МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

КУЙБЫШЕВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ имени академика С. П. КОРОЛЕВА

МАТЕМАТИКА

Предел последовательности.
Предел функции.
Производная и ее приложение

Утверждено
редакционно-издательским
советом института
в качестве
методических указаний
для слушателей
подготовительного отделения

КУЙБЫШЕВ 1986

УДК 517.1(075)

Методические указания составлены в соответствии с программой по математике для подготовительных отделений вузов. В указаниях рассматриваются элементы высшей математики: предел последовательности, предел функции, производная, ее приложение. В каждом разделе даны определения основных понятий математического анализа, пояснения к ним, приводятся примеры решения типовых задач, дано достаточное количество упражнений для самостоятельной работы.

Настоящие методические указания предназначены для слушателей подготовительного отделения.

Составители: Е.П. Ульянова, М.В. Кузьменко

Рецензенты: М.В. Коржавина, Н.Я. Николаев

I. ПРЕДЕЛ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

Определение I. Число a называется пределом числовой последовательности $\{x_n\}$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N = N(\varepsilon)$, что при всех $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

В этом случае пишут: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Пример I. Показать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n-5}{n+1} = 3.$$

Число 3 будет пределом данной числовой последовательности, если для заданного $\varepsilon > 0$ можно определить такое натуральное N, что при $n > N$ будет выполняться неравенство

$$\left|\frac{3n-5}{n+1} - 3\right| < \varepsilon \Longleftrightarrow \frac{8}{n+1} < \varepsilon \Longleftrightarrow \frac{n+1}{8} > \frac{1}{\varepsilon} \Longleftrightarrow n+$$

$$+1 > \frac{8}{\varepsilon} \Longleftrightarrow n > \frac{8}{\varepsilon} - 1.$$

За N примем целую часть числа: $N = \left[\frac{8}{\varepsilon} - 1\right]$.

Итак, при всех $n > N$ выполняется требуемое неравенство. Следовательно, число 3 является пределом данной последовательности.

Определение 2. Число b называется пределом функции $f(x)$ при $x \to a$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется положительное число $\delta > 0$, что при всех $x \neq a$, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

В этом случае пишут: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$.

Пример 2. Доказать, что

$$\lim_{x\to 3} (2x-1) = 5.$$

Пусть задано произвольное число $\varepsilon > 0$. Составим неравенство

$$|(2x-1)-5| < \varepsilon \Longleftrightarrow 2|x-3| < \varepsilon \Longleftrightarrow |x-3| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Итак, нашлось $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ такое, что из неравенства $|x-3| < \delta$ следует выполнение неравенства $|2x-1-5| < \varepsilon$. Это и означает, что число 5 есть предел функции $f(x) = 2x-1$ при $x \to 3$.

Имеют место следующие теоремы:

Если существуют $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b_1$ и $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = b_2$, то

I) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+\varphi(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = b_1 + b_2$;

2) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\varphi(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = b_1 b_2$;

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)} = \dfrac{b_1}{b_2}$, если $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) \neq 0$.

Следствие:

$$\lim_{x\to a}[c f(x)] = c\lim_{x\to a} f(x),\ \text{где } c = const.$$

Введем понятие элементарной функции.

Элементарной называется всякая функция, которая может быть получена из конечного числа основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических операций и операций композиции.

Основными элементарными функциями являются следующие: степенная $y = x^\alpha$, где $\alpha \in R$; показательная $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq$ I; логарифмическая $y = \log_a x$, $a >$ 0, $a \neq$ I; тригонометрические: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tg\, x$, $y = ctg\, x$; обратные тригонометрические $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = arctg\, x$, $y = arcctg\, x$.

Справедливо следующее правило:

Предел элементарной функции $f(x)$ при $x \to a$ равен значению функции в предельной точке a, если функция $f(x)$ определена в этой точке:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Пример 3. Найти

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x^2 - 5x + 2}{x^2 - x + 1}.$$

В точке $x = 2$ функция $f(x) = \dfrac{3x^2-5x+2}{x^2-x+1}$ определена, поэтому $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-5x+2}{x^2-x+1} = f(2) = \dfrac{3\cdot 2^2 - 5\cdot 2 + 2}{2^2 - 2 + 1} = \dfrac{4}{3}$.

Пример 4. Вычислить $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+3x+2}{2x^2+x-6}$.

Функция не определена в точке $x = -2$, так как знаменатель обращается в нуль при $x = -2$. Числитель при этом значении x тоже обращается в нуль. В этом случае говорят, что имеется неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$.

Разложим числитель и знаменатель на множители:

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+3x+2}{2x^2+x-6}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x+1)}{2(x-\frac{3}{2})(x+2)}=$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{x+1}{2x-3}=\frac{-2+1}{-4-3}=\frac{1}{7}.$$

Пример 5. Найти

$$\lim_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}.$$

Функция не определена в точке $x = 7$. Имеем неопределенность $\dfrac{0}{0}$.

