_1)}{(e_1, e_1)} e_1 - \frac{(f_k, e_2)}{(e_2, e_2)} e_2 - \dots - \frac{(f_k, e_{k-1})}{(e_{k-1}, e_{k-1})} e_{k-1}. \quad (8)$$

Этот процесс будет продолжен до тех пор, пока не построим не равный θ вектор e_n, ортогональный каждому из векторов $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$. В силу теоремы о линейной независимости системы попарно ортогональных векторов векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$ являются линейно независимыми, а значит образуют ортогональный базис. Зная ортогональный базис, нетрудно перейти и к ортонормированному

$$e_1' = \frac{e_1}{|e_1|}, \dots, e_n' = \frac{e_n}{|e_n|}.$$

<u>Пример 30</u>. С помощью процесса ортогонализации из базиса

$$f_1 = \bar{i} + \bar{j},\ f_2 = 2\bar{i} - \bar{k},\ f_3 = \bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$$

линейного пространства V_3 получить ортогональный и ортонормированный базисы.

<u>Решение</u>. За первый базисный вектор e_1 примем вектор f_1:

$$e_1 = \bar{i} + \bar{j}.$$

Второй базисный вектор, ортогональный к e_1, ищем в виде $e_2 = f_2 + \alpha e_1$. И так как $(e_1, e_2) = 0$, а $e_2 = (2\bar{i} - \bar{k}) + \alpha(\bar{i} + \bar{j}) = (2+\alpha)\bar{i} + \alpha\bar{j} - \bar{k}$, то α найдем из уравнения $(\bar{i} + \bar{j}, (2+\alpha)\bar{i} + \alpha\bar{j} - \bar{k}) = 0$ или $(2+\alpha) + \alpha = 0$, откуда $\alpha = -1$, и, следовательно, $e_2 = f_2 - e_1 = \bar{i} - \bar{j} - \bar{k}$. Третий базисный вектор e_3, ортогональный к векторам e_1 и e_2, можно было бы искать в виде $e_3 = f_3 + \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$. Однако проще использовать векторное произведение, положив

$$e_3 = [e_1, e_2] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}.$$

Поделив найденные e_1, e_2 и e_3 на их длины, получим ортонормированный базис

$$e_1' = \frac{\bar{i}+\bar{j}}{\sqrt{2}}, \quad e_2' = \frac{\bar{i}-\bar{j}-\bar{k}}{\sqrt{3}}, \quad e_3' = \frac{-\bar{i}+\bar{j}-2\bar{k}}{\sqrt{6}}.$$

Пример 31. Найти ортогональный базис в евклидовом пространстве $R_3(x)$, в котором скалярное произведение многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ определено равенством

$$(P(x), Q(x)) = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)dx.$$

Решение. В качестве базисных многочленов данного пространства можно взять многочлены $f_1 = 1$, $f_2 = x$, $f_3 = x^2$, $f_4 = x^3$. Положим $e_1 = f_1 = 1$. Ортогональный к e_1 многочлен e_2 найдем по формуле (6). У нас $(f_2, e_1) = \int_{-1}^{1} x\,dx = 0$ и, следовательно, $e_2 = f_2 = x$. Ортогональный к e_1 и e_2 многочлен найдем по формуле (7):

$$e_3 = x^2 - \frac{(f_3, e_1)}{(e_1, e_1)} \cdot 1 - \frac{(f_3, e_2)}{(e_2, e_2)} \cdot x.$$

У нас $(f_3, e_1) = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}$; $(f_3, e_2) = \int_{-1}^{1} x^3 dx = 0$; $(e_1, e_1) = \int_{-1}^{1} dx = 2$.

Следовательно, $e_3 = x^2 - \frac{1}{3}$. Ортогональный к e_1, e_2 и e_3 многочлен e_4 найдем по формуле (8), в которой положим $k = 4$:

$$e_4 = x^3 - \frac{(f_4, e_1)}{(e_1, e_1)} - \frac{(f_4, e_2)}{(e_2, e_2)} \cdot x - \frac{(f_4, e_3)}{(e_3, e_3)} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right).$$

У нас $(f_4, e_1) = \int_{-1}^{1} x^3 dx = 0$; $(f_4, e_2) = \int_{-1}^{1} x^4 dx = \frac{2}{5}$;

$(f_4, e_3) = \int_{-1}^{1} \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) x^3 dx = 0$; $(e_2, e_2) = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}$,

следовательно, $e_4 = x^3 - \frac{3}{5}x$.

Итак, многочлены $1, x, x^2 - \frac{1}{3}, x^3 - \frac{3}{5}x$ образуют ортогональный базис в пространстве многочленов степени не выше третьей.

Пример 32. В унитарном пространстве комплексных матриц размеров $1 \times n$, в котором скалярное произведение векторов $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $b = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ определено равенством $(a, b) = \alpha_1\bar{\beta}_1 + \ldots + \alpha_n\bar{\beta}_n$, по данному базису $(1, 1, i), (i, 1, 1), (i, i, i)$ построить ортогонализированный.

Решение. Применяя формулы (6), (7), (8), получим следующий ортогональный базис:

$$e_1 = (1, 1, i), \quad e_2 = \left(\frac{3i-1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3-i}{3}\right), \quad e_3 = \left(\frac{1+i}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1-i}{4}\right).$$

Легко вычислить

$$|e_1| = \sqrt{3},\ |e_2| = \frac{2\sqrt{6}}{3},\ |e_3| = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Искомый ортонормированный базис имеет вид

$$e_1' = \left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{i}{\sqrt{3}}\right),\ e_2' = \left(\frac{3i-1}{2\sqrt{6}},\ \frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{3-i}{2\sqrt{6}}\right),$$

$$e_3' = \left(\frac{(1+i)\sqrt{2}}{4},\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{(1-i)\sqrt{2}}{4}\right).$$

В разделе были приведены краткие сведения из теории линейных пространств, решения типовых задач, а также некоторые задачи на доказательство для самостоятельного решения. Если этот материал усвоен, то следует приступить к выполнению заданий, предлагаемых в следующем разделе.

ВАРИАНТЫ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ДОМАШНИХ ЗАДАНИЙ

Вариант I

I. Выяснить, является ли вещественным линейным пространством множество всех вещественных матриц второго порядка.

2. Выяснить, является ли линейно независимой система векторов

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

линейного вещественного пространства квадратных матриц второго порядка.

3. Показать, что в линейном вещественном пространстве вещественных квадратных матриц второго порядка векторы

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},\ e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

образуют базис, и найти в указанном базисе координаты вектора

$$x = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

4. В линейном вещественном пространстве вещественных квадратных матриц второго порядка найти матрицу перехода от базиса

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

к базису

$$e_1' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_2' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_3' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},\ e_4' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. В евклидовом пространстве R^2 даны векторы $x = (1, -3)$, $y = (2, 3)$. Найти (x, y), $\cos(\widehat{x, y})$.

6. В евклидовом пространстве R^3 по данному ортогональному базису $e_1 = (1, -1, 0)$, $e_2 = (0, 0, 2)$, $e_3 = (-1, -1, 0)$ построить ортонормированный базис.

7. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ и $y_1, \ldots, y_n$ – координаты векторов x и y в некотором базисе комплексного линейного n -мерного пространства. Определить, может ли функция $F(x, y)$ задавать скалярное произведение, а если нет, то указать, какие из свойств унитарного скалярного произведения не выполняются:

$$F(x, y) = x_1\bar{y}_1 + (1-i)x_1\bar{y}_2 + (1+i)x_2\bar{y}_1 + 3x_2\bar{y}_2 + i\,x_2\bar{y}_3 - i\,x_3\bar{y}_2 + 3x_3\bar{y}_3,\ n = 3.$$

Вариант 2

1. Является ли множество R всех вещественных чисел:

а) вещественным линейным пространством;

б) комплексным линейным пространством?

2. Выяснить, является ли линейно независимой система векторов в пространстве V_2:

а) $x_1 = 3\bar{i} + \bar{j}$, $x_2 = \bar{i} - \bar{j}$; б) $x_1 = 2\bar{i}$, $x_2 = 3\bar{j}$;

в) $x_1 = \bar{i} - 2\bar{j}$, $x_2 = 2\bar{j} - \bar{i}$; г) $x_1 = \bar{i} + \bar{j}$, $x_2 = 2\bar{j}$, $x_3 = 4\bar{i} - \bar{j}$.

3. Известно, что любой вектор $x \in V$ линейно выражается через векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$ этого пространства. Образуют ли векторы $e_1, e_2, \dots, e_n$ базис пространства V ?

4. Дана матрица $T = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ перехода от базиса e_1, e_2 к базису e_1', e_2'. Найти координаты вектора $a = 4e_1 + e_2$ в базисе e_1', e_2'.

5. Доказать, что для любого вектора x евклидова пространства имеет место равенство $(x, \theta) = 0$.

6. Являются ли ортогональными в евклидовом пространстве R^3 следующие системы векторов:

а) (0, 1, 0), (-6, 0, 4); б) (2, 1, -4), (3, 0, 5);

в) (-1, 0, 0), (0, 5, 0); (0, 0, 9);

г) (1, 1, 3); (-1, -2, 1); (7, -4, -1)?

7. Доказать, что в унитарном пространстве имеет место равенство

$$(x, \lambda y) = \bar{\lambda}(x, y).$$

Вариант 3

1. Является ли множество C всех комплексных чисел:

а) вещественным линейным пространством;

б) комплексным линейным пространством?

2. Выяснить, является ли линейно независимой система векторов в пространстве V_3 :

а) $x_1 = 2\bar{i} + \bar{j}$, $x_2 = \bar{j} + 3\bar{k}$;

б) $x_1 = \bar{i} - 2\bar{j} + 3\bar{k}$, $x_2 = 4\bar{i} + \bar{j}$, $x_3 = 5\bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}$;

в) $x_1 = \bar{j} - 3\bar{k}$, $x_2 = 2\bar{i} + 4\bar{j}$, $x_3 = 5\bar{k}$.

3. Выяснить, образует ли базис в арифметическом пространстве $R^3 = \{x = (a_1; a_2; a_3) | a_i \in R\}$ данная система векторов:

а) (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1);

б) (1, 2, -7), (0, 3, 1), (0, 0, 1);

в) (1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 0);

г) (3, 0, 5); (1, 2, -1);

д) (1, 2, -1), (2, 3, 4), (-1, 7, 2), (3, 4, 6).

4. В пространстве V_3 найти матрицу перехода от базиса $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ к базису: а) $\bar{i}, \bar{j}, -\bar{k}$; б) $\bar{j}, \bar{i}, \bar{k}$.

5. Пусть $(a,x)=(b,x)$ для любого вектора x евклидова пространства. Доказать, что $a=b$.

6. Установить, образуют ли каждая из указанных систем векторов ортогональный базис в евклидовом пространстве R^n :

а) (-I, 3), (6, 2); б) (5, I), (3, -I);

в) (I, 0, 0), (0, 7, 0), (0, 0, 2);

г) (0,0, 0, 5), (0, 0, -I, 0), (0, 2, 0, 0), (3, 0, 0, 0);

д) (-2, 3, 0, 0), (3, 2, I, I), (0, 0, I, 0), (-I, 2, -5, 0).

7. Является ли унитарным комплексное линейное пространство C , если каждой паре векторов $x=\alpha_1+\beta_1 i$; $y=\alpha_2+\beta_2 i$ поставлено в соответствие число $\beta_1 \cdot \beta_2$?

Вариант 4

I. Является ли множество Z всех целых чисел:

а) вещественным линейным пространством;

б) комплексным линейным пространством?

2. Выяснить, является ли линейно независимой система векторов в линейном пространстве квадратных матриц данного порядка

а) $\begin{pmatrix} I & 0 \\ -I & I \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ I & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -I & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & I & I \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 \\ I & I & I \end{pmatrix}$.

3. Выяснить, образует ли базис в линейном пространстве квадратных матриц $A=(a_{ij})$ $(a_{ij}\in R)$ второго порядка данная система векторов:

а) $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} I & 0 \\ I & 0 \end{pmatrix}$.

4. Найти матрицу перехода от базиса e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 к базису e_2, e_3, e_1, e_5, e_4.

5. Пусть y – фиксированный вектор евклидова пространства E. Доказать, что множество всех элементов x этого пространства, для которых $(x,y)=0$, является линейным подпространством пространства E.

6. Установить, образует ли каждая из указанных систем векторов ортогональный базис в евклидовом пространстве R^n:

а) (I, I, 0, -I, -I), (I, 0, -I, 0, I), (I,-I,2,-I,I), (I,-I, 0,I,-I);

б) (I,3,2,3,I), (I,I,0,-I,-I), (I,0,-I,0,I), (I,-I,2,-I,I), (I,-I,0,I,-I).

7. Является ли унитарным комплексное линейное пространство C, если каждой паре векторов $x=\alpha_1+\beta_1 i$; $y=\alpha_2+\beta_2 i$ поставлено в соответствие число $(\alpha_1+\beta_1 i)(\overline{\alpha_2+\beta_2 i})=(\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2)+(\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2)i$?

Вариант 5

I. Является ли множество Q всех рациональных чисел:

а) вещественным линейным пространством;

б) комплексным линейным пространством?

2. Выяснить, является ли линейно независимой система векторов в линейном пространстве квадратных матриц данного порядка:

а) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Выяснить, образует ли базис в линейном пространстве квадратных матриц $A=(a_{ij})$, $(a_{ij}\in R)$ второго порядка данная система векторов:

а) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$.

4. В пространстве $R_3(x)$ найти матрицу перехода от базиса x^2, x, 1 к базису $(x+1)^2$, $(x+1)$, 1.

5. Является ли евклидовым пространство R^2, если паре векторов $x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2)$ поставлено в соответствие число:

а) $x_1y_1+x_2y_2$; б) $x_1x_2y_1y_2$;

в) $3x_1y_1+5x_1y_2+x_2y_2$; г) $2x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+3x_2y_2$?

6. Является ли нормированным каждый из векторов евклидова пространства R^n:

а) $(-1, 2)'$; б) $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$; в) $\left(\sqrt{\frac{1}{10}}, \sqrt{\frac{2}{5}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$.

