

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР
КУЙБЫШЕВСКИЙ ордена ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ АВИАЦИОННЫЙ
институт им. С.П.КОРОЛЕВА

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
Лабораторный практикум
по
высшей математике

Рассмотрен и утвержден
редакционным советом института
19 февраля 1971 года

Куйбышев 1971

Составители: И.Н.КАЩЕЕВА, А.С.КРУГЛОВА
О.Ф.МЕНЬШИХ, Г.Д.ТРОШИН, М.П.ШАТУНОВ

Отв. редактор — к.ф.м.н., доцент Г.Д.ТРОШИН

Р е ц е н з е н т ы : М.П.ШАТУНОВ (6) М.Н.ШАФЕЕВ,
Ф.А.МАТВЕЕВА

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО
ИСКЛЮЧЕНИЯ НЕИЗВЕСТНЫХ

Рассмотрим систему трех уравнений с тремя неизвестными

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= h_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= h_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= h_3 \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

Решением системы (I) называется совокупность трех чисел x_1, x_2, x_3 , удовлетворяющих одновременно всем уравнениям системы.

Если определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля, то система (I) имеет только одно решение, определяемое по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} ; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} ; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} , \quad (2)$$

где $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ - определители, получаемые из определителя системы Δ путем соответственной замены коэффициентов при искомом неизвестном свободными членами уравнений системы (I)

Формулы Крамера имеют большое теоретическое значение, а практически мало эффективны, т.к. при решении системы (I) с помощью формул (2) нужно выполнить большое количество действий умножения и деления. Рассматриваемый ниже метод последовательного исключения неизвестных требует в этих случаях в несколько раз меньше арифметических действий, чем формулы Крамера. Метод последовательного исключения неизвестных называется м е т о д о м Г а у с с а. При решении системы (I) этим методом выбирают уравнение системы, в котором $a_{11} \neq 0$ (отличен от нуля). Пусть, например, $a_{11} \neq 0$, тогда a_{11} называют ведущим элементом.

Коэффициенты первого уравнения системы (I) делят на ведущий элемент, получают уравнение

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}} x_3 = \frac{h_1}{a_{11}} \quad (3)$$

Далее, прибавляя уравнение (3), умноженное соответственно на $-a_{21}$ и $-a_{31}$ ко второму и третьему уравнениям системы (I) получим систему двух уравнений с двумя неизвестными x_2 и x_3

$$\left. \begin{aligned} b_{22}x_2 + b_{23}x_3 &= h'_2 \\ b_{32}x_2 + b_{33}x_3 &= h'_3 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

В системе (4) выбираем ведущий элемент и, повторяя те же операции, что и с системой (I), приходим к одному уравнению с одним неизвестным. Эти же действия производятся над контрольными числами (суммами коэффициентов каждого уравнения). Сумма полученных коэффициентов в каждой строке должна совпадать с контрольным числом в пределах точности расчета. В случае расхождения строку следует пересчитать и тогда перейти к расчету следующей строки. Изложенные выше действия метода последовательного исключения неизвестных удобно провести по схеме, называемой схемой единственного деления или схемой расчета и контроля (табл. I).

Обозначение уравнений и действий	Расчет	К о н т р о л ь	
		строчные суммы	контрольные суммы
	Заданная сумма		
A_1	$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = h_1$	$a_{11} + a_{12} + a_{13} + h_1$	$S_1 = a_{11} + a_{12} + a_{13} + h_1$
A_2	$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = h_2$	$a_{21} + a_{22} + a_{23} + h_2$	$S_2 = a_{21} + a_{22} + a_{23} + h_2$
A_3	$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = h_3$	$a_{31} + a_{32} + a_{33} + h_3$	$S_3 = a_{31} + a_{32} + a_{33} + h_3$

Деление каждого уравнения на коэффиц. при первом неизвестном

$A'_1 = \frac{A_1}{-a_{11}}$	$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 = \frac{h_1}{a_{11}}$	$1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} + \frac{a_{13}}{a_{11}} + \frac{h_1}{a_{11}}$	$\frac{S_1}{a_{11}}$
$A'_2 = \frac{A_2}{a_{21}}$	$x_1 + \frac{a_{22}}{a_{21}}x_2 + \frac{a_{23}}{a_{21}}x_3 = \frac{h_2}{a_{21}}$	$1 + \frac{a_{22}}{a_{21}} + \frac{a_{23}}{a_{21}} + \frac{h_2}{a_{21}}$	$\frac{S_2}{a_{21}}$
$A'_3 = \frac{A_3}{a_{31}}$	$x_1 + \frac{a_{32}}{a_{31}}x_2 + \frac{a_{33}}{a_{31}}x_3 = \frac{h_3}{a_{31}}$	$1 + \frac{a_{32}}{a_{31}} + \frac{a_{33}}{a_{31}} + \frac{h_3}{a_{31}}$	$\frac{S_3}{a_{31}}$

Вычитание первого уравнения из всех последующих

$B_2 = A'_2 - A'_1$	$b_{22}x_2 + b_{23}x_3 = h'_2$	$b_{22} + b_{23} + h'_2$	$S'_2 = \frac{S_2}{a_{21}} - \frac{S_1}{a_{11}}$
$B_3 = A'_3 - A'_1$	$b_{32}x_2 + b_{33}x_3 = h'_3$	$b_{32} + b_{33} + h'_3$	$S'_3 = \frac{S_3}{a_{31}} - \frac{S_1}{a_{11}}$
Здесь введены обозначения: $b_{22} = \frac{a_{22}}{a_{21}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}$			$h'_2 = \frac{h_2}{a_{21}} - \frac{h_1}{a_{11}}$ и т.д.

Дальнейшее исключение неизвестных производится в том же порядке

$B'_2 = \frac{B_2}{b_{22}}$	$x_2 + \frac{b_{23}}{b_{22}}x_3 = \frac{h'_2}{b_{22}}$	$1 + \frac{b_{23}}{b_{22}} + \frac{h'_2}{b_{22}}$	$\frac{S'_2}{b_{22}}$
$B'_3 = \frac{B_3}{b_{32}}$	$x_2 + \frac{b_{33}}{b_{32}}x_3 = \frac{h'_2}{b_{32}}$	$1 + \frac{b_{33}}{b_{32}} + \frac{h'_2}{b_{32}}$	$\frac{S'_3}{b_{32}}$
$C_3 = B'_3 - B'_2$	$c_{33}x_3 = h''_3$	$c_{33} + h''_3$	$S''_3 = \frac{S'_3}{b_{32}} - \frac{S'_2}{b_{22}}$
$C'_3 = \frac{C_3}{c_{33}}$	$x_3 = \frac{h''_3}{c_{33}}$	$1 + \frac{h''_3}{c_{33}}$	$\frac{S''_3}{c_{33}}$

Здесь введены обозначения: $c_{33} = \frac{b_{33}}{b_{32}} - \frac{b_{23}}{b_{22}}$ $h''_3 = \frac{h'_3}{b_{32}} - \frac{h'_2}{b_{22}}$

Подчеркнутые в схеме уравнения A_1', B_2', C_3' обозначают приведенную систему вида

$$\left. \begin{aligned} x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 &= \rho_1 \\ x_2 + \beta_3 x_3 &= \rho_2 \\ x_3 &= \rho_3 \end{aligned} \right\}, \quad (5)$$

где $\alpha_2 = \frac{a_{12}}{a_{11}}$, $\alpha_3 = \frac{a_{13}}{a_{11}}$, $\rho_1 = \frac{h_1}{a_{11}}$, $\beta_3 = \frac{b_{23}}{b_{22}}$,
 $\rho_2 = \frac{h_2'}{b_{22}}$, $\rho_3 = \frac{h_3''}{c_{33}}$,