При нахождении предела от иррационального выражения часто приходится освобождаться от иррациональности в числителе или знаменателе:

$$\lim_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}=\lim_{x\to 7}\frac{(2-\sqrt{x-3})(2+\sqrt{x-3})}{(x^2-49)(2+\sqrt{x-3})}=$$

$$=\lim_{x\to 7}\frac{4-x+3}{(x-7)(x+7)(2+\sqrt{x-3})}=\lim_{x\to 7}\frac{-(x-7)}{(x-7)(x+7)(2+\sqrt{x-3})}=$$

$$=\lim_{x\to 7}\frac{-1}{(x+7)(2+\sqrt{x-3})}=\frac{-1}{14(2+\sqrt{7-3})}=-\frac{1}{56}.$$

Пример 6. Найти

$$\lim_{\substack{x\to 63\\ x\to 0}}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}.$$

$\lim\limits_{x\to 63}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$. Функция определена при $x = 63$, поэтому

$$\lim_{x\to 63}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}=f(63)=\frac{\sqrt{64}-1}{\sqrt[3]{64}-1}=\frac{7}{3}.$$

Заметим, что функция не определена при $x = 0$. Имеем неопределенность $0/0$. Выражения, содержащие иррациональности, приводятся к рациональному виду во многих случаях путем введения новой переменной.

Полагая $1+x = z^6$ и учитывая, что при $x \to 0$, $z \to 1$, получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}=\lim_{z\to 1}\frac{z^3-1}{z^2-1}=\lim_{z\to 1}\frac{(z-1)(z^2+z+1)}{(z-1)(z+1)}=$$

$$=\lim_{z\to 1}\frac{z^2+z+1}{z+1}=\frac{3}{2}.$$

Бесконечно большие и бесконечно малые функции.

Определение 3. Функция $y=f(x)$ называется бесконечно большой при $x\to a$ (или $x\to\infty$), если каково бы ни было число $M>0$, найдется такое число δ (или N), что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0<|x-a|<\delta$ (или условию $|x|>N$), выполняется неравенство

$$|f(x)|>M.$$

В этом случае пишут: $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\to\infty}} f(x)=\infty.$

Определение 4. Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x\to a$ (или $x\to\infty$), если $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\to\infty}}\alpha(x)=0.$

Связь между бесконечно малой и бесконечно большой функциями

Теорема. Если функция $f(x)$ бесконечно большая, то $\frac{1}{f(x)}$ - бесконечно малая функция;
если $\alpha(x)$ - бесконечно малая функция, то $\frac{1}{\alpha(x)}$ - бесконечно большая функция.

Свойства бесконечно малых функций

1. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций есть функция бесконечно малая.

2. Произведение бесконечно малой функции на функцию ограниченную или постоянную есть бесконечно малая функция.

3. Частное от деления функции бесконечно малой на функцию, предел которой отличен от нуля, есть функция бесконечно малая.

Пример 7. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3+5x-3}{2x^3-4x^2+1}.$

Имеем предел отношения двух бесконечно больших функций или, говорят, что имеем неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$.

Для раскрытия этой неопределенности делим числитель и знаменатель на старшую степень переменной величины:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+5x-3}{2x^3-4x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{5}{x^2}-\frac{3}{x^3}}{2-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^3}}=\frac{3}{2}.$$

Функции $\frac{5}{x^2}$; $\frac{4}{x}$; $\frac{3}{x^3}$; $\frac{1}{x^3}$ бесконечно малые, предел их равен нулю.

При вычислении пределов, содержащих тригонометрические функции, часто используется $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ – первый замечательный предел. (Предел отношения синуса к своему аргументу при стремлении аргумента к нулю равен единице).

<u>Пример 8</u>. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x\cdot 3}{3x}=3\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=3\cdot 1=3.$$

<u>Упражнения</u>

I. Написать первые пять членов следующих последовательностей:

А) $x_n=2n+3$;

б) $x_n=\frac{1}{2^n}$;

в) $x_n=\frac{3n-1}{2n+3}$;

г) $x_n=3^n$;

д) $x_n=2^n+\frac{1}{2^n}$;

е) $x_n=\frac{n^3}{n+1}$;

ж) $x_n=\frac{n}{4^n}$;

з) $x_n=\frac{(-1)^n}{n}$;

и) $x_n=\begin{cases}\frac{1}{n} & \text{при } n \text{ четном,}\\ \frac{n-1}{n} & \text{при } n \text{ нечетном.}\end{cases}$

2. Является ли членом последовательности $a_n=n^2+2n+1$ число а) 289; б) 36I; в) I000; г) 223?

3. Содержится ли среди членов последовательности $a_n=n^2-17n$ число а) -30; б) -72; в) -I00? Если содержится, то какой номер имеет этот член?