7. Пусть в комплексном линейном пространстве комплексных матриц размеров $1\times n$ паре векторов $a=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$, $b=(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)$ поставлено в соответствие число $\alpha_1\bar\beta_1+\alpha_2\bar\beta_2+\dots+\alpha_n\bar\beta_n$. Является ли данное пространство с введенной таким образом операцией унитарным?

Вариант 6

1. Каким должно быть число a, чтобы множество, состоящее из одного этого числа, являлось вещественным линейным пространством?

2. Выяснить, является ли линейно независимой система векторов в линейном пространстве многочленов с вещественными коэффициентами, степень каждого из которых не выше n:

а) x^2+1, $2x-3$; б) x^3-2x^2+2, x^2+5, 5.

3. Выяснить, образует ли базис в линейном пространстве многочленов с вещественными коэффициентами, степень каждого из которых не выше двух, данная система векторов:

а) $1, x, x^2$; б) $3, x-2, x+1$; в) $1, (x-2), (x-2)^2$;

г) $3x+3$, x^2-1, x^2+3x+2.

4. В пространстве R^2 найти матрицу перехода от базиса a, b к базису $a+b$, $a-b$.

5. Является ли евклидовым пространство R^n, если паре векторов $x=(x_1,\dots,x_n)$; $y=(y_1,\dots,y_n)$ поставлено в соответствие число:

а) $(x_1+x_2+\dots+x_n)(y_1+y_2+\dots+y_n)$; б) $x_1y_1+x_2y_2+\dots+x_ny_n$?

6. Какие из данных систем векторов являются ортогональными в евклидовом пространстве $\mathcal{L}[-1;1]$ вещественных функций, непрерывных на $[-1;1]$ (операция скалярного умножения введена следующим образом: $(f(x), g(x))=\int_a^b f(x)g(x)\,dx$):

а) $1, x^2$; б) x^2, x^3;

в) $1, \sin\pi x, \cos\pi x, \sin 2\pi x, \cos 2\pi x, \ldots, \sin n\pi x, \cos n\pi x$?

7. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – базис n -мерного линейного комплексного пространства. Является ли данное пространство унитарным, если каждой паре векторов $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n$, $b = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \ldots + \beta_n e_n$ этого пространства поставлено в соответствие число $\alpha_1\bar{\beta}_1 + \alpha_2\bar{\beta}_2 + \ldots + \alpha_n\bar{\beta}_n$?

Вариант 7

1. Является ли вещественным линейным пространством множество всех многочленов от одной переменной с вещественными коэффициентами:

а) степени не выше n ; б) степени n ; в) степени выше n?

2. Выяснить, является ли линейно независимой система векторов в линейном пространстве многочленов с вещественными коэффициентами, степень каждого из которых не выше n :

а) $2x+3, x-1, 3x+2, 4x+1$; б) $x^3-2x^2+2, x^2+5, 5$?

3. Доказать, что если e_1, e_2, e_3, e_4 – базис линейного пространства, то $e_1, x = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i e_i \ (\alpha_2 \neq 0), e_3, e_4$ – также базис этого пространства.

4. Дана матрица

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

перехода от базиса e_1, e_2, e_3 к базису e_1', e_2', e_3'. Найти координаты вектора: а) e_2' в базисе e_1, e_2, e_3; б) e_3 в базисе e_1', e_2', e_3'.

5. Является ли евклидовым пространством множество всех функций вида $a_k \cos kx + b_k \sin kx$, где k – любое натуральное число, a_k, b_k – любые вещественные числа, если каждой паре функций

$a_n \cos nx + b_n \sin nx$, $a_m \cos mx + b_m \sin mx$

поставлено в соответствие число

$$\int_{-\pi}^{\pi} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)(a_m \cos mx + b_m \sin mx)\,dx?$$

6. В евклидовом пространстве $\mathcal{L}_{[-1;1]}$ пронормировать следующие векторы:

а) 1 ; б) x^3 ; в) $\cos x$.

7. В унитарном пространстве $C\ ((x,y)=(\alpha_1+\beta_1 i)(\overline{\alpha_2+\beta_2 i})=$ $=(\alpha_1\alpha_2+\beta_1\beta_2)+(\alpha_2\beta_1-\alpha_1\beta_2)i$, где $x=\alpha_1+\beta_1 i$, $y=\alpha_2+\beta_2 i)$ найти:

а) длину вектора $x=3-4i$;

б) скалярное произведение векторов $x=3+i$, $y=4-2i$.

Вариант 8

1. Является ли множество всех вещественных матриц размеров $m\times n$:

а) вещественным линейным пространством;

б) комплексным линейным пространством?

2. Доказать, что система векторов $x_1, x_2, \dots, x_m, \theta$ некоторого линейного пространства является линейно зависимой.

3. Найти размерность и один из базисов линейного пространства решений системы:

а) $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=0, \\ 2x_1-x_2+x_3=0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x_1-x_2+x_3+x_4-x_5=0, \\ x_1+3x_2-2x_3+x_4-x_5=0, \\ 4x_1+2x_2-x_3+2x_4-2x_5=0. \end{cases}$

4. Найти матрицу перехода от базиса e_1, e_2, e_3 к базису a, b, c и матрицу перехода от базиса a, b, c к базису e_1, e_2, e_3, если:

а) $a=2e_1+2e_3$, $b=3e_3-e_2$, $c=3e_1+e_3$;

б) $a=e_1+e_2+e_3$, $b=e_3$, $c=e_1+2e_2+3e_3$.

5. Является ли евклидовым линейное вещественное пространство вещественных функций, непрерывных на $[a,b]$, если каждой паре функций $f(x)$, $g(x)$ этого пространства поставлено в соответствие число:

а) $\int_a^b f(x)g(x)dx$; б) $\int_a^b \rho(x)f(x)g(x)dx$;

где $\rho(x)$ – фиксированная положительная непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция?

6. В евклидовом пространстве R^3 по данному базису построить ортонормированный: $g_1 = (1, 2, 3)$; $g_2 = (0, 3, -2)$; $g_3 = (0, 1, -1)$.

7. В унитарном пространстве комплексных матриц размеров $1 \times n$ $((a,b) = \alpha_1 \bar{\beta}_1 + \ldots + \alpha_n \bar{\beta}_n$, если $a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $b = (\beta_1, \ldots, \beta_n))$ найти:

а) длину вектора $(i, 2i, 3i, \ldots, ni)$;

б) скалярное произведение векторов $a = (i, i, \ldots, i)$, $b = (i, 2i, \ldots, ni)$.

Вариант 9

1. Пусть $R_{1\times 2}$ – множество всех вещественных матриц вида (a_1, a_2). Является ли это множество вещественным линейным пространством, если операция сложения определена обычным способом (как в матричном исчислении), а операция умножения на число $\alpha \in R$ – равенством: $\alpha(a_1, a_2) = (a_1, \alpha a_2)$?

2. Доказать, что если система векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ линейно зависима, то один из этих векторов является линейной комбинацией остальных.

3. Указать координаты векторов a, b, c в базисе e_1, e_2, e_3, e_4, если: $a = 2e_1 - e_2 + 3e_3 + 5e_4$, $b = 4e_2 - e_1$, $c = e_3$.