равносильную исходной системе (I). Последнее уравнение дает неизвестное x_3 , остальные - находятся с помощью последовательных подстановок в предыдущие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} x_3 &= \rho_3 \\ x_2 &= \rho_2 - \beta_3 x_3 \\ x_1 &= \rho_1 - \alpha_2 x_2 - \alpha_3 x_3 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Переход от системы (I) к системе (5) называется прямым ходом, а получение из системы (5) решения (6) называется обратным. Для контроля обратного хода используется решение контрольной системы, отличающейся от данной правыми частями

$$\left. \begin{aligned} a_{11} \bar{x}_1 + a_{12} \bar{x}_2 + a_{13} \bar{x}_3 &= S_1 \\ a_{21} \bar{x}_1 + a_{22} \bar{x}_2 + a_{23} \bar{x}_3 &= S_2 \\ a_{31} \bar{x}_1 + a_{32} \bar{x}_2 + a_{33} \bar{x}_3 &= S_3 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где x_1 , x_2 и x_3 - решения контрольной системы (7). Так как над контрольными числами производятся те же действия, что и над правыми частями h_1, h_2 и h_3 , то система (7) равносильна "приведенной контрольной системе"

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_1 + \alpha_2 \bar{x}_2 + \alpha_3 \bar{x}_3 &= \frac{S_1}{a_{11}} \\ \bar{x}_2 + \beta_3 \bar{x}_3 &= \frac{S_2'}{b_{22}} \\ \bar{x}_3 &= \frac{S_3''}{c_{33}} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Решение контрольной системы должно отличаться от решения заданной системы на единицу:

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}_1 &= x_1 + I \\ \bar{x}_2 &= x_2 + I \\ \bar{x}_3 &= x_3 + I \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Это можно проверить подстановкой (9) в уравнения (7)

$$a_{11}(x_1 + I) + a_{12}(x_2 + I) + a_{13}(x_3 + I) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3) + (a_{11} + a_{12} + a_{13})I = h_1 + a_{11} + a_{12} + a_{13} = S_1$$

Если условия (9) выполнены, то вычисления проведены без ошибок. Проверка решения осуществляется подстановкой полученных результатов в исходные уравнения.

Весь расчет ведется с двумя запасными знаками во избежание погрешностей от округления. В окончательном результате, т.е. когда найдены неизвестные, запасные знаки отбрасываются при округлении, приводящем к приближенному решению системы. Повышения точности решения методом Гаусса удастся добиться перегруппировкой уравнений и неизвестных так, что каждый раз наибольший коэффициент оказывался бы первым коэффициентом в первом уравнении. Это так называемая схема Гаусса с выбором главного элемента.

Можно провести оценку погрешности промежуточных операций по формулам абсолютной и относительной погрешностей, но получающаяся при этом оценка погрешности окончательного результата оказывается сильно завышенной. (Учитываем, что хорошее совпадение контрольных и строчных сумм говорит о том, что запасных знаков взято достаточно).

П р и м е ч а н и е. Если отношение наибольшего коэффициента при неизвестном к определителю системы мало, то методом Гаусса пользоваться не рекомендуется, так как в этом случае нет никакой гарантии относительно точности решения.

П р и м е р. Решить систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{aligned} 6,214 x_1 + 2,180 x_2 + 3,184 x_3 &= 49,91, \\ -1,351 x_1 + 8,224 x_2 + 5,224 x_3 &= 50,17, \\ 2,489 x_1 - 0,459 x_2 + 4,299 x_3 &= 32,68 \end{aligned}$$

Выпишем коэффициенты и результаты соответствующих действий (табл. 2)

Таблица 2

Обознач. уравне- ний и действий	Коэффициенты системы				Контроль	
	x_1	x_2	x_3	свободные члены	строчные суммы	контрольные суммы
A_1	6,214	2,180	3,184	49,91	61,488	61,488
A_2	-1,351	8,224	5,224	50,17	62,267	62,267
A_3	2,489	-0,459	4,299	32,68	39,009	39,009
$A'_1 = \frac{A_1}{a_{11}}$	I	0,350821	0,512391	8,03186	9,89507	9,89507
$A'_2 = \frac{A_2}{a_{21}}$	I	-6,08734	-3,86677	-37,1355	-46,0896	-46,0896
$A'_3 = \frac{A_3}{a_{31}}$	I	-0,184411	1,72720	13,1298	15,6726	15,6726
$B_2 = A'_2 - A'_1$	-	-6,43816	-4,37916	-45,1674	-55,9847	-55,9847
$B_3 = A'_3 - A'_1$	-	-0,535232	1,21481	5,0979	5,7775	5,7775
$B'_2 = \frac{B_2}{b_{22}}$	-	I	0,680188	7,01558	8,69576	8,69576
$B'_3 = \frac{B_3}{b_{32}}$	-	I	-2,26969	-9,5247	-10,7944	-10,7944
$C_3 = B'_3 - B'_2$	-	-	-2,94988	-16,54130	-19,4912	-19,4902
$C'_3 = \frac{C_3}{c_{33}}$	-	-	I	5,60711	6,60711	6,60712
Обратный	-	-	I	5,6071	6,6071	6,60712
ход	-	I	-	3,20169	4,20169	4,20168
	I	-	-	4,03561	5,03560	5,03560

На основании решения системы (6)

$$x_3 = 5,6071$$

$$x_2 = 7,01558 - 0,680188 \cdot 5,60711 = 3,20169,$$

$$x_1 = 8,03186 - 0,350821 \cdot 3,20169 - \\ - 0,512391 \cdot 5,60711 = 4,03561.$$

Решения контрольной системы (8) дает

$$\bar{x}_3 = 6,60712,$$

$$\bar{x}_2 = 4,20168,$$

$$\bar{x}_1 = 5,03560.$$

Сравнение искомым неизвестных с решением контрольной системы показывает, что погрешности сказываются лишь на втором запасном знаке. При округлении отбросим запасные знаки, что дает:

$$x_1 = 4,036,$$

$$x_2 = 3,202,$$

$$x_3 = 5,607.$$

ЛИТЕРАТУРА

Г. Л.З.Румшиский. Вычислительный лабораторный практикум.
Физматгиз, М, 1963.

ТАБУЛИРОВАНИЕ и ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

§ I. Табулирование функций

Табулированием функции называется составление таблицы значений функции $y = f(x)$, заданной аналитически на определенном отрезке $[a, b]$, с заданными точностью и шагом. Под шагом понимают разность между последующим и предыдущим значениями аргумента, при которых вычисляются функции.

При табулировании надо:

I. Оформить расчетную таблицу, заполняя столбцы последовательными действиями, составляющими данную функцию.

x_1	2	3	$y=f(x)$	Δy	$\Delta^2 y$

2. Определить точность промежуточного вычисления, исходя из заданной точности составляемой таблицы и руководствуясь правилами действий над приближенными числами.

Рассмотрим пример:

$$y = \frac{\pi \sin x}{1-x^2} + \frac{0.34}{x}$$

Составим таблицу с четырьмя верными десятичными знаками после запятой на отрезке $[0,50, 0,60]$ с $h = 0,01$ (табл. 3).