4. Напишите формулу общего члена последовательности, первые пять членов которой совпадают со следующими:

2-1174

а) $3\cdot 2;\quad 5\cdot 2^2;\quad 7\cdot 2^3;\quad 9\cdot 2^4;\quad 11\cdot 2^5;\ \ldots$

б) $\frac{1}{2};\quad \frac{2}{2^2};\quad \frac{3}{2^3};\quad \frac{4}{2^4};\quad \frac{5}{2^5};\ \ldots$

в) $\frac{1}{1\cdot 2};\quad \frac{1}{2\cdot 3};\quad \frac{1}{3\cdot 4};\quad \frac{1}{4\cdot 5};\quad \frac{1}{5\cdot 6};\ \ldots .$

г) $\left(\frac{1}{3}\right)^2;\ \left(\frac{2}{5}\right)^2;\ \left(\frac{3}{7}\right)^2;\ \left(\frac{4}{9}\right)^2;\ \left(\frac{5}{11}\right)^2;\ \ldots$

д) $1;\quad \frac{1}{2\sqrt{2}};\quad \frac{1}{3\sqrt{3}};\quad \frac{1}{4\sqrt{4}};\quad \frac{1}{5\sqrt{5}};\ \ldots$

е) $1;\quad \frac{1}{4};\quad \frac{1}{9};\quad \frac{1}{16};\quad \frac{1}{25};\ \ldots$

ж) $2;\ -2;\ 2;\ -2;\ 2;\ \ldots$

5. Дано $x_n = \frac{1}{n(n+1)}$. Найти $x_{50};\ x_{n-2};\ x_{n+1};\ x_{2n+1}$.

6. Дано $x_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$. Найти $x_{24};\ x_{2n};\ x_{2n+1}$.

7. Написать первые четыре члена последовательности $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Чему равны члены $x_{n+1};\ x_{n+2}$?

8. Изобразите геометрически (двумя способами) следующие последовательности, заданные общими членами:

а) $a_n = \frac{1}{[illegible]-1}$;

б) $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$;

в) $a_n = \frac{n+1}{2n}$;

г) $a_n = \frac{1}{n^2}$;

д) $a_n = \frac{1+(-1)^{n-1}}{2}$;

е) $a_n = \frac{1+(-1)^n}{n}$;

ж) $a_n = \frac{3n+1}{n}$;

з) $a_n = \frac{1-2n}{n}$.

9. Написать первые три члена последовательности $y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Чему равны члены $y_{n+1};\ y_{n+2}$?

10. Установите, какие из следующих последовательностей являются монотонными, а какие немонотонными:

а) $a_n = \frac{2n-3}{n}$;

г) $a_n = 3n^2 + 5n + 6$;

б) $a_n = \frac{n+4}{n}$;   д) $a_n = \frac{4-n^2}{n^2}$;

в) $a_n = n^2 - 7n + 6$;   е) $a_n = \frac{3n^2+2}{n^2}$.

II. Какие из данных последовательностей ограничены и какие не ограничены:

а) $a_n = \frac{1}{n}$;   г) $a_n = \frac{2n}{2n+3}$;

б) $a_n = \frac{n}{n-1}$;   д) $a_n = \frac{n-5}{n^2}$.

в) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$;

I2. Докажите, пользуясь определением, что

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$;   г) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2+1} = 0$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n-2}{n} = 5$;   д) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-3}{4n+5} = \frac{1}{2}$.

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n-2}{2n+1} = \frac{3}{2}$;

I3. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-n}{2+n} = -1$.
Каким должно быть n, чтобы число $\left|\frac{1-n}{2+n} + 1\right|$ было меньше 0,00I?

I4. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{2n^2+n} = \frac{1}{2}$.
Каким должно быть n, чтобы число $\left|\frac{n^2-1}{2n^2+n} - \frac{1}{2}\right|$ было меньше 0,0I?

I5. Докажите, пользуясь определением предела функции, что

а) $\lim\limits_{x\to 2} (3x+2) = 8$;   в) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}} (5-3x) = 4$.

б) $\lim\limits_{x\to 4} (5x-3) = 17$;

Вычислите следующие пределы:

Ответы:

I6. $\lim\limits_{x\to 4} \left[2(x+3) - \frac{x}{x+2}\right]$,   ($13\frac{1}{3}$)

I7. $\lim\limits_{x\to -1} (x^3 + 2x^2 - 3x - 4)$,   (0)

18. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+2x+1}{x^3-2x^2+3x-1}$, (6)

19. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^4+2}{3x^3-1}$, $\left(-\dfrac{18}{25}\right)$

20. $\lim\limits_{x\to 1}(4x^2-2x+1)$, (3)

21. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x-5}$, (10)

22. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$, $\left(\dfrac{1}{3}\right)$

23. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+5x-7}{3x^2-x-2}$, $\left(\dfrac{9}{5}\right)$

24. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{5x^2+4x-1}$, $\left(\dfrac{1}{3}\right)$

25. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$, (6)

26. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$, (∞)

27. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+2x-1}{2x^2+x-1}$, $\left(\dfrac{4}{3}\right)$

28. $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}}\dfrac{27x^3+1}{3x^2+4x+1}$, $\left(\dfrac{9}{2}\right)$

29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$, $\left(\dfrac{1}{2}\right)$

30. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-6x^2+9x}{x^2+x-12}$, (0)

31. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$, (0)

32. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}$, $(-\sqrt{5})$

33. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+21}-5}{2-x}$, $\left(-\dfrac{2}{5}\right)$

34. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$, $\left(\dfrac{1}{4}\right)$

35. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$, $\left(\frac{1}{2}\right)$

36. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$, $\left(-\frac{1}{12}\right)$

37. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x-3}{\sqrt{2x+10}-4}$, (4)

38. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+4}-2}$, (4)

39. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$, (3)

40. $\lim\limits_{x \to 64} \dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$, (3)

41. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$, $\left(\frac{4}{3}\right)$

42. $\lim\limits_{x \to 16} \dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$, $\left(\frac{1}{4}\right)$

43. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\sqrt{x}-3x}{3\sqrt{x}-2x}$, $\left(\frac{2}{3}\right)$

44. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sqrt[3]{x+1}-1}$, (3)

45. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+a}-\sqrt[3]{a}}{x}$, $\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}}\right)$

46. $\lim\limits_{x \to 81} \dfrac{\sqrt[4]{x}-3}{\sqrt{x}-9}$, $\left(\frac{1}{6}\right)$

47. $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x+3}{\sqrt{x+4}-1}$, (2)

48. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x+1}{\sqrt[3]{x}+1}$, (3)

49. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}}{3\sqrt[3]{x}-2\sqrt{x}}$, $\left(\frac{2}{3}\right)$

Вычислите пределы:

5O. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^2-6x+1}{3x^2+4}$, $\left(\dfrac{5}{3}\right)$

5I. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2-3x-1}{7x^2+5x+2}$, $\left(\dfrac{2}{7}\right)$

52. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+4}{2x^4-3x^2+1}$, (0)

53. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4-5x}{3x^3+3x-1}$, (∞)

54. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}}$, (2)

55. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{10+x\sqrt{x}}$, (∞)

56. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+1}$, (0)

57. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2+1}}{x-1}$, (2)

58. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x}}$, (2)

59. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2-5x+6}-x\right)$, $\left(-\dfrac{5}{2}\right)$

60. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right)$, (0)

6I. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2-2x-1}-\sqrt{x^2-7x+3}\right)$, $\left(\dfrac{5}{2}\right)$

62. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$, (-1)

63. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$, (3)

64. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$, (2)

65. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+1)(x+3)}{2x^2+5}$, $\left(\dfrac{1}{2}\right)$

66. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{3x}$, $\qquad (\frac{5}{3})$

67. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x}{\sin 7x}$, $\qquad (\frac{4}{7})$

68. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 6x}$, $\qquad (\frac{5}{6})$

69. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\, 2x}{x}$, $\qquad (\frac{2}{3})$

70. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{(x+1)^2-1}$, $\qquad (2)$

71. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{x}$, $\qquad (4)$

72. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sin\frac{x}{3}}$, $\qquad (9)$

73. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{\frac{\pi}{3}-x}$, $\qquad (-1)$

74. $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin(\frac{\pi}{4}+x)}{4x+\pi}$, $\qquad (\frac{1}{4})$

75. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 4x}{x^2}$, $\qquad (\frac{15}{2})$

76. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x+\sin 7x}{\frac{x}{4}}$, $\qquad (48)$

77. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x\cos x+\cos 2x\sin x}{2x}$, $\qquad (\frac{3}{2})$

78. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sin 5x\cos x-\cos 5x\sin x}$, $\qquad (\frac{3}{4})$

79. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x^2}$, $\qquad (6)$

80. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{3x^2}$, $\qquad (\frac{25}{6})$

81. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin 12x}{10x}$, $\qquad (-\frac{9}{10})$

82. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 10x-\cos x}{4x^2}$, $\qquad (-\frac{99}{8})$

83. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 11x-\sin 6x}{5x}$, (I)

84. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{7x^2}$, $(\frac{18}{7})$

85. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 6x-\cos 3x}{x^2}$, $(\frac{27}{2})$

86. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos 6x}{\sin 6x}$, $(\frac{1}{6})$

2. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

Определение. Производной функции $f(x)$ по независимой переменной x называется предел, к которому стремится отношение приращения функции Δy к приращению аргумента Δx, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x) \text{ или } y'(x), \text{ или } \frac{dy}{dx}.$$

При этом предполагается, что предел существует и конечен. Операция нахождения производной функции называется дифференцированием.