4. Найти матрицу перехода от базиса e_1, e_2, e_3 к базису a, b, c и матрицу перехода от базиса a, b, c к базису e_1, e_2, e_3, если

а) $a = e_1 - 3e_2 + 2e_3$, $b = 2e_1 + 4e_2 + e_3$, $c = 3e_2$,

б) $a = 5e_2$, $b = 2e_1 + 3e_2 + e_3$, $c = 2e_2 - e_1 - 2e_3$.

5. Даны векторы евклидова пространства E_n. Найти длины векторов x, y, скалярное произведение векторов, косинус угла φ между векторами, если:

а) $x = (2, -1)$, $y = (0, -3)$;

б) $x = (0, 3, 1)$, $y = (-1, 0, 2)$;

в) $x = (5, 0, -12, 0)$, $y = (-3, 1, 0, 2)$.

6. В евклидовом пространстве R^3 по данному базису построить ортонормированный: $g_1 = (1, 2, 3)$; $g_2 = (0, 2, 0)$, $g_3 = (2, 0, 3)$.

7. В унитарном пространстве комплексных матриц с размерами $1 \times n$ $(a, b) = \alpha_1 \bar{\beta}_1 + \alpha_2 \bar{\beta}_2 + \ldots + \alpha_n \bar{\beta}_n$, если $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $b = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ выяснить, являются ли ортогональными векторы a и b, если

а) $a = (i, 2, i)$, $b = (i, -1, i)$;

б) $a = (1-i, 2, i)$, $b = (3, 2-i, i)$;

в) $a = (3+i, -1+i, 2)$, $b = (-3+5i, 18, 11)$.

Вариант 10

1. Пусть R^+ – множество положительных чисел, в котором операция сложения определена равенством $x + y = xy$, а операция умножения на число $\alpha \in R$ – равенством $\alpha x = x^\alpha$. Является ли множество R^+ с указанными операциями вещественным линейным пространством?

2. Пусть система векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ линейно независима, а система $x_1, \ldots, x_m, y$ линейно зависима. Доказать, что вектор y линейно выражается через векторы $x_1, \ldots, x_m$ и такое разложение единственно.

3. Найти координаты вектора $(3, 1, -2, 5, 6) \in R^5$ в базисе: $(1, 0, 0, 0, 0)$, $(0, 1, 0, 0, 0)$, $(0, 0, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 0, 1, 0)$, $(0, 0, 0, 0, 1)$.

4. Даны два базиса: e_1, e_2 и e_1', e_2'. Найти координаты вектора x в базисе e_1, e_2, если: $e_1' = 2e_1 + 3e_2$, $e_2' = e_2 - e_1$, $x = e_1' - 3e_2'$.

5. Даны векторы евклидова пространства R^n. Найти длины векторов x, y, скалярное произведение векторов, косинус угла φ между векторами, если:

а) $x = (2, -1)$, $y = (0, -3)$;

б) $x = (0, 3, 1)$, $y = (-1, 0, 2)$;

в) $x = (5, 0, -12, 0)$, $y = (-3, 1, 0, 2)$.

6. В евклидовом пространстве R^3 по данному базису построить ортонормированный: $g_1 = (1, 0, 0)$, $g_2 = (0, 1, -1)$, $g_3 = (1, 1, 1)$.

7. Даны векторы e_1 и e_2, образующие ортонормированный базис. Найти (a,b), если $a = ie_1 + (i-1)e_2$, $b = (2+i)e_1 + (3+i)e_2$.

В а р и а н т II

I. Является ли вещественным линейным пространством:

а) множество всех вещественных функций, область определения которых - вся числовая прямая;

б) множество всех числовых последовательностей $\{a_n\}$, где $a_n \in R$?

2. Пусть разложение вектора y по некоторой системе $x_1, \dots, x_m$ единственно. Доказать, что система $x_1, \dots, x_m$ линейно независима.

3. Найти координаты вектора (3, I, -2, 5, 6) $\in R^5$ в базисе: (0,I,0,0,0), (0,0,0,I,0), (I,0,0,0,0), (0,0,0,0,I), (0,0,I,0,0).

4. Даны два базиса: e_1, e_2 и e_1', e_2'. Найти координаты вектора x в базисе e_1, e_2, если $e_1' = e_2 - e_1$, $e_2' = 3e_2$, $x = 2e_1' + 4e_2'$.

5. В евклидовом пространстве $\mathcal{L}_{[a,b]}$ $(a<b; (f(x), g(x)) \overset{def}{=} \int_a^b f(x)g(x)dx)$ найти:

а) длину вектора $\cos x + \sin x$, если $a = -\pi$, $b = \pi$;

б) длину вектора $f(x) = x$;

в) скалярное произведение векторов $\sin 2x, \sin 3x$, если $a = -\pi, b = \pi$;

г) скалярное произведение векторов $f(x) = x$, $g(x) = e^x$;

д) угол между векторами $\sin x$ и $\cos x$, если $a = -\pi$, $b = \pi$;

е) угол между векторами $f(x) = 1$ и $g(x) = x$.

6. В евклидовом пространстве $\mathcal{L}_{[a,b]}$ $(a<b; (f,g) \overset{def}{=} \int_a^b f(x)g(x)dx)$ записать:

а) неравенство Коши-Буняковского для функций $f(x), g(x)$ этого пространства;

б) неравенство треугольника.

7. Даны векторы e_1 и e_2, образующие ортонормированный базис. Найти (a,b), если $a = 5e_1 - (3+4i)e_2$; $b = 3ie_1 + (i-2)e_2$.

В а р и а н т I2

I. Является ли вещественным линейным пространством множество:

а) всех геометрических векторов, удовлетворяющих условию $|\bar{x}|>a$, где a – фиксированное число;

б) всех сходящихся последовательностей;

в) всех расходящихся последовательностей?

2. Пусть вектор y линейно выражается через линейно зависимую систему $x_1, x_2, ..., x_m$. Показать, что y имеет бесконечно много различных разложений по этой системе.

3. Найти координаты каждого из указанных векторов пространства $R_2(x)$ в базисе $x^2, x, 1$:

а) $3x^2-2x+5$; б) $4x-1$.

4. Даны два базиса: e_1, e_2 и e_1', e_2'. Найти координаты вектора x в базисе e_1', e_2', если: $e_1'=e_1+3e_2$, $e_2'=e_1-e_2$, $x=2e_1-5e_2$.

5. Показать, что $|x|=|y|$ тогда и только тогда, когда векторы $x+y$ и $x-y$ ортогональны. Выяснить геометрический смысл этого утверждения.

6. В евклидовом пространстве R^4 по данному базису построить ортонормированный: $g_1 = (I,I,0,0)$, $g_2 = (0,0,I,I)$, $g_3 = (I,0,I,I)$, $g_4 = (0,I,0,-I)$.

7. Даны векторы e_1, e_2, образующие ортогональный базис унитарного пространства. Найти (a,b), $|a|$, $|b|$, если:

$a = e_1+(4+i)e_2$, $b=-2e_1+(3-i)e_2$, $|e_1|=2$, $|e_2|=3$.