Промежуточные расчеты надо вести с одним запасным знаком, т.е. с точностью до 0,00001. Значения $\sin x$, x^2 и $\frac{1}{x}$ находятся по таблицам Сегала и Семендяева. Умножение на $\pi \approx 3,14159$ в

Таблица 3

I	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x	$\sin x$	$\pi \sin x$	x^2	$1 - x^2$	$\frac{\pi \sin x}{1 - x^2}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{0,34}{x}$	$\frac{\pi \sin x}{1 - x^2} + \frac{0,04}{x}$	Δy	$\Delta^2 y$
0,50	0,47943	1,50617	0,25000	0,75000	2,00823	2,00000	0,68000	2,6882	513	26
0,51	0,48818	1,53366	0,26040	0,73990	2,07280	1,96078	0,66667	2,7395	539	28
0,52	0,49688	1,56099	0,27040	0,72960	2,13951	1,92308	0,65385	2,7934	567	29
0,53	0,50553	1,58817	0,28090	0,71910	2,20855	1,88679	0,64151	2,8501	596	31
0,54	0,51414	1,61522	0,29160	0,70840	2,28010	1,85185	0,62963	2,9097	627	33
0,55	0,52269	1,64208	0,30250	0,69750	2,35424	1,81818	0,61818	2,9724	660	33
0,56	0,53119	1,66878	0,31360	0,68640	2,43121	1,78571	0,60714	3,0384	693	36
0,57	0,53963	1,69530	0,32490	0,67510	2,51118	1,75439	0,59649	3,1077	729	39
0,58	0,54802	1,72165	0,33640	0,66360	2,59441	1,72444	0,58621	3,1806	768	41
0,59	0,55636	1,74786	0,34810	0,65190	2,68118	1,69492	0,57627	3,2574	809	
0,60	0,56464	1,77387	0,36000	0,64000	2,77167	1,66667	0,56667	3,3383		

столбце (3), деление в столбце (6), умножение в столбце (8), сложение в столбце (9) производится на счетных машинах. Результаты вписываются округленными до пяти знаков после запятой в промежуточных столбцах и до четырех в столбце (9) значений y .

Табличные разности записывают целыми числами в единицах младшего разряда значений.

§ 2. Линейная интерполяция

Интерполированием функции называется вычисление значений таблично заданной функции $y = f(x)$ для промежуточных значений аргумента (не имеющих в таблице). Задача линейной интерполяции решается следующим образом. Пусть значения функции $y = f(x)$ известны при значениях аргумента $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ и требуется найти значения функции при промежуточных значениях

$x_0 < \xi_1 < x_1; x_1 < \xi_2 < x_2; \dots; x_{n-1} < \xi < x_n$ этого аргумента. При линейной интерполяции в качестве приближенного значения функции в точке ξ_i принимается значение ординаты η_i точки $(\xi_i; \eta_i)$ прямой, проходящей через точки $(x_{i-1}; y_{i-1})$ и $(x_i; y_i)$ (рис. I). Геометрически это означает замену дуги кривой $y = f(x)$ между точками $M_{i-1}(x_{i-1}; y_{i-1})$ и $M_i(x_i; y_i)$ хордой $M_{i-1}M_i$. Аналитически это означает, что зависимость величины y на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ от величины x считается линейной. Из уравнения прямой $\frac{y - y_{i-1}}{y_i - y_{i-1}} = \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$

получаем $\frac{\eta_i - y_{i-1}}{y_i - y_{i-1}} = \frac{\xi_i - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$,

откуда

$$\eta_i = y_{i-1} + \frac{\xi_i - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} (y_i - y_{i-1}), \quad (I)$$

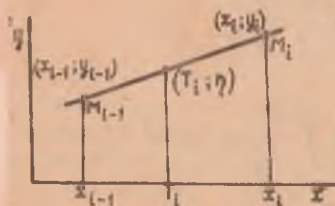


Рис. I.

где $x_i - x_{i-1} = h_i$ - шаг таблицы,
 $\Delta y_{i-1} = y_i - y_{i-1}$ - табличная разность функций.

Обычно $h_1 = h_2 = \dots = h_i = \dots = h_n = h$.

Практически формулу (I) применяют в виде $\eta_i = y_{i-1} + R$ где поправка равна

$$R = \frac{\xi_i - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \Delta y_{i-1}$$

По этой формуле, справедливой для $i = 1, 2, \dots, i, \dots, n$, и вычисляются искомые промежуточные значения функции при линейной интерполяции.

Пример. Найти линейной интерполяцией $e^{1,00233}$ по таблицам Сегала и Семендяева функции $y = e^x$. Приводим нужный участок таблицы. Здесь $x_0 = 1,002$ $y_0 = 2,7237$,
 $x_1 = 1,003$ $y_1 = 2,7264$.

x	
1,000	2,7183
01	7210
02	7237
03	7264
04	7292
1,005	2,7319
06	7346

Шаг таблицы $h = 0,001$. Табличная разность функции

$$\Delta y = y_1 - y_0 = 2,7264 - 2,7237 = 0,0027$$

$$\xi_i = 1,0023$$

Искомое значение $y = e^{1,00233}$ вычисляем по формуле

$$y = y_0 + \text{поправка.}$$

Поправка

$$R = \frac{\xi_i - x_0}{h} \cdot \Delta y = \frac{1,00233 - 1,002}{0,001} \cdot 0,0027 = 0,0009.$$

Искомое значение

$$y = e^{1,00233} = 2,7237 + 0,0009 = 2,7246$$

О т в е т :

$$e^{1,00233} = 2,7246$$

З а м е ч а н и я

1. Погрешность линейной интерполяции

$$\sigma(x) = f(\xi_i) - \left[(y_{i-1} - \frac{\xi_i - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}})(y_i - y_{i+1}) \right], \quad |\sigma(x)| \leq \frac{Mh^2}{8},$$

где M - наибольшее значение $|f''(x)|$ на отрезке

$$[x_{i-1}; x_i]$$

2. О допустимости линейной интерполяции.

О таблице функции говорят, что она допускает линейную интерполяцию, если погрешность линейной интерполяции не превосходит половины единицы младшего разряда табличных значений функции. При условии монотонности $f''(x)$ можно доказать следующий признак:

таблица допускает линейную интерполяцию, если соседние табличные разности отличаются не более чем на четыре единицы (младшего класса).

ЛИТЕРАТУРА

1. П.В.Мелентьев. Приближенные вычисления. Физматгиз, М, 1962.
2. Б.П.Демидович, И.А.Марон. Основы вычислительной математики. Изд. "Наука", М, 1966.
3. Л.З.Румшиский. Вычислительный лабораторный практикум. Физматгиз, М, 1963.
4. Р.Я.Берри, И.А.Жабин и др. Элементы вычислительной математики. Физматгиз.
5. Г.Н.Положий, И.А.Пахарева, И.З.Стопаненко, П.С.Бондаренко, И.М.Великованенко. Математический практикум. Физматгиз, М, 1960.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ХОРД И КАСАТЕЛЬНЫХ

Среди множества уравнений вида $f(x) = 0$ мало таких, корни которых можно определить точно. Хотя уравнения, приводящиеся к алгебраическим, не выше четвертой степени и могут быть решены по готовым формулам с любой степенью точности, однако практически уже для уравнений третьей степени эти формулы настолько сложны, что предпочтительнее отыскивать корни, применяя специальные способы приближенного решения уравнений. Некоторые из этих способов одинаково применимы к отысканию корней как трансцендентных, так и алгебраических уравнений.

Наиболее простыми являются метод проб, метод хорд и метод касательных (метод Ньютона). Перед вычислением действительного корня уравнения необходимо его отделить, т.е. найти интервал, в котором находится только один этот корень. В результате отделения должен быть получен достаточно узкий интервал, в котором находится вычисляемый корень.