Рассмотрим несколько примеров нахождения производной функции, пользуясь определением.

Пример I. $y=2x^3+1$. Найти производную данной функции по определению.

Будем рассуждать так: дадим аргументу x приращение Δx, тогда функция y получит приращение Δy, которое находится по формуле $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$.

Составим отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ и найдем предел этого отношения при $\Delta x\to 0$. Полученное выражение и будет производной данной функции. В нашем примере имеем:

$$\Delta y=2(x+\Delta x)^3-1-(2x^3+1)=2x^3+6x^2\Delta x+6x\Delta x^2+2\Delta x^3+$$
$$+1-2x^3-1=\Delta x(6x^2+6x\cdot\Delta x+2\Delta x^2);$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x(6x^2+6x\cdot\Delta x+2\Delta x^2)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(6x^2+$$

$+6x\cdot\Delta x+2\Delta x^2)=6x^2.$

Итак, $y'=(2x^3+1)'=6x^2.$

Упражнения

Пользуясь определением, найти производные следующих функций:

1) $y=x^2+4;$

2) $y=\frac{1}{x}\ (x\neq 0);$

3) $y=\sqrt{x};$

4) $y=x^3;$

5) $y=\sin x.$

Чтобы дифференцировать различные алгебраические функции, сформулируем теоремы о производных:

$$(u+v)'=u'+v';$$

$$(uv)'=u'v+v'u;$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2},\quad v\neq 0;$$

$$(cu)'=cu',\ \text{где}\ c=const.$$

Приведем таблицу производных основных элементарных функций.

$(C)'=0$	$(e^x)'=e^x$
$x'=1$	$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$
$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$	$(\ln x)'=\frac{1}{x}$
$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$	$(\sin x)'=\cos x$
$(a^x)'=a^x\ln a$	$(\cos x)'=-\sin x$
$(tg\, x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$	$(arc\cos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(ctg\, x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$	$(arc\, tg\, x)'=\frac{1}{1+x^2}$
$(arc\sin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(arc\, ctg\, x)'=-\frac{1}{1+x^2}$

Рассмотрим примеры нахождения производных по формулам.

Пример 2. $y=\sqrt[3]{x}-\frac{1}{x^2}+\sqrt{2}$. Найти y'.

Имеем алгебраическую сумму функций, первое и второе слагаемые есть степенные функции, последнее слагаемое – постоянная величина, поэтому применяя указанные выше правила и формулы, находим y' :

$$y'=(\sqrt[3]{x})'-(\tfrac{1}{x^2})'+(\sqrt{2})'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}-(-2)x^{-2-1}+0=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+\frac{2}{x^3}.$$

Пример 3. $y=\frac{x^3+2}{x-1}$. Найти y'.

Данная функция представляет собой частное двух функций и по теореме о производной частного имеем:

$$y'=\frac{(x^3+2)'(x-1)-(x-1)'(x^3+2)}{(x-1)^2}=\frac{3x^2(x-1)-(x^3+2)}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{2x^3-3x^2-2}{(x-1)^2}.$$

Пример 4. $y=x\lg x$. Найти y'.

Данная функция есть произведение двух функций, поэтому имеем:

$$y'=x'\lg x+x(\lg x)'=\lg x+x\frac{1}{x\ln 10}=\lg x+\frac{1}{\ln 10}.$$

Пример 5. $y=\frac{\sqrt{x}+x^2}{5}$; $y'=?$

В данном примере не следует применять теорему о производной частного, так как знаменатель есть постоянное число. Постоянный множитель можно выносить за знак производной:

$$y'=\frac{1}{5}(\sqrt{x}+x^2)'=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+2x\right).$$

Пример 6. $y=2\sin x-3\operatorname{tg} x$. $y'=?$

Данная функция есть разность двух функций, постоянный множитель выносится за знак производной:

$$y'=2\cos x-3\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{2\cos^3 x-3}{\cos^2 x}.$$

Упражнения. Найти производные:

1) $y=ax^2+bx+c$;

2) $y=(v+1)^2(v-1)$;

3) $y=3x-2\sqrt{x}$, $y'(1)=?$

4) $y=\sqrt[5]{x}-\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$;

5) $y=\frac{2}{\sqrt{x}}+\sqrt{3}$;

6) $y=\frac{2}{x^3-1}$;

7) $y=\frac{1-x^2}{1+x^2}$;

8) $y=\frac{1}{x^2+x-1}$;

9) $S=\frac{3t^4-1}{\sqrt{3}}$.