В а р и а н т I3

I. Является ли вещественным линейным пространством множество решений: а) системы линейных однородных уравнений; б) однородного линейного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами?

2. Пусть x, y, z – линейно независимая система векторов. Будут ли линейно независимы следующие системы векторов:

а) $x, x+y, x+y+z$; б) $x+y, y+z, z+x$;

в) $x-y, y-z, z-x$?

3. Найти координаты каждого из указанных векторов пространства $R_2(x)$ в базисе $x^2, x, 1$: а) $4x-1$, б) $(2x+3)^2$.

4. Даны два базиса: e_1, e_2 и e_1', e_2'. Найти координаты вектора x в базисе e_1', e_2', если: $e_1' = 2e_1 + 3e_2$, $e_2' = e_1 + 4e_2$, $x = 5e_1 + 7e_2$.

5. Доказать, что треугольники, натянутые соответственно на векторы x, y и $\alpha x, \alpha y$, где α - произвольное ненулевое число, имеют одинаковые углы (см. замечание в конце раздела).

6. В евклидовом пространстве R^4 по данному базису построить ортонормированный: $g_1 = (1,0,1,2)$, $g_2 = (-1,0,-1,0)$, $g_3 = (0,0,2,1)$, $g_4 = (0,1,1,1)$.

7. Даны векторы e_1, e_2, образующие ортогональный базис унитарного пространства. Найти (a,b), $|a|$, $|b|$, если:

$$a = (1+i)e_1 + (2-i)e_2, \quad b = (1+i)e_1 + (2+i)e_2, \quad |e_1| = 1/\sqrt{2}, \quad |e_2| = 1.$$

Вариант 14

1. Является ли подмножество $\mathcal{L}$ элементов линейного пространства V его подпространством, если: $\mathcal{L}$ - множество рациональных чисел; V - множество вещественных чисел?

2. Показать, что для любых векторов x, y, z и любых чисел α, β, γ система векторов $\alpha x - \beta y, \gamma y - \alpha z, \beta z - \gamma x$ линейно зависима.

3. Найти координаты каждого из указанных векторов пространства $R_{2\times 2}$ в базисе $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$:

а) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ [illegible] & [illegible] \end{pmatrix}$, б) $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 7 & 12 \end{pmatrix}$.

4. Даны три базиса: e_1, e_2, e_3 и e_1', e_2', e_3'. Найти координаты вектора x в базисе e_1', e_2', e_3', если:

$e_1' = e_1 + e_2 + e_3$, $e_2' = 3e_1 + 4e_3$, $e_3' = e_3$, $x = 3e_1 - 2e_2 + e_3$.

5. В треугольнике, натянутом на векторы пространства R^4: $x = (2,-1,3,-2)$ и $y = (3,1,5,1)$, найти длины сторон. Определить углы между сторонами треугольника - векторами x, y и $x-y$. Какие из этих углов естественно считать внутренними углами треугольника, какие внешними? (См. замечание в конце раздела).

6. В евклидовом пространстве многочленов степени не выше первой, рассматриваемых на отрезке $[-1,1]$ $\left((f,g)\overset{def}{=}\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx\right)$, по данному базису $g_1=1,\ g_2=x$ построить ортонормированный.

7. В унитарном пространстве комплексных матриц с размерами $1\times n$ $\left((a,b)\overset{def}{=}\alpha_1\bar{\beta}_1+\alpha_2\bar{\beta}_2+\dots+\alpha_n\bar{\beta}_n\right.$, где $a=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$, $\left.b=(\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n)\right)$
по данному базису построить ортонормированный базис.
$(1,1,i),\ (i,1,1),\ (i,i,i)$.

Вариант 15

1. Является ли подмножество $\mathcal{L}$ элементов линейного пространства V его подпространством, если V – множество квадратных матриц $A=(a_{ij})$ третьего порядка $(a_{ij}\in R)$, $\mathcal{L}$ – множество матриц вида:

а) $\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (a\in R)$, б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Пусть r, s, v – различные действительные числа. Будет ли линейно зависима следующая система многочленов:
$(t-r)(t-s),\ (t-r)(t-v),\ (t-s)(t-v)$?

3. Даны координаты векторов a и b в некотором базисе. Найти координаты вектора c в этом же базисе, если: $a\,(-1,3,4,1)$, $b\,(2,0,1,-1)$, $c=3a-b$.

4. Даны два базиса: e_1, e_2, e_3 и e_1', e_2', e_3'. Найти координаты вектора x в базисе e_1', e_2', e_3', если:
$e_1'=2e_1+2e_2+e_3$, $e_2'=-2e_1+e_2+2e_3$, $e_3'=e_1-2e_2+2e_3$, $x=2e_1+2e_2+e_3$.

5. Сформулировать и доказать теорему косинусов для треугольника, натянутого на векторы x и y произвольного евклидова пространства (см. замечание в конце раздела).

6. В евклидовом пространстве V_3 даны два ортогональных вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Найти вектор $\bar{c}$ такой, при котором векторы a, b, c образуют ортогональный базис (используя векторное произведение), если

$\bar{a} = 2\bar{i} + 3\bar{j} - \bar{k}$, $\bar{b} = -\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$.

7. В унитарном пространстве комплексных матриц с размерами $1 \times n$ $\left((a,b) \overset{def}{=} \alpha_1 \bar{\beta}_1 + \dots + \alpha_n \bar{\beta}_n\right.$, где $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $b = (\beta_1, \dots, \beta_n)\Big)$ по данному базису построить ортонормированный базис: $(2i, 2, i)$, $(0, i, 3)$, $(0, 0, 5)$.

Вариант I6

Является ли подмножество $\mathcal{L}$ элементов линейного пространства V его подпространством, если: V – множество квадратных матриц $A = (a_{ij})$ третьего порядка $(a_{ij} \in R)$; $\mathcal{L}$ – множество матриц вида:

а) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} (a, b, c \in R)$, б) $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (a, b, c \in R)$.

2. Найти линейную комбинацию $3x_1 - 2x_2 + 7x_3$ векторов пространства R^4 : $x_1 = (3, I, -7, 4)$, $x_2 = (I, 5, 0, 6)$, $x_3 = (-I, I, 3, 0)$. Что можно сказать о системе векторов x_1, x_2, x_3?

3. Даны координаты векторов a и b в некотором базисе. Найти координаты вектора c в этом же базисе, если: a (0,2,4,7), b (-I,8,5,-3), $c = 2a + b$.

4. Найти матрицу перехода от базиса a_1, a_2 к базису b_1, b_2 по указанным разложениям этих векторов в базисе e_1, e_2 :
$a_1 = e_1 + 4e_2$, $a_2 = 3e_1 + 5e_2$, $b_1 = 7e_1 + e_2$, $b_2 = e_2$.

5. Определить, будет ли треугольник, натянутый на многочлены $t^2 + 3t$ и $2t^2 + 2t - 1$, остроугольним или тупоугольным, если скалярное произведение многочленов $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ и $g(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2$ определено формулой:

а) $(f, g) = a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2$, б) $(f, g) = a_0 b_0 + 2a_1 b_1 + a_2 b_2$

(см. замечание в конце раздела).