Лабораторная работа складывается из двух этапов:

1. Отделение корней.

2. Уточнение корней до заданной степени точности (используя метод проб, хорд и касательных).

1. Отделение корня. Действительные корни уравнения $f(x) = 0$ можно найти приближенно как абсциссы точек пересечения графика

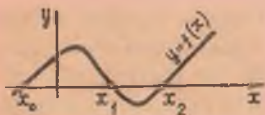


Рис. 2.

функции $y = f(x)$ с осью Ox (рис.2). Для отделения корней надо указать отрезок, на котором находится один корень уравнения, поэтому при построении кривой $y = f(x)$ особой точности не требуется. На практике часто бывает выгодно уравнение $f(x) = 0$ заменить равносильным $\varphi(x) = \psi(x)$,

где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ - более простые для построения, чем функция $f(x)$.

Построим графики функций $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$, иско-
мые корни получим как абсциссы точек пересечения этих графиков
(рис. 3, 4, 5). Графическим способом легко отделяются корни уравне-
ния, если нет среди них близких между собой. В противном случае

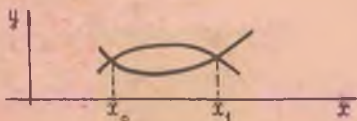


Рис. 3.

полезна теорема из анализа: если непрерывная функция $f(x)$ принимает значения разных знаков на концах отрезка $[a, b]$, то внутри его содержится, по крайней мере, одно число x_0 , при котором $f(x_0) = 0$. Корень x_0 будет заведомо единственным, если производная $f'(x)$ существует и сохраняет постоянный знак внутри $[a, b]$

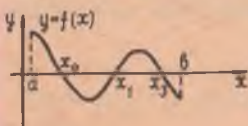


Рис. 4.

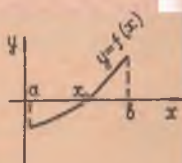


Рис. 5.

2. Метод проб. Пусть корень x_0 уравнения $f(x) = 0$ принадлежит отрезку $[a, b]$, причем на $[a, b]$ этот корень единственный. $f(x)$ - непрерывная функция на $[a, b]$ и $f(a) \cdot f(b) < 0$, т.е. значения $f(x)$ на концах отрезка разных знаков. Допустим, что

$$f(a) \cdot f(b) > 0$$

Возьмем любое значение $x = x'$ в интервале $[a, b]$; если $f(x') < 0$, то корень x_0 принадлежит отрезку $[x', b]$, если $f(x') > 0$, то корень принадлежит $[a, x']$. Продолжая этот процесс, можно отделить корень x_0 отрезком длиной, не превосходящей заданной степени точности. Методом проб можно вычислить корень с любой степенью точности, однако он практически мало пригоден для вычисления корня с большой точностью, так как требует большого количества вычислений. Поэтому в таких случаях применяют, например, метод касательных.

3. Метод хорд. (рис. 6). Пусть, по-прежнему, корень x_0 принадлежит отрезку $[a, b]$, $f(x)$ - непрерывная функция, причем,

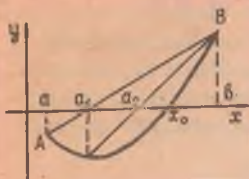


Рис. 6.

$f(a) \cdot f(b) < 0$. Пусть для определенности $f(a) < 0$ и $f(b) > 0$. Соединим концы дуги АВ хордой. Точка пересечения хорды с осью Ox дает приближенное значение x_0 корня. Применяя этот метод к отрезку $[a_1, b]$, получим второе приближение корня a_2 и т.д. Уравнение прямой, проходящей через две точки А $(a, f(a))$ и В $(b, f(b))$, имеет вид

$$\frac{x-a}{b-a} = \frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)},$$

отсюда, полагая $x = a_1$ и $y = 0$, получим формулу:

$$a_1 = a - \frac{f(a)(b-a)}{f(b)-f(a)}.$$

4. Метод касательных (рис. 7). Пусть корень x_0 уравнения $f(x) = 0$ отделен на отрезке $[a, b]$, причем $f'(x)$ и $f''(x)$ непрерывны на $[a, b]$ и сохраняют определенные знаки. Пусть для определенности $f''(x) > 0$ на $[a, b]$ и $f(b) > 0$. Проведем касательную к кривой $y = f(x)$ в точке В $(b, f(b))$ для которой $f(b) \cdot f''(b) > 0$.

В качестве первого приближения b_1 корня возьмем абсциссу точки пересечения этой касательной с осью Ox . Через точку В $(b, f(b))$ снова проведем касательную, абсцисса точки пересечения которой с осью Ox дает второе приближение корня b_2 и т.д.

Уравнение касательной в точке В $(b, f(b))$:

$$y - f(b) = f'(b)(x - b).$$

Полагая $y = 0$ и $x = b_1$, получим формулу:

$$b_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}.$$

Заметим, что если в нашем случае провести касательную в точке А, где $f(a) \cdot f''(a) < 0$, то получили бы точку x' , лежащую вне отрезка $[a, b]$.

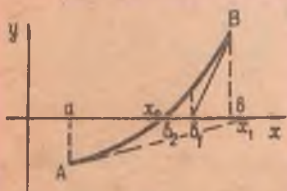


Рис. 7.

5. Комбинированный метод. Пусть $f(a) \cdot f(b) < 0$, а

$f'(x)$ и $f''(x)$ сохраняют каждая свой знак на отрезке $[a, b]$. Соединяя метод хорд и метод касательных, получаем метод, на каждом этапе которого находим значения по недостатку и значения по избытку корня x_0 . Отсюда, в частности, вытекает, что цифры общие для приближения справа и приближения слева на данном этапе обязательно принадлежат точному корню x_0 .

Теоретически возможны четыре случая (рис. 8):

1. $f'(x) > 0$; $f''(x) > 0$.
2. $f'(x) > 0$; $f''(x) < 0$.
3. $f'(x) < 0$; $f''(x) > 0$.
4. $f'(x) < 0$; $f''(x) < 0$.

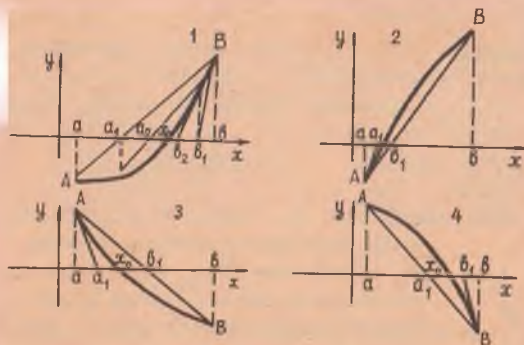


Рис. 8.

Рассматривая эти случаи расположения графика функции $f(x)$ на $[a, b]$, можно сделать вывод: касательную нужно проводить в том конце дуги, где знаки функции $f(x)$ и ее второй производной совпадают, т.к. может оказаться, что касательная в другом конце дуги не пересекает ось Ox вне $[a, b]$.

ИНСТРУКЦИЯ

Пусть требуется вычислить корень уравнения $f(x) = 0$ с точностью до 0,001. Если корней уравнения несколько, то обычно указывается, какой именно следует вычислить. Например, вычислить наименьший положительный корень уравнений.

1. Представить уравнение $f(x) = 0$ в виде $\varphi(x) = \psi(x)$ и, вычертив графики функций $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$, отделить корни.
2. Методом проб сузить отрезок, на котором отделен корень, до длины примерно 0,05.
3. К полученному отрезку применить комбинированный метод, проверив предварительно, сохраняют ли знаки на этом отрезке $f'(x)$ и $f''(x)$. Если хотя бы одно из этих условий не выполняется, надо продолжить сужение отрезка методом проб до тех пор, пока эти условия не будут выполнены.