10) $S=\frac{t^3}{(1+t)^2}$; $S'(0)=?$

11) $y=\frac{tg\,x}{x}$;

12) $y=x(\sin x+\cos x)$;

13) $y=\frac{x}{1-\cos x}$;

14) $y=x\arccos x$;

15) $y=\frac{\sqrt{x}}{arctg\,x}$;

16) $y=\frac{x}{1+x^2}-arctg\,x$;

17) $y=x^2\log_3 x$;

18) $y=\frac{1}{\ln x}$;

19) $y=\frac{1-\ln x}{1+\ln x}$;

20) $y=2^x$;

21) $y=\frac{x}{4^x}$;

22) $y=xe^x$;

23) $y=\frac{e^x}{\sin x}$;

24) $y=\frac{x^3+3^x}{e^x}$.

Дифференцирование сложной функции

Рассмотренные правила дифференцирования еще не дают возможности вычислить производные от многих элементарных функций, например: $y=2^{\sin x}$; $y=\ln^2 tg\,3x$ и т.п., поэтому введем понятие сложной функции и правило ее дифференцирования.

Если функция $y=f(u)$ определена на множестве $Д'$, а функция $u=\varphi(x)$ определена на множестве $Д$, при этом значения функции u не выходят за пределы множества $Д'$, то $y=f[\varphi(x)]$ определяет сложную функцию от x.

u называется промежуточным аргументом, а x - независимой переменной.

Справедлива следующая теорема о производной сложной функции.

Пусть $y=f(u)$, где $u=\varphi(x)$.

Если функция $u=\varphi(x)$ имеет производную в точке x, а функция $y=f(u)$ имеет производную в соответствующей точке u, то сложная функция $y=f[\varphi(x)]$ имеет производную в точке x и она равна

$$y'_x = f'_u u'_x .$$

Коротко эту теорему читают так.

Производная сложной функции по независимому аргументу равна производной данной функции по промежуточному аргументу, умноженной на производную промежуточного аргумента по независимому.

Пример 7. $y=2^{\sin x}$. Найти y'_x.

Имеем: $y = 2^u$, где $u=\sin x$;

$$y'=(2^u)'(\sin x)'=2^u \ln 2 \cos x = 2^{\sin x}\ln 2\cos x .$$

Пример 8. $y=\ln^2 tg3x$. $y'_x=?$

Имеем: $y=u^2$; $u=\ln v$; $v=tg z$; $z=3x$.

Теорема о дифференцировании сложной функции применяется и для функций, состоящих из 3, 4 и т.д. последовательных звеньев функций:

$$y'=(u^2)'(\ln v)'(tg z)'(3x)'=2u\frac{1}{v}\frac{1}{\cos^2 z}3=2\ln v\frac{1}{tg z}\times$$

$$\times\frac{1}{\cos^2 3x}3=2\ln tg3x\frac{1}{tg3x}\frac{1}{\cos^2 3x}3=\frac{6\ln tg3x}{tg3x\cos^2 3x}.$$

В дальнейшем не следует злоупотреблять записью, связанной с обозначением промежуточных аргументов, эти действия надо производить в уме.

Пример 9. $y=e^{x^2-4x+3}$ Найти y'.

$$y'=(e^{x^2-4x+3})(x^2-4x+3)'=e^{x^2-4x+3}(2x-4).$$

Упражнения. Найти производные:

1) $y=(3+2x)^4$;

2) $y=\ln(1-x^2)$;

3) $y=e^{2x+3}$;

4) $y=\sqrt[3]{1-x^2}$;

5) $y=\sin^2 x$;

6) $y=\sqrt{ctg x}$;

7) $y=2tg\frac{x}{2}$;

8) $y=\cos x^2$;

9) $y = 4^{\frac{1}{x}}$;

10) $y = \sin e^{2x}$;

11) $y = \frac{x \sin x}{1+x}$;

12) $y = \frac{2}{(3x^2-5)^3}$;

13) $y = e^{\sqrt{\ln \frac{1}{x}}}$;

14) $y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;

15) $y = \arccos \frac{1}{x}$;

16) $y = \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$;

17) $y = \ln \sin 2x$;

18) $y = \ln(x+\sqrt{a^2+x^2})$;

19) $y = \frac{1}{\operatorname{arctg} 2x}$;

20) $y = \sqrt{\frac{1}{\cos x}}$;

21) $y = \operatorname{tg} \frac{1+x}{x}$;

22) $y = 5^{\cos^2 \sqrt{x}}$;

23) $y = \sqrt{3x^2+5x+1}$;

24) $y = \sqrt[3]{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x}$;

25) $y = 10^{1-4\sin^3 x}$;

26) $y = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$;

27) $y = \operatorname{tg}(\arcsin x)$;

28) $y = \ln \sin(x^3+1)$;

29) $y = \sin \frac{x}{2} \sin 2x$;

30) $y = 2^{\frac{x^2}{\ln x}}$;

31) $y = \frac{\arcsin 4x}{1-4x}$;

32) $y = x^2 \operatorname{ctg} 2x$;

33) $y = \frac{(x^2+1)^5}{x-4}$;

34) $y = \arccos \sqrt{1-x^2}$;

35) $y = \ln(x \sin x)$;

36) $y = \left(\frac{1+x}{x^2-x}\right)^2$;

37) $y = \operatorname{tg} \frac{1-e^x}{1+e^x}$;

38) $y = x 10^{\sqrt{x}}$;

39) $y = \frac{2\sin^2 x}{\cos 2x}$;

40) $y = \lg(x-\cos x)$;

41) $y = \arcsin \ln \sqrt{x}$;

42) $y = e^{\sqrt{x^2-4x+3}}$.

3. ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

Геометрический смысл производной заключается в том, что она численно равна значению тангенса угла наклона касательной, проведенной к графику функции в точке с абсциссой x_0, к положительному направлению оси Ox:

$$y'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha.$$

Тангенс этого угла называют угловым коэффициентом касательной.

Уравнение касательной, проведенной к графику функции в точке (x_0 , y_0) имеет вид

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0).$$

<u>Пример I</u>. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=x^3$ в точке с абсциссой x = 2.

Воспользуемся формулой $y'(x_0)=tg\alpha$. Найдем сначала производную функции : $y' = 3x^2$ Вычислим ее в точке x = 2. y' (2) = I2. Значит $tg\alpha$ = I2, это и есть угловой коэффициент касательной, т.е. k = I2.

<u>Пример 2</u>. Написать уравнение касательной к параболе $y=\sqrt{x}$ в точке с абсциссой x = 4.

Воспользуемся уравнением касательной:

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0).$$

В данном случае x_0 = 4, тогда $y_0 = \sqrt{4} = 2$.

Найдем y'; $y' = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $y'(4) = \frac{1}{4}$.

Уравнение касательной примет вид

$$y - 2 = \frac{1}{4}(x-4) \quad \text{или} \quad y = \frac{1}{4}x + 1.$$

<u>Упражнения</u>

I. Найти угловой коэффициент касательной, проведенной к параболе $y=x^2$:

а) в начале координат;

б) в точке (2; -4).

2. В каких точках угловой коэффициент касательной к кривой $y=x^3$ равен 3?

3. В каких точках касательная к параболе $y=x^3$

а) параллельна оси OX ;

б) образует с осью OX углы 30^0; 45^0?

4. Найти угол наклона касательной к кривой $y=6-x^2$ в точке с абсциссой x = I.

5. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y=e^{-x}$ в точке с абсциссой x = 0.

6. Написать уравнение касательной к линии $y=\cos 2x$ в точке с абсциссой $x=-\frac{\pi}{4}$.

7. Показать, что линия $y=x^5+5x-12$ во всех своих точках наклонена к оси OX под острым углом.

8. Под каким углом касательная к кривой $y=e^x$ в точке (0; I) пересекает ось OX ?

9. Составить уравнение касательной к линии $y=\ln x$ в точке ее пересечения с осью OX .

I0. В какой точке касательная к параболе $y=x^2$ будет параллельна прямой $y=4x-5$?

II. Составить уравнения касательных к линии $y=x-\frac{1}{x}$ в точках пересечения ее с осью абсцисс.

I2. Написать уравнение касательной к линии $y=x^2$ в точках пересечения ее с прямой $y=3x-2$.

I3. В каких точках касательная к графику функции $y=\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{4}x^2-2$ составляет с положительным лучом OX угол 45^0 ?

I4. На кривой $y=x^2$ найти точку, в которой касательная параллельна биссектрисе первого координатного угла.

I5. Написать уравнения касательных к линии $y=e^{1-x^2}$ в точках пересечения ее с прямой y = I.

I6. Найти угловой коэффициент касательной к графику функции $y=2x+\frac{32}{x}$ в точке с абсциссой x = 2.

I7. Написать уравнение касательной к кривой $y=\sqrt[3]{x}$ в начале координат. Сделать чертеж.

I8. Показать, что касательные, проведенные к гиперболе $y=\frac{x-4}{x-2}$ в точках пересечения ее с осями координат, параллельны между собой.

I9. У параболы $y=\frac{4x-x^2}{4}$ проведена касательная в точке (2; I). Найти угол наклона касательной к оси OX .

20. В какой точке касательная к линии $y=x^2-7x+3$, параллельна прямой $5x+y-3=0$?

Возрастание, убывание функции

Теорема (достаточное условие возрастания, убывания функции). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема в интервале $]a;b[$ и $f'(x)>0$, $(f'(x)<0)$ для $x\in]a;b[$, то функция $f(x)$ возрастает (убывает) на отрезке $[a;b]$.

Указанное условие дает удобный на практике способ исследования функции на возрастание, убывание.

Пример. Найти промежутки возрастания, убывания функции $y = x \ln x$.