6. Даны векторы e_1, e_2, e_3 , образующие ортогональный базис. Найти (a, b), $|a|$, $|b|$, если $a = 2e_1 - 3e_2 + e_3$, $b = e_1 + 4e_2 - e_3$, $|e_1| = 3$, $|e_2| = 2$, $|e_3| = 4$.

7. Доказать неравенство:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k+b_k|^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2\right)^{1/2},$$

где $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ - произвольные комплексные числа.

Вариант 17

1. Является ли подмножество $\mathcal{L}$ элементов линейного пространства V его подпространством, если V - множество многочленов с вещественными коэффициентами, степень каждого из которых не выше трех, $\mathcal{L}$ - множество многочленов вида:

а) $ax^2+bx+c \; (a,b,c \in R)$;

б) $ax^2+bx+c \; (a,b,c \in R, a \neq 0)$;

в) $ax^2+b \; (a,b \in R)$.

2. Дана система многочленов $f_1(t)=1-t^2$, $f_2(t)=1+t^3$, $f_3(t)=t-t^3$, $f_4(t)=1+t+t^2+t^3$. Найти линейные комбинации многочленов этой системы:

а) $5f_1+f_2-4f_3$; б) $f_1+9f_2-4f_4$.

Что можно сказать о заданной системе многочленов?

3. Даны векторы $a=e_1+e_2$, $b=2e_1-e_2$, где e_1, e_2 - базис. Доказать, что векторы a и b образуют базис. Найти координаты вектора $c=2e_1-4e_2$ в базисе a, b.

4. Найти матрицу перехода от базиса a_1, a_2 к базису b_1, b_2 по указанным разложениям этих векторов в базисе e_1, e_2:

$a_1=e_1-e_2$, $a_2=2e_1+5e_2$, $b_1=2e_1-3e_2$, $b_2=5e_2-3e_1$.

5. Доказать теорему Пифагора и обратную ей теорему: два вектора x и y евклидова пространства перпендикулярны тогда и только тогда, когда $|x-y|^2=|x|^2+|y|^2$.

6. Даны векторы e_1, e_2, e_3, образующие ортогональный базис. Найти (a,b), $|a|$, $|b|$, если $a=e_1+e_2-e_3$, $b=e_1+e_2+e_3$, $|e_1|=2$, $|e_2|=1$, $|e_3|=3$.

7. Доказать, что в произвольном унитарном пространстве остается справедливой теорема Пифагора: если векторы x и y ортогональные, то $|x-y|^2=|x|^2+|y|^2$. Доказать вместе с тем, что обратное к теореме Пифагора утверждение неверно.

Вариант 18

1. Пусть a - фиксированный вектор евклидова пространства V, α - фиксированное действительное число. Будет ли множество всех векторов x, для которых $(x,a)=\alpha$, линейным подпространством пространства V ?

2. Доказать линейную независимость следующей "трапецеидальной" системы векторов пространства P^k (множество всех упорядоченных наборов по k элементов поля P):

$$y_1=(\alpha_{11},\ldots,\alpha_{1p},\alpha_{1,p+1},\ldots,\alpha_{1q},\alpha_{1,q+1},\ldots,\alpha_{1t},\alpha_{1,t+1},\ldots,\alpha_{1k}),$$

$$y_2=(0,\ldots,0,\alpha_{2,p+1},\ldots,\alpha_{2q},\alpha_{2,q+1},\ldots,\alpha_{2t},\alpha_{2,t+1},\ldots,\alpha_{2k}),$$

$$y_3=(0,\ldots,0,0,\ldots,0,\alpha_{3,q+1},\ldots,\alpha_{3t},\alpha_{3,t+1},\ldots,\alpha_{3k}),$$

$$y_z=(0,\ldots,0,0,\ldots,0,0,\ldots,0,\alpha_{z,t+1},\ldots,\alpha_{z,k}).$$

Здесь $\alpha_{2,p+1},\alpha_{3,q+1},\ldots,\alpha_{z,t+1}$ - элементы поля P, отличные от "0". Хотя бы один из элементов $\alpha_{11},\ldots,\alpha_{1p}$ также не равен "0".

3. Даны векторы $a=2e_1+3e_2+e_3, b=-3e_1+2e_2+4e_3$ $c=e_1-e_2-5e_3$, где e_1,e_2,e_3 - базис. Доказать, что векторы a,b,c образуют базис. Найти координаты вектора $d=4e_1+e_2-9e_3$ в базисе a,b,c.

4. Найти матрицу перехода от базиса a_1,a_2,a_3 к базису b_1,b_2,b_3 по указанным разложениям этих векторов в базисе e_1,e_2,e_3:

$$a_1=3e_1+2e_2+e_3,\ a_2=e_1-2e_2+e_3,\ a_3=2e_1+2e_2+3e_3,$$
$$b_1=e_1+e_2,\ b_2=e_1-e_3,\ b_3=e_1+e_2+e_3.$$

5. Линейное пространство V разлагается в прямую сумму подпространств $\mathcal{L}_1,\ldots,\mathcal{L}_p$. На каждом из подпространств $\mathcal{L}_i$ определено скалярное произведение. Доказать, что можно ввести скалярное произведение во всем пространстве V, положив: если x и y - произвольные векторы из V с разложениями по подпространствам $\mathcal{L}_1,\ldots,\mathcal{L}_p$ соответственно $x=x_1+\ldots+x_p$ и $y=y_1+\ldots+y_p$, то $(x,y)=$ $=(x_1,y_1)_1+\ldots+(x_p,y_p)_p$, где скалярное произведение $(x_i,y_i)_i$ выполняется по правилу, заданному в $\mathcal{L}_i$.

6. Доказать, что множество $\mathcal{L}^\perp$ всех векторов, ортогональных к линейному подпространству $\mathcal{L}$, есть также линейное подпростран-

ство ($\mathcal{L}^{\perp}$ – называется ортогональным дополнением подпространства $\mathcal{L}$).

7. Даны векторы e_1, e_2, образующие ортогональный базис унитарного пространства. Найти $(a,b), |a|, |b|$, если: $a = e_1 + (4+i)e_2$, $b = -2e_1 + (3-i)e_2$, $|e_1| = 2$, $|e_2| = 3$.

Вариант 19

1. Будет ли линейным пространством множество многочленов $f(t)$ от одного переменного с действительными коэффициентами, удовлетворяющих условиям:

а) $f(0)=1$; б) $f(0)=0$;

в) $2f(0)+3f(1)=0$;

г) $f(1)+f(2)+\dots+f(k)=0$.

2. Доказать, что линейная зависимость или линейная независимость системы векторов не нарушаются при следующих преобразованиях системы, называемых элементарными преобразованиями:

а) перестановка двух векторов системы;

б) умножение вектора системы на ненулевое число;

в) прибавление к одному вектору системы другого вектора, умноженного на произвольное число.