Определить, какой из четырех случаев имеет место. В I и 4-м случаях приближения слева находится по формулам:

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{f(\delta) - f(a)} \cdot (\delta - a), \dots, \quad a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n) \cdot (\delta_n - a_n)}{f(\delta_n) - f(a_n)}$$

справа—по формулам:

$$\delta_1 = \delta - \frac{f(\delta)}{f'(\delta)}, \dots, \quad \delta_{n+1} = \delta_n - \frac{f(\delta_n)}{f'(\delta_n)}$$

Во 2 и 3-м случаях приближения корня слева находится по формулам:

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}, \dots, \quad a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}$$

Приближения справа — по формулам:

$$\delta_1 = \delta - \frac{f(\delta)}{f(a) - f(\delta)} \cdot (a - \delta); \quad \delta_{n+1} = \delta_n - \frac{f(\delta_n)}{f(a_n) - f(\delta_n)} \cdot (a_n - \delta_n).$$

Вычисления проводить до получения заданной степени точности,

$\delta = 0,001$, т.е. процесс сближения прекратить в тот момент, когда $\delta_n - a_n < \delta$. Теперь любую точку отрезка $[a_n, \delta_n]$ можно принять за приближенное значения корня.

4. Округление на каждом этапе производить в сторону от корня, в противном случае каждый раз надо проверять, сохраняется ли условие $f(\alpha_n) \cdot f(\beta_n) < 0$.

5. При выполнении лабораторной работы следует пользоваться математическими таблицами для отыскания значений функций.

Пример. Вычислить наименьший положительный корень уравнения $x^2 - \sin \pi x = 0$ с точностью до 0,001.

1. Перепишем данное уравнение в следующем виде: $x^2 = \sin \pi x$. Затем построим графики функций $y = x^2$ и $y = \sin \pi x$ (рис. 9). Из чертежа видно, что в интервале $(0,5; 1)$ содержится только один корень уравнения x_0 .

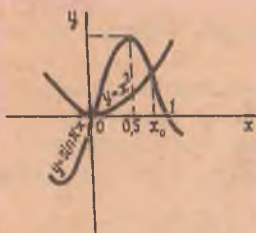


Рис. 9.

2. Сузим интервал изоляции методом проб. Функция

$f(x) = x^2 - \sin \pi x$ непрерывна всюду, значит и на $[0,5; 1]$ $f(0,5) = -0,71 < 0$
 $f(1) = 1 > 0$, т.е. $f(0,5) \cdot f(1) < 0$.

Найдем $f(0,8) = 0,0522 > 0$.

Значит, корень x_0 принадлежит интервалу $(0,5; 0,8)$. Найдем

$$f(0,7) = -0,319.$$

Значит, $0,7 < x_0 < 0,8$. Найдем $f(0,75) = -0,1446 < 0$, значит корень x_0 принадлежит интервалу $(0,75; 0,8)$. Любое число из отрезка $[0,75; 0,8]$ можно считать приближенным значением корня x_0 , причем погрешность будет меньше 0,05, т.е. длины отрезка.

3. Для дальнейшего сужения интервала изоляции корня применим метод хорд и касательных.

Имеем

$$0,75 < x_0 < 0,8 \quad f'(x) = 2x - \pi \cos \pi x > 0 \quad \text{на } [0,75; 0,8];$$

$$f''(x) = 2 + \pi^2 \sin \pi x > 0 \quad \text{на } [0,75; 0,8].$$

У нас имеет место I-й случай. График функции $f(x) = x^2 - \sin \pi x$ на отрезке $0,75; 0,8$ схематически показан на рис. 10.

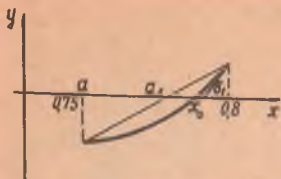


Рис. 10.

Касательную к графику проводим в точке с абсциссой 0,8, так как в этом случае

$$f(0,8) \cdot f'(0,8) > 0,$$

$$a_{n+1} = a - \frac{f(a_n)(b_n - a_n)}{f(b_n) - f(a_n)};$$

$$b_{n+1} = b_n - \frac{f(b_n)}{f'(b_n)},$$

$$a = 0,75; \quad f(0,75) = -0,1446 \quad | \quad b = 0,8; \quad f(0,8) = 0,0522$$

$$a_1 = 0,75 - \frac{-0,1446(0,8 - 0,75)}{0,0522 - (-0,1446)} = 0,7867 \quad | \quad b_1 = 0,8 - \frac{0,0522}{4,1416} = 0,7874$$

Итак, $0,7867 < x_0 < 0,7874$. Длина этого отрезка равна $0,0007 < 0,001$, т.е. нужна степень точности достигнута.

Ответ. Можно принять $x_0 \approx 0,787$ (0,001).

ЛИТЕРАТУРА

1. Н.С.Пискунов. Дифференциальное и интегральное исчисление. Изд. "Наука", главная редакция физико-математической литературы, М, 1965.

2. Л.З.Румшиский. Вычислительный лабораторный практикум. Физматгиз, М, 1963.

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Вычислить определенный интеграл по формуле Ньютона-Лейбница не всегда удается, т.к. не всегда можно найти первообразную. Кроме того, часто подынтегральную функцию задают графически или таблицей. Поэтому важное значение приобретают приближенные методы вычисления определенных интегралов.

Определенный интеграл от непрерывной функции $f(x)$ в пределах от a до b геометрически представляет собой площадь криволинейной трапеции S , ограниченной кривой, имеющей уравнение $y=f(x)$ осью абсцисс Ox и прямыми $x=a$ и $x=b$

$$S = \int_a^b f(x) dx \quad (1)$$

При приближенном вычислении площади криволинейной трапеции ее разбивают на части прямыми, параллельными оси ординат, и площадь каждой части заменяют площадью какой-нибудь простой фигуры: вместо данной кривой, ограничивающей каждую из элементарных площадей, как правило, берут отрезок прямой или дугу квадратичной параболы.

§ I. Формула трапеций

Для вычисления интеграла (1) промежуток интегрирования $[a, b]$ (рис. II) разбивается на n равных частей, длина каждой будет

$$h = \frac{b-a}{n}.$$

Обозначим значения функции $y=f(x)$ в точках деления соответственно через $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n$



Рис. 11.

Искомая площадь заменяется суммой площадей трапеций

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=1}^n \frac{h}{2} (y_{k-1} + y_k), \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2n} (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + \dots + 2y_{n-1} + y_n). \quad (2)$$

§ 2. Формула парабол (Формула Симпсона)

Промежуток интегрирования разбивают на четное число равных частей $2n$ (рис.12). Абсциссы точек деления обозначим:

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{2n-2} < x_{2n-1} < x_{2n} = b$.
Через точки деления проводим прямые параллельные оси Oy . Пусть ординаты равны соответственно:

$$y_0, y_1, y_2, \dots, y_{2n-2}, y_{2n-1}, y_{2n}.$$

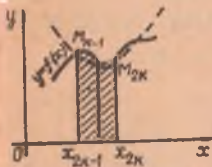


Рис. 12.