Данная функция непрерывна в $]0; +\infty[$. Находим производную $y' = x' \ln x + x(\ln x)' = \ln x + 1$.
Решаем неравенство $\ln x + 1 > 0 \Rightarrow \ln x > -1 \Rightarrow x > \frac{1}{e}$.
Итак, в итервале $]\frac{1}{e}; +\infty[$ функция $y = x \ln x$ возрастает.
$y' < 0 \Rightarrow \ln x + 1 < 0 \Rightarrow \ln x < -1 \Rightarrow 0 < x < \frac{1}{e}$.
В интервале $]0; \frac{1}{e}[$ - функция убывает.

Упражнения. Найти промежутки монотонности следующих функций:

1) $y = 2x^2 + 3x - 5$;
2) $y = x^2(x-3)$;
3) $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$;
4) $y = \frac{1}{2}x^4 - x^3 + x$;
5) $y = x^4 - 2x^2 - 3$;
6) $y = x^5 + 2x$;
7) $y = x + \sin x \, (0 \leq x \leq 2\pi)$;
8) $y = \frac{x}{x-2}$;
9) $y = x + \frac{1}{x}$;
10) $y = x^2 - \ln x$;
11) $y = x + \cos x \, (0 \leq x \leq 2\pi)$;
12) $y = x^3 - 12x$.

Экстремум функции

Теорема (достаточное условие существования экстремума функции). Пусть функция $f(x)$ непрерывна в некотором интервале, содержащем критическую точку x_0.

Если $f'(x) > 0$ в интервале $]x_0 - \delta; x_0[$ и $f'(x) < 0$ в интервале $]x_0; x_0 + \delta[$, то в точке x_0 данная функция имеет максимум.

Если же $f'(x) < 0$ в интервале $]x_0 - \delta; x_0[$ и $f'(x) > 0$ в интервале $]x_0; x_0 + \delta[$, то функция в точке x_0 имеет минимум.

Эта теорема позволяет сформулировать правило нахождения точек экстремума функции:

1) найти критические точки, т.е. точки, в которых производная равна нулю или не существует. Эти точки должны принадлежать области определения функции;

2) исследовать изменение знака производной при переходе через критическую точку x_0. Если при переходе через критическую точку производная меняет знак с "+" на "-", то x_0 - точка максимума, если же с "-" на "+", то x_0 - точка минимума.

Пример. Найти экстремум функции $y=x-\ln(1+x)$.

Область определения функции представляет интервал $]-1;+\infty[$. Находим критические точки:

$$f'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x};$$

$$f'(x)=0,\ \text{т.е.}\ \frac{x}{1+x}=0 \Longrightarrow x=0,\ 1+x\neq 0.$$

Исследование знака производной можно оформить в следующую таблицу:

x	$]-1,0[$	0	$]0;+\infty[$
y'	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	min	$\nearrow$
		0	

Вывод: при $x=0$ функция $y=x-\ln(1+x)$ имеет минимум, равный 0.

Упражнения. Найти экстремум функций:

1) $y=x^2-5x+3;$

2) $y=3x^3-x^2;$

3) $y=\dfrac{x^2}{x^2+3};$

4) $y=\dfrac{x^2}{x^2-1};$

5) $y=\dfrac{1}{x}+4x^2;$

6) $y=x-2\sin x,\ x\in[0;2\pi];$

7) $y=x\ln x;$

8) $y=x+\cos x,\ x\in[0;2\pi];$

9) $y=x^2(1-x);$

10) $y=x^3-12x.$

Библиографический список

1. Колмогоров А.Н., Вейц Б.Е. и др. Алгебра и начала анализа: Учебное пособие для 9-го класса средней школы.- М.: Просвещение, 1977.

2. Колмогоров А.Н., Ивашев-Мусатов О.С. и др. Алгебра и начала анализа: Учебное пособие для 10-го класса средней школы. - М.: Просвещение, 1977.

3. Виленкин Н.Я., Мордкович А.Г., Смышляев В.К. Алгебра и начала анализа: Пробный учебник для 9-го и 10-го классов. - М.: Просвещение, 1981.

4. Мордкович А.Г. Алгебра и начала анализа: Учебное пособие для подготовительных отделений высших учебных заведений. - М.: Высшая школа, 1979.

Составители: Елена Петровна Ульянова,
Маргарита Владимировна Кузьменко

Математика
Предел последовательности. Предел функции.
Производная и ее приложение

Редактор Т.К. Кретинина
Техн.редактор Н.М. Каленюк
Корректор Н.С. Куприянова

Подписано в печать 30.12.85 г.   Формат 60x84 1/16
Бумага оберточная белая. Печать оперативная.
Усл.п.л. 1,4.   Уч.-изд.л. 1,3.   Т. 300 экз.
Заказ 1174   Бесплатно.

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени
авиационный институт имени академика С.П.Королева,
г. Куйбышев, ул. Молодогвардейская, 151.

Тип. УЭЗ КуАИ, г. Куйбышев, ул. Ульяновская, 18.