3. Выяснить, является ли вектор d линейной комбинацией остальных векторов, и если является, то найти эту линейную комбинацию:

а) $a_1(2,-3,4)$, $a_2(3,-1,4)$, $d(5,3,4)$;

б) $a_1=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $a_2=\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $d=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Найти матрицу перехода от базиса a_1, a_2, a_3 к базису b_1, b_2, b_3 по указанным разложениям этих векторов в базисе e_1, e_2, e_3:

$a_1 = e_1 + e_3$, $a_2 = 2e_1 + e_2$, $a_3 = 3e_1 + 2e_2$,

$b_1 = 3e_1 + 2e_2$, $b_2 = e_1 + 7e_2 + e_3$, $b_3 = 4e_3 - 2e_1$.

5. Дополнить следующую систему до ортонормированного базиса:
$x_1 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $x_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

6. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – произвольный базис действительного линейного пространства V. Доказать, что в пространстве V можно ввести скалярное произведение таким образом, чтобы система векторов $e_1, \ldots, e_n$ была ортонормированным базисом полученного евклидова пространства.

7. Даны векторы e_1, e_2, образующие ортогональный базис унитарного пространства. Найти (a, b), $|a|$, $|b|$, если:
$a = (1+i)e_1 + (2-i)e_2$, $b = (1+i)e_1 + (2+i)e_2$, $|e_1| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $|e_2| = 1$.

В а р и а н т 20

1. Будет ли линейным пространством множество всех многочленов данной степени n?

2. Выяснить, являются ли следующие системы векторов арифметического пространства линейно зависимыми:

а) $x_1 = (-3, 1, 5)$, $x_2 = (6, -2, 15)$; б) $x_1 = (4, -12, 28)$, $x_2 = (-7, 21, -49)$.

3. Выяснить, является ли вектор d линейной комбинацией остальных векторов, и если является, то найти эту линейную комбинацию:

а) $a_1\ (7, -3, 4)$, $a_2\ (3, -1, 4)$, $d\ (0, 0, 9)$;

б) $a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $d = \begin{pmatrix} 2 & 39 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

4. Доказать, что: а) любой ненулевой вектор пространства можно включить в некоторый базис этого пространства; б) любую линейно независимую систему векторов можно дополнить до базиса пространства.

5. Найти размерность подпространства, образованного всеми векторами x, для которых $(a, x) = 0$. Здесь a – фиксированный ненулевой вектор евклидова пространства.

6. В евклидовом пространстве R^3 по данному базису построить ортонормированный: $g_1 = (1,0,0)$, $g_2 = (0,1,-1)$, $g_3 = (1,1,1)$.

7. Обозначим через x_1, x_2 и y_1, y_2 координаты векторов x и y в некотором базисе комплексного линейного двумерного пространства. Найти условия на комплексные коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{21} и a_{22}, необходимые и достаточные для того, чтобы функция

$$F(x,y)=a_{11}x_1\bar{y}_1+a_{12}x_1\bar{y}_2+a_{21}x_2\bar{y}_1+a_{22}x_2\bar{y}_2$$

задавала унитарное скалярное произведение.

Вариант 21

1. Является ли линейным пространством множество всех векторов на плоскости, концы которых лежат на данной прямой? Предполагается, что начало каждого вектора находится в фиксированной точке "0" плоскости, являющейся началом прямоугольной системы координат.

2. Выяснить, являются ли следующие системы векторов арифметического пространства линейно зависимыми:

а) $x_1 = (1,2,3,0)$, $x_2 = (2,4,6,1)$; б) $x_1 = (1, i, 2-i, 3+i)$, $x_2 = (1-i, 1+i, 1-3i, 4-2i)$.

3. Выяснить, является ли вектор d линейной комбинацией остальных векторов, и если является, то найти эту линейную комбинацию:

а) $a_1 = 2+x+x^2$, $a_2 = 3+5x$, $d = 1-3x-2x^2$;

б) $a_1 = 1+x+x^2$, $a_2 = 1-x$, $d = 2+4x+3x^2$.

4. В пространстве R^4 найти два различных базиса, имеющих общие векторы $e_1 = (1,1,0,0,)$ и $e_2 = (0,0,1,1)$.

5. Пусть процесс ортогонализации применяется к произвольной системе векторов $x_1, \dots, x_k$. Доказать, что:

а) если система $x_1, \dots, x_k$ линейно зависима, то на некотором шаге процесса ортогонализации получится нулевой вектор;

б) если векторы $y_1, \dots, y_{e-1}$ $(e \le k)$, полученные в процессе ортогонализации, ненулевые, а $y_e = \theta$, то в исходной системе векторов $x_1, \dots, x_k$ подсистема $x_1, \dots, x_{e-1}$ линейно независима, а вектор x_e линейно выражается через эту подсистему.

6. В евклидовом пространстве многочленов степени не выше первой, рассматриваемых на отрезке $[-1;1]$ $\left((f,g) \overset{def}{=} \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx\right)$, по данному базису $g_1 = 1$, $g_2 = x$, построить ортонормированный.

7. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ и $y_1, \ldots, y_n$ - координаты векторов x и y в некотором базисе комплексного линейного n -мерного пространства. Определить, может ли функция $F(x,y)$ задавать скалярное произведение, а если нет, то указать, какие из свойств унитарного скалярного произведения не выполняются: $F(x,y) = 3x_1\bar{y}_1 + 4x_2\bar{y}_2$,

а) $n = 2$; б) $n \geqslant 3$.

Вариант 22

1. Можно ли определить во множестве из двух элементов операции сложения и умножения на число так, чтобы это множество стало линейным пространством?

2. Выяснить, являются ли следующие системы векторов арифметического пространства линейно зависимыми:

а) $x_1 = (1,2,3)$, $x_2 = (2,5,7)$, $x_3 = (3,7,10)$;

б) $x_1 = (1,2,3)$, $x_2 = (2,5,7)$, $x_3 = (3,7,11)$.

3. Найти максимальное число линейно независимых векторов в системе $x_1\,(2,-1,3,4)$, $x_2\,(1,5,1,3)$, $x_3\,(-1,0,2,5)$, $x_4\,(0,-6,4,6)$, $x_5\,(1,6,-2,1)$.

4. Систему многочленов $t^5+t^4, t^5-3t^3, t^5+2t^2, t^5-t$ дополнить до базиса пространства $R_5(t)$ (пространство многочленов степени $\leqslant 5$ с действительными коэффициентами).

5. Применяя процесс ортогонализации, построить ортогональный базис подпространства, натянутого на заданную систему векторов: $x_1 = (2,3,-4,-6)$, $x_2 = (1,8,-2,-16)$, $x_3 = (12,5,-14,5)$, $x_4 = (3,11,4,-7)$.

6. Написать неравенство треугольника для матриц

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \quad и \quad B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix},$$

принадлежащих евклидову пространству квадратных матриц второго порядка, в котором скалярное произведение определено равенством

$$(A,B) = a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2.$$

7. Доказать неравенство

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\bar{b}_i\right|^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n}|a_i|^2 \sum_{i=1}^{n}|b_i|^2$$

для любых комплексных чисел $a_1, \ldots, a_n$; $b_1, \ldots, b_n$.

Вариант 23

1. Выяснить, образует ли данное множество функций на произвольном отрезке $[a,b]$ линейное пространство относительно обычных операций сложения и умножения на число:

множество функций, непрерывных на $[a,b]$;

-"- дифференцируемых на $[a,b]$;

-"- интегрируемых по Риману на $[a,b]$;

-"- неотрицательных на $[a,b]$.