Проводя через каждые три соседние точки кривой дугу квадратичной параболы, ось которой параллельна оси Oy , получим n двойных элементарных полос (параболических трапеций). Площадь элементарной полосы S :

$$S_k = \frac{x_{2k} - x_{2k-2}}{6} \cdot (y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k}).$$

Суммируя площади S_k , получим формулу:

$$\int_a^b f(x) dx \approx J_{2n} = \sum_{k=1}^n \frac{h}{3} (y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k}), \quad \text{где } h = \frac{b-a}{2n}.$$

В развернутом виде она имеет вид:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{3 \cdot 2n} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \dots + 4y_{2n-1} + y_{2n}). \quad (3)$$

Погрешность формулы парабол оценивают следующим образом: количество верных знаков значения J_{2n} на единицу больше количества совпадающих знаков $y_{J_{2n}}$ и J_n , где J_n - значение интеграла, вычисленное по формуле парабол при делении отрезка $[a, b]$ на n равных частей (n - четное); на n частей (n - нечетное); J_{2n} - значение интеграла, вычисленное по формуле парабол при делении отрезка $[a, b]$ на $2n$ частей.

§ 3. Контроль вычислений и оценка погрешностей

I. Погрешность формулы трапеций (I) $\Delta_1 = \frac{M_2 h^2}{12} (\beta - \alpha)$;
 где M_2 - наибольшее значение $|f''(x)|$ на $[\alpha, \beta]$

Так как оценка погрешности по этой формуле затруднительна, (она требует оценки второй производной), то обычно пользуются следующей формулой оценки погрешности при условии, что вторая производная изменяется монотонно

$$\Delta_1 \leq \max |\Delta^2 y_k| \frac{\beta - \alpha}{12} ,$$

где $\max |\Delta^2 y_k|$ - наибольшая величина модуля разности 2-го порядка. Очевидно формулу трапеций можно применять, когда разности 2-го порядка достаточно малы и мало отличаются друг от друга.

2. Оценка погрешности формулы Симпсона

$$\Delta_2 = \frac{M_4 h^4}{180} (\beta - \alpha) ,$$

где M_4 - наибольшее значение $|f^{(4)}(x)|$. Но эта формула практически мало применима, поэтому погрешность оценивается следующим образом:

$$\Delta_2 \leq \frac{\delta - \alpha}{180} \max |\Delta^4 y| .$$

При малых разностях четвертого порядка формула Симпсона дает достаточную точность. На практике для определения точности поступают следующим образом:

С помощью метода Симпсона вычисляют J_n где n - четное число делений.

Затем - J_{2n} , т.е. удваивают число делений. При этом погрешность формулы Симпсона уменьшается в 16 раз. Это следует из формулы (3). Если погрешность J_{2n} обозначить через δ , то погрешность

$$J_n = 16 \delta . \quad |J_{2n} - J_n| > 15 \delta : \quad \delta \leq \frac{|J_{2n} - J_n|}{15} ,$$

т.е. можно считать, что у J_{2n} точных знаков на один больше числа совпадающих знаков у J_n и J_{2n} . (Этим методом будем пользоваться в данной работе).

3. Для контроля таблицы нужно составить таблицу разностей I, 2-го, 4-го порядка.

Если разности высоких порядков практически постоянны, значит вычисление ординат производится правильно. В противном случае это указывает на ошибку в соответствующей строке, которая должна быть пересчитана.

ИНСТРУКЦИЯ

Лабораторная работа состоит в приближенном вычислении определенного интеграла с заданным числом делений n и с указанием полученной точности. Работа оформляется в виде расчетных таблиц. Одна таблица составляется для приближенного вычисления интеграла по формуле парабол с делением промежутка на $2n$ равных частей.

n	x			$y = f(x)$	K	K'	y_K	$y_{K'}$
							S_{2n}	S_n

$$S_{2n} = \sum y_K$$

где K - коэффициенты формулы парабол при делении на $2n$ частей ($K = 1, 4, 2, 4, 2, \dots, 4, 1$);

K' - коэффициенты формулы парабол при делении на n равных частей ($K' = 1, 0, 4, 0, 2, 0, 4, 0, 2, \dots, 4, 0, 1$). Промежуток интегрирования на $2n$ частей (n - задано). Если при таком разбиении точки деления выражаются неудобными для расчета числами, то промежуток $[a; \delta]$ следует заменить достаточно близким к нему отрезком $[c; d]$ таким, чтобы при делении его на указанное число частей точки деления выражались бы числами, удобными для расчета.

Решение задачи сводится к вычислению трех (а если один из концов отрезка не выражается удобным для расчета числом, то двух) интегралов

$$\int_a^{\delta} f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^d f(x) dx + \int_d^{\delta} f(x) dx .$$

Вычисление интеграла $\int_c^d f(x) dx$ производится по формуле парабол с помощью таблицы 4.

Интегралы $\int_a^c f(x) dx$ и $\int_a^b f(x) dx$ вычисляются по формуле трапеций с помощью расчетной таблицы 5. Промежуток интегрирования делят на две части, ввиду его малости

n	x	y=f(x)	κ	y _κ
0	d	y =	I	
1	$\frac{d+\beta}{2}$	y ₁ =	2	
2	β	y ₂ =	I	

Σy_{κ}

Пример. Вычислить по формуле парабол и трапеций определенный интеграл

$$\int_{0,2}^{1,815} \sqrt{1+x^2+x^4} dx,$$

если $n = 8$. Указать полученную точность.

I. Для вычисления определенного интеграла округляем пределы интегрирования, разбивая отрезок интегрирования на части:

$$\int_{0,2}^{1,815} \sqrt{1+x^2+x^4} dx = \int_{0,2}^{1,8} \sqrt{1+x^2+x^4} dx + \int_{1,8}^{1,815} \sqrt{1+x^2+x^4} dx \quad (4)$$

2. Разбиваем отрезок $[0,2; 1,8]$ на $2n = 16$ равных частей.

3. Оформляем таблицу 4

$$S_{2n} = \Sigma y_{\kappa} = 94,5643,$$

$$S_n = \Sigma y_{\kappa}' = 47,2825,$$

$$J_{2n} = \frac{\Sigma y_{\kappa}}{3 \cdot 2n} (c-a) = 3,1521,$$

$$J_n = \frac{\Sigma y_{\kappa}'}{3n} (c-d) = 3,1522,$$

т.е.

$$\int_{0,2}^{1,8} \sqrt{1+x^2+x^4} dx \approx 3,1521$$

Погрешность при вычислении этого интеграла складывается из погрешностей, порожденных неточностями при вычислении значений функций y_{κ} и погрешности формулы Симпсона. В первом случае погрешность вычисляется следующим образом:

пусть абсолютные погрешности значений y_{κ} не превосходят ε , тогда вызванная ими погрешность величины будет:

Таблица 4.

d=02

$y = \sqrt{1+x^2+x^4}$

№ точек	x	x^2	x^4	$1+x^2+x^4$	$y = \sqrt{1+x^2+x^4}$	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4	K	K'	уК	уК'
0	0,2	0,04	0,0016	1,0416	1,0206	273	136			1	1	1,0206	1,0206
1	0,3	0,09	0,0081	1,0981	1,0479	409	159	23	-1	4	0	4,1916	4,3552
2	0,4	0,16	0,0256	1,1856	1,0888	568	181	22	-4	4	4	2,1776	4,5824
3	0,5	0,25	0,0625	1,3125	1,1456	749	199	18	-2	2	2	2,4410	2,4410
4	0,6	0,36	0,1296	1,4896	1,2205	948	215	16	-7	4	0	5,2612	5,7264
5	0,7	0,49	0,2401	1,7301	1,3153	1163	224	9	-2	2	4	2,8632	5,7264
6	0,8	0,64	0,4096	2,0496	1,4316	1327	231	7	-9	4	4	6,2812	1,4316
7	0,9	0,81	0,6561	2,4661	1,5703	1618	229	-2	3	2	2	3,4642	1,5703
8	1,0	1,00	1,0000	3,0000	1,7321	1847	230	1	-3	4	0	7,6672	1,7321
9	1,1	1,21	1,4641	3,6741	1,9168	2077	228	-2	-1	2	4	4,2490	1,9168
10	1,2	1,44	2,0736	4,5136	2,1245	2305	225	-3	-1	4	0	9,4200	2,1245
11	1,3	1,69	2,8561	5,5461	2,3550	2530	221	-4	3	2	2	5,2160	2,3550
12	1,4	1,96	3,8416	6,5016	2,6080	2761	220	-1	-2	4	0	11,5324	2,6080
13	1,5	2,25	5,0625	8,3125	2,8831	2971	217	-3	III	4	4	6,3604	2,8831
14	1,6	2,56	6,5536	10,1136	3,1802	3188	225	8		2	2	13,9960	3,1802
15	1,7	2,89	8,3521	12,2421	3,4990	3413				4	0	3,8403	3,4990
16	1,8	3,24	13,0321	14,7376	3,8403					1	1	3,8403	3,8403

$S_{2n} = 94,5643$

$S_n = 47,2825$

$$\frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \dots + 4y_{2n-1} + y_{2n}) \leq$$

$$\leq \frac{h}{3} (\varepsilon + 4\varepsilon + 2\varepsilon + 4\varepsilon + \dots + 4\varepsilon + \varepsilon) = \frac{h}{3} \cdot 6n \cdot \varepsilon = (b-a) \varepsilon$$

В нашем случае y_k вычислялись с точностью до 0,0001, т.е. $\varepsilon \leq 0,0001$. Погрешность формулы Симпсона при вычислении J_{2n} не превышает 0,0001 (4 верных знака после запятой, см. выше).

$$\Delta J_{2n}^* \leq 0,0001 \cdot 1,6 + 0,0001 = 0,00026.$$

Таблица 5

№ точ	x	x ²	x ⁴	1+x ² +x ⁴	f(x)= =√(1+x ² +x ⁴)	Δ	Δ ²	κ	y _κ
0	1,8	3,24	10,4976	14,7376	3,8389			I	3,8389
1	1,8075	3,2652	10,6602	14,9254	3,8633	244		2	1,7266
2	1,815	3,2942	10,8504	15,1446	3,8916	283	39 3	I	3,8916

Для этой таблицы шаг $h = \frac{1,815 - 1,8}{2} = \frac{0,015}{2} = 0,0075$

Сумма $\sum y_{\kappa} = 15,4571$ $\int_{1,8}^{1,815} \sqrt{1+x^2+x^4} dx \approx \frac{0,0075}{2} \cdot 15,4571 = 0,0575$

Так как шаг этой таблицы очень мал, то погрешность при вычислении этого интеграла практически равна 0 (см. формулу (2) для Δ_1). Подставляя в равенство вместо каждого из вычисленных интегралов его значения, получим:

$$\int_{1,8}^{1,815} \sqrt{1+x^2+x^4} dx = 3,1521 + 0,0575 = 3,2096$$

Причем точность полученного интеграла $\Delta \leq 0,00026 < 0,0003$.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5

РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДАМИ
ЭЙЛЕРА И РУНГЕ - КУТТА

К дифференциальным уравнениям приводит множество вопросов естествознания и техники. Некоторые уравнения можно решить через элементарные функции и их интегралы, т.е. в квадратурах. Но для подавляющего большинства уравнений этого сделать нельзя, хотя точное решение и существует. Для таких уравнений разработаны приближенные методы решения. Рассмотрим некоторые из них для решения дифференциального уравнения I-го порядка

$$y' = f(x, y) \quad , \quad (1)$$

$$y(x_0) = y_0 \quad , \quad (2)$$

где $f(x, y)$ — заданная функция, x_0, y_0 — начальные данные.

§ I. Численные методы решения дифференциальных уравнений.

Приближенные методы решения задачи (1), (2) можно разделить на две большие группы: аналитические и численные. Идея численных методов состоит в получении таблицы значений искомого решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения для заданной последовательности значений независимой переменной x из данного интервала $x_0 \leq x \leq x_0 + \alpha$. Последовательность значений x_i либо назначается заранее, либо выбирается в процессе отыскания решения.

x	y
x_0	y_0
x_1	y_1
...	...
...	...
x	y

Расстояние между соседними значениями x_i (узлами) называется шагом и обозначается $h = x_{i+1} - x_i$. Все численные методы сводятся к получению рекуррентных формул вида:

$$y_{i+1} = F(y_0, y_1, \dots, y_i, x_0, x_1, \dots, x_{i+1}) \quad ,$$

позволяющих найти следующее значение функции $y_{i+1} = y(x_i + h)$, если известны все предыдущие значения в узлах x_i . Из большого количества различных численных методов здесь будут рассмотрены методы Эйлера и Рунге - Кутты.

§ 2. Схема решения задачи (I), (2) методами Эйлера и Рунге - Кутта

I. Метод Эйлера состоит в том, что в коротком промежутке $x_i \leq x \leq x_i + h$ функцию $f(x, y)$ приближенно заменяют постоянной величиной $f(x_i, y_i)$, которая известна. Разлагая функцию $y = y(x_i + h)$ по степеням h в ряд Тейлора, ограничиваясь двумя членами, используя уравнение (I), получим

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) \quad (3)$$

$$(i = 0, 1, \dots, N-1).$$

это равенство позволяет последовательно определить величины y_1, y_2, \dots, y_n , если заданы x_0, y_0 и выбран шаг интегрирования h . Метод Эйлера не обеспечивает высокой точности, т.к. погрешность при замене дифференциального уравнения (I) рекуррентным уравнением (3) есть величина порядка h^2 на каждой промежутке. Рассмотрим начало вычислений по методу Эйлера для уравнения $y' = y, y(0) = 1$. Пусть шаг $h = 0,1$;

$$\Delta y_0 = hf(x_0, y_0) = 0,1 \cdot 1 = 0,1$$

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1 + 0,1 = 1,1.$$

Аналогично производятся дальнейшие вычисления. Схема вычислений по методу Эйлера дана в следующей таблице

x_i	y_i	$f(x_i, y_i)$	Δy

2. Метод Рунге - Кутты. Рассмотрим 4 величины.

$$k_1^{(i)} = hf(x_i, y_i); \quad k_2^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}\right);$$

$$\begin{aligned} \kappa_3^{(i)} &= hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{\kappa_2^{(i)}}{2}\right) ; \\ \kappa_4^{(i)} &= hf(x_i + h, y_i + \kappa_3^{(i)}) . \end{aligned} \quad (4)$$

Согласно обычному методу Рунге - Кутта последовательные значения

y_i искомой функции определяется по формуле

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i \quad (i = 0, 1, \dots, N) . \quad (5)$$

Приращение функции на каждом шаге представляется следующим образом

$$\Delta y_i = \frac{1}{6} \left[\kappa_1^{(i)} + 2\kappa_2^{(i)} + 2\kappa_3^{(i)} + \kappa_4^{(i)} \right] \quad (6)$$

Доказано, что погрешность при замене дифференциального уравнения (I) рекуррентными формулами (5), (6) на каждом шаге есть величина порядка h^5 [1]