2. Показать, что две системы векторов эквивалентны тогда и только тогда, когда их линейные оболочки совпадают.

3. Найти максимальное число линейно независимых векторов в системе $x_1(-1,2,0,7)$, $x_2(1,3,-1,0)$; $x_3(4,1,2,5)$, $x_4(4,8,1,12)$, $x_5(7,14,2,31)$.

4. Проверить, образуют ли векторы $e_1,\dots,e_n$ базис пространства R^n и найти координаты вектора x в этом базисе:

$e_1=(2,2,-1)$, $e_2=(2,-1,2)$, $e_3=(-1,2,2)$, $e_4=(1,1,1)$.

5. Применяя процесс ортогонализации, построить ортогональный базис подпространства, натянутого на заданную систему векторов:

$x_1=(1,1,-1,-2)$, $x_2=(-2,1,5,11)$, $x_3=(0,3,3,7)$, $x_4=(3,-3,-3,-9)$.

6. Даны векторы e_1,e_2,e_3,e_4, образующие ортогональный базис. Найти угол между векторами x и y, если

$x=e_1-2e_2+e_3+e_4$, $y=e_2+2e_3-e_4$; $|e_1|=3$, $|e_2|=2$, $|e_3|=1$, $|e_4|=2$.

7. Доказать равенство $4(x,y)=|x+y|^2-|x-y|^2+i|x+iy|^2-i|x-iy|^2$, где x и y - любые векторы унитарного пространства.

Вариант 24

1. Выяснить, образует ли данное множество функций на произвольном отрезке $[a,b]$ линейное пространство относительно обычных операций сложения и умножения на число:

множество функций таких, что $f(a)=0$;

-"- таких, что $f(a)=1$;

-"- таких, что $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$;

монотонно возрастающих на $[a,b]$:

монотонных на $[a,b]$.

2. В системе векторов $x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n$ векторы $y_1, \dots, y_n$ линейно выражаются через векторы $x_1, \dots, x_m$. Показать, что система $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n$ эквивалентна системе $x_1, \dots, x_m$.

3. Найти все значения λ, при которых вектор d является линейной комбинацией векторов a_1, a_2, a_3 если $a_1(2,-1,3)$, $a_2(3,1,4)$, $a_3(1,-1,2)$, $d\ (6,\lambda,12)$.

4. Проверить, образуют ли векторы $e_1, \dots, e_n$ базис пространства R^n, и найти координаты вектора x в этом базисе:
$e_1 = (1,2,1,1)$, $e_2 = (2,3,1,0)$, $e_3 = (3,1,1,-2)$, $e_4 = (4,2,-1,-6)$, $x = (0,0,2,7)$.

5. Доказать, что если система векторов пространства R^n

$$x_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{13}, \dots, \alpha_{1n}),$$
$$x_2 = (0, \alpha_{22}, \alpha_{23}, \dots, \alpha_{2n}),$$
$$x_3 = (0, 0, \alpha_{33}, \dots, \alpha_{3n}),$$
$$\dots\dots\dots$$
$$x_n = (0, 0, 0, \dots, \alpha_{nn})$$

образует ортогональный базис этого пространства, то:

а) $\alpha_{ii} \neq 0, i = 1, \dots, n$; б) $\alpha_{ij} = 0$, если $i \neq j$.

6. Даны векторы e_1, e_2, e_3, e_4, образующие ортогональный базис. Найти угол между векторами x и y, если:
$x = 2e_1 - e_2 + e_3$, $y = e_2 + e_3 - e_4$; $|e_1| = 2$, $|e_2| = 3$; $|e_3| = 3$, $|e_4| = \sqrt{7}$.

7. Доказать, что для любых векторов x и y унитарного пространства справедливо утверждение $|x+y|^2 + |x-y|^2 = 2|x|^2 + 2|y|^2$.

Вариант 25

1. Выяснить, является ли данное множество квадратных матриц порядка n линейным подпространством в пространстве всех квадратных матриц порядка n, и если является, то найти его размерность:
множество матриц с нулевой первой строкой;
-"- диагональных матриц;
-"- симметричных матриц;
-"- вырожденных матриц.

2. Будут ли эквивалентными следующие системы векторов:

а) $x_1 = (1,0,0)$, $y_1 = (0,0,1)$, б) $x_1 = (1,0,0)$ $y_1 = (1,0,0)$,
$x_2 = (0,1,0)$, $y_2 = (0,1,1)$, $x_2 = (0,1,0)$, $y_2 = (0,1,1)$,
$x_3 = (0,0,1)$, $y_3 = (1,1,1)$. $x_3 = (0,0,1)$, $y_3 = (1,1,1)$.

3. Найти все значения λ, при которых вектор d является линейной комбинацией векторов a_1, a_2, a_3, если:

$a_1(3,\lambda,4)$, $a_2(\lambda,1,3)$, $a_3(0,5,1)$, $d(3-3\lambda,\lambda+2,-4)$.

4. Найти координаты многочлена $t^5-t^4+t^3-t^2-t+1$ в каждом из следующих базисов пространства $R_5(t)$ (многочленов с действительными коэффициентами степени $\leqslant 5$):

а) $1, t, t^2, t^4, t^5$;

б) $1, t+1, t^2+1, t^3+1, t^4+1, t^5+1$;

в) $1+t^3, t+t^3, t^2+t^3, t^3, t^4+t^3, t^5+t^3$.

5. В пространстве $R_n(t)$ многочленов степени $\leqslant n$ определить скалярное произведение так, чтобы базис $1, t, \frac{t^2}{2}, \dots, \frac{t^n}{n!}$ стал ортонормированным.

6. Даны векторы e_1, e_2, e_3, e_4, образующие ортогональный базис. Найти угол между векторами x и y, если $x=3e_1+e_2-2e_3+e_4$, $y=2e_1+2e_2-3e_3+e_4$; $|e_1|=1$; $|e_2|=2$; $|e_3|=3$; $|e_4|=1$.

7. Доказать, что векторы x и y унитарного пространства ортогональны тогда и только тогда, когда $|\alpha x+\beta y|^2=|\alpha x|^2+|\beta y|^2$ для любых чисел α и β.

Замечание. По аналогии с трехмерным евклидовым пространством V_3 упорядоченная тройка векторов $x, y, x-y$ произвольного евклидова пространства рассматривается как треугольник, о котором говорят, что он "натянут на векторы x и y".

ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Составитель **Прокофьев Леонтий Николаевич**

Редактор Е. Д. Антонова
Техн. редактор Г. А. Усачева
Корректор Н. С. Куприянова

Подписано в печать 10.02.91 Формат 60×84 1/16.
Бумага оберточная. Печать оперативная.
Усл. печ. л. 2,6. Уч.-изд. л. 2,7. Усл. кр.-отт. 2,5.
Тираж 200 экз. Заказ 71. Бесплатно.

Самарский ордена Трудового Красного Знамени
авиационный институт имени академика С. П. Королева.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

Участок оперативной полиграфии
Самарского авиационного института.
443001 Самара, ул. Ульяновская, 18.