Рассмотрим начало вычислений по методу Рунге - Кутта для уравнения

$$y' = y, \quad y(0) = 1 .$$

$$\kappa_1^{(0)} = hf(x_0, y_0) = 0,1 \cdot 1 = 0,1 ;$$

$$\kappa_2^{(0)} = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{\kappa_1^{(0)}}{2}\right) = 0,1(1 + 0,05) = 0,105 ;$$

$$\kappa_3^{(0)} = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{\kappa_2^{(0)}}{2}\right) = 0,1(1 + 0,0525) = 0,10525 ;$$

$$\kappa_4^{(0)} = hf(x_0 + h, y_0 + \kappa_3^{(0)}) = 0,1(1 + 0,10525) = 0,110525$$

отсюда имеем $\Delta y_0 = \frac{1}{6} (\kappa_1^{(0)} + 2\kappa_2^{(0)} + 2\kappa_3^{(0)} + \kappa_4^{(0)}) = 0,105174 ;$

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1 + 0,105174 = 1,105174 .$$

Приведем один из возможных вариантов заполнения таблицы интегрирования обыкновенного дифференциального уравнения по методу Рунге - Кутта

x_i	y_i	$f(x_i, y_i)$	κ_i
x_1	y_1	$f(x_1, y_1)$	$hf_1 = \kappa_1$
$x_i + \frac{h}{2}$	$y_i + \frac{1}{2}\kappa_1$	$f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{\kappa_1}{2}\right)$	$hf_2 = \kappa_2$
$x_i + \frac{h}{2}$	$y_i + \frac{1}{2}\kappa_2$	$f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{\kappa_2}{2}\right)$	$hf_3 = \kappa_3$
$x_i + h$	$y_i + \kappa_3$	$f(x_i + h, y_i + \kappa_3)$	$hf_4 = \kappa_4$
x_{i+1}	$y_{i+1} = y_i + \Delta y$		Δy

Таблица 6

№ π/π	α	sin α	$y_t \sin \alpha$	$-y_t^2$	$y_t' = y_t \sin \alpha - y_t^2$	$\Delta y_t = y_t' - \Delta x$	$y_t = y_{t-1} + \Delta y$ ($h=0$)	y_t ($2h=0,2$)
I	0	0	0	- I	- I	0,2	I	I
2	0,1	0,0998	0,0898	- 0,81	- 0,72	- 0,072	0,9	0,8
3	0,2	0,199	0,165	- 0,686	- 0,521	- 0,052	0,828	
4	0,3	0,296	0,230	- 0,602	- 0,372	- 0,037	0,776	
5	0,4	0,389	0,287	- 0,546	- 0,259	- 0,026	0,739	0,704
6	0,5	0,479	0,342	- 0,508	- 0,166	- 0,017	0,713	
7	0,6	0,565	0,393	- 0,484	- 0,091	- 0,009	0,696	0,660
8	0,7	0,644	0,442	- 0,472	- 0,070	- 0,007	0,687	
9	0,8	0,717	0,488	- 0,462	0,026	0,003	0,680	0,648
10	0,9	0,783	0,535	- 0,466	0,069	0,007	0,683	
II	I,0	0,841					0,690	0,657

$h=0.2$

x_i	y_i	K_1	K_2	K_3	K_4	Δy_i	$y_i + \Delta y_i$
0	1	-0,2	-0,144	-0,154	-0,109	-0,15	0,85
0,2	0,85	-0,111	-0,079	-0,093	-0,0558	-0,084	0,766
0,4	0,765	-0,057	-0,038	-0,020	-0,0268	-0,034	0,732
0,6	0,732	-0,0306	-0,0082	-0,0122	-0,0004	-0,012	0,720
0,8	0,720	-0,0004	0,0092	0,0042	0,0170	0,0072	0,727

 $h=0.1$

x_i	y_i	K_1	K_2	K_3	K_4	Δy_i	$y_i + \Delta y_i$
0	1	-0,1	-0,085	-0,087	-0,074	-0,086	0,914
0,1	0,914	-0,0744	-0,067	-0,064	-0,055	-0,065	0,849
0,2	0,849	-0,0551	-0,0471	-0,0478	-0,0403	-0,048	0,801
0,3	0,801	-0,040	-0,0342	-0,035	-0,0189	-0,033	0,768
0,4	0,768	-0,029	-0,024	-0,024	-0,0168	-0,023	0,743
0,5	0,743	-0,0196	-0,0154	-0,0156	-0,012	-0,015	0,730
0,6	0,728	-0,0149	-0,0084	-0,0086	-0,0054	-0,0090	0,719
0,7	0,719	-0,0054	-0,0025	-0,0026	0	-0,0026	0,717
0,8	0,717	0	0,0024	0,0023	0,0046	0,0023	0,719
0,9	0,719	0,0046	0,0066	0,0065	0,0084	0,066	0,726
1,0	0,726						

Контроль, выполненный по методу Рунге - Кутта производится следующим образом: решается дифференциальное уравнение с шагом h и $2h$ и сравниваются результаты. Если расхождение между ними не превышает заданной погрешности, то полученное значение y_{i+1} принимается в качестве приближенного значения искомого решения при $x = x_i + h$ и дальнейшие вычисления производятся по той же схеме. Если же это расхождение превышает заданную погрешность, то следует уменьшать шаг на данном этапе вычислений.

Выпишем результаты расчетов приведенного примера для $x = 0,5$: по методу Рунге - Кутта — $(0,5) = 1,64873$, по методу Эйлера $(0,5) = 1,61$, точное значение $y = \sqrt{e} = 1,64872$.

Пример. Составить таблицу решения дифференциального уравнения

$$y' = y \cdot \sin x - y^2$$

при начальном условии $y(0) = 1$ на отрезке $[0,1]$ с точностью до $0,1$. Учитывая, что погрешность формулы (3) можно считать величиной порядка h^2 , выбираем $h = 0,1$.

Будем вести расчет с одним запасным знаком по следующей схеме (табл. 6). Для составления таблицы решения того же дифференциального уравнения в соответствии с формулой (5) с шагом $h = 0,2$ и $h = 0,1$ применим метод Рунге - Кутта.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б.П.Демидович, И.А.Марон, Э.З.Шувалова. Численные методы анализа. Изд. "Наука", главная редакция физико-математической литературы, Москва, 1967.
2. Г.Н.Положий и др. Математический практикум. Физматгиз, 1960.

О Г Л А В Л Е Н И Е

Лабораторная работа № 1.	3
Решение системы линейных уравнений методом последовательного исключения неизвестных.	3
Лабораторная работа № 2.	10
§ 1. Табулирование функций.	10
§ 2. Линейная интерполяция.	12
Лабораторная работа № 3.	15
Приближенное решение уравнений методом хорд и касательных.	15
Лабораторная работа № 4.	22
Приближенное вычисление определенных интегралов.	22
§ 1. Формула трапеций.	22
§ 2. Формула парабол.	23
§ 3. Контроль вычислений и оценка погрешностей.	24
Лабораторная работа № 5.	29
Решение дифференциальных уравнений методами Эйлера и Рунге - Кутта.	29
§ 1. Численные методы решения дифференциальных уравнений.	29
§ 2. Схема решения задач (1), (2) методами Эйлера и Рунге - Кутта.	30

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Лабораторный практикум
по
высшей математике

Редактор А.И.Кондратьева
Корректор Н.П.Гордеева

Подписано в печать 2.УП.71 г. ЮО 00312. Объем 2,25 п.л.

Тираж 3000 экз. Цена 20 коп.

Куйбышевский авиационный институт им. С.П.Королева
г. Куйбышев, Молодогвардейская, 151.

Ротапечатьный цех типографии им. Мяги, г. Куйбышев,
ул. Венцека 60. Заказ № 4517