МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П.КОРОЛЕВА

МАТЕМАТИКА - 99

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И ВАРИАНТЫ ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНОВ В СГАУ

Самара 1999

Составители: Г. Н. Горелов, Е. А. Ефимов

УДК 510.2(075)

МАТЕМАТИКА–99: Методические указания и варианты вступительных экзаменов в СГАУ /Самар. гос. аэрокосм. ун-т., Сост. Г. Н. Горелов, Е. А. Ефимов, Самара, 1999, 48 с.

Методические указания предназначены для занятий школьников старших классов на факультете довузовской подготовки СГАУ, подготовительном отделении, а также для самостоятельной подготовки к конкурсным экзаменам по математике.

В методические указания включены все основные типы задач, предлагаемых на вступительных экзаменах по математике. Приведены варианты конкурсных экзаменов по математике 1997 и 1998 г.г., два варианта приведены с решениями. Ко всем задачам и вариантам даны ответы.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С. П. Королева.

Рецензент: Н. В. Воропаева

Содержание

1 СОДЕРЖАНИЕ И СТРУКТУРА ВАРИАНТОВ ПИСЬМЕННОГО ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИКЕ

Твердые знания и уверенное владение материалом школьного учебника являются совершенно необходимым условием для выполнения экзаменационной работы. Анализ ошибок, допускаемых абитуриентами на вступительных экзаменах, показывает, что значительная их часть возникает из-за ошибок в вычислениях, из-за нетвердого знания формул школьного курса математики, наконец, из-за элементарной невнимательности.

Являясь необходимым условием, твердое знание школьного учебника порой оказывается недостаточным для получения высокой оценки на экзамене. Высокие конкурсы приводят к тому, что в разных высших учебных заведениях и на разных факультетах уровень сложности экзаменационных задач существенно различен. Оставаясь в рамках школьной программы, экзаменационные задания требуют от абитуриентов, чтобы они за отведенное на экзамен время решили достаточно сложные задачи.

Данные методические указания предназначены для учащихся всех форм обучения на факультете довузовской подготовки СГАУ. Они знакомят как с традиционной структурой и тематикой экзаменационных заданий, так и с уровнем сложности этих заданий, характерным для последних лет. Отметим, что, как правило, варианты содержат набор задач разной сложности.

Данные методические указания состоят из двух основных частей: вариантов вступительных экзаменов, предлагавшихся в 1997 и 1998 годах, и конкурсных задач, сгруппированных по тематическому признаку, предлагавшихся в предыдущие годы.

Варианты с 1 по 8 предлагались на механические факультеты, с 9 по 12 на 5-м факультете. Варианты 13–16 — на 6-й и 7-й факультеты. Варианты 1 и 13 приведены с решениями. Не являясь образцами оформления (поскольку таковых вообще не существует), они, вместе с тем, обозначают допустимую меру подробности решения.

Вариант письменного экзамена по математике состоит из пяти – шести заданий и охватывает широкий круг тем школьной программы.

Для проверки пространственного представления, умения изображать геометрические фигуры на чертеже в экзаменационный вариант включена задача по стереометрии, решение которой предполагает широкое использование методов алгебры и тригонометрии. Здесь от абитуриента требуется умение пользоваться свойствами геометрических фигур, их характерных точек, линий и частей; делать дополнительные построения и строить сечения; применять признаки равенства, подобия фигур, используя широкий круг теорем и формул.

В других задачах варианта письменной работы абитуриенту предлагается решить уравнения, неравенства или систему из них. Эти задачи направлены на проверку знаний основных свойств элементарных функций, умений владеть основными формулами, содержащими модули, степени, корни, логарифмические, тригонометрические выражения. Абитуриент должен также хорошо разбираться в понятии равносильности преобразований, чтобы избежать потери решений и суметь отбросить "лишние" решения, не являющиеся решениями исходного уравнения. При этом нужно уметь проводить алгебраические преобразования, выполнять (без калькулятора) действия над числами и числовыми выражениями, сравнивать числа и находить их приближенные значения (без калькулятора). Заметим, что в СГАУ, как и во многих других "серьезных" вузах, пользоваться на экзамене калькулятором и таблицами нельзя.

При решении указанных задач может возникнуть необходимость построения графиков элементарных функций и множества точек на координатной плоскости, заданных уравнениями и неравенствами. Заметим, что подобное задание может иметь характер отдельной задачи.

Для проверки умения логически мыслить абитуриенту могут быть предложены задачи с параметрами. Кроме указанных типов, практикуется включение задач из следующих разделов: прогрессии, агебраические преобразования, абсолютная величина, иррациональные функции, производная и ее применение к исследованию функций. Темы "Пределы" и "Первообразная" в письменный экзамен не включаются.

В заключение несколько общих рекомендаций. Целью абитуриента является получение наиболее высокой оценки. Оценка ставится в соответствии с количеством решенных задач. Задача считается решенной, если даны правильный ответ и верный путь, к нему ведущий. Так как понятие верного решения растяжимо, существенны такие его характеристики, как логическая правильность и полнота, наличие необходимых обоснований и, наконец, ясное и четкое оформление всей работы.

2 ПРИМЕРЫ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ ВАРИАНТОВ

Вариант 1

1. В основание конуса вписан правильный треугольник. Плоскость, проходящая через вершину S конуса и одну из сторон этого треугольника, дает в сечении с поверхностью конуса треугольник, угол при вершине S которого равен α. Площадь полученного сечения равна Q. Найдите объем конуса.
2. Решите систему уравнений $\begin{cases} \frac{1}{2}\log_2 x - \log_4 y = 0\,, \\ x^2 - 5y^2 + 4 = 0\,. \end{cases}$
3. Решите уравнение
$$2\cos^2(\tfrac{\pi}{4} + 3x) = 1 + \sin 4x + 2\sin 5x \cdot \cos^2 x\,.$$
4. Решите неравенство $\dfrac{3}{|x-1|+1} > |x-1| - 1.$
5. Второй член бесконечно убывающей геометрической прогрессии равен -6, а сумма всех членов равна $27/2$. Третий член геометрической прогрессии равен третьему члену некоторой арифметической прогрессии. Найдите геометрическую прогрессию и сумму первых пяти членов арифметической прогрессии.

Вариант 2

1. Через две образующие конуса, составляющие между собой угол α, проведена плоскость. Полученная плоскость наклонена к плоскости основания конуса под углом β. Объем конуса равен V. Найдите площадь сечения конуса.
2. Решите систему уравнений $\begin{cases} 5^{x-1} \cdot 7^y = \frac{1}{7}\,, \\ x - y = 2\,. \end{cases}$

3. Решите уравнение
$$\cos^2(\tfrac{\pi}{4}+5x)=\sin^2 x\cdot\cos 9x+\cos^2(\tfrac{\pi}{4}+4x)\,.$$
4. Решите неравенство $$\frac{5}{|x+2|+2}>|x+2|-2.$$
5. Рассматриваются бесконечно убывающая геометрическая и арифметическая прогрессии. Первый член геометрической прогрессии равен сумме первых пяти членов арифметической прогрессии, второй член геометрической прогрессии равен третьему члену арифметической прогрессии. Найдите сумму всех членов геометрической прогрессии, если ее шестой член равен $8/625$.

Вариант 3

1. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ боковое ребро равно l и образует с плоскостью основания угол φ. Через середины сторон AB и AC основания и вершину S пирамиды проведена плоскость. Найдите объемы частей, на которые пирамида делится плоскостью сечения.
2. Решите уравнение $\quad 1+7+13+\ldots+x=133\,.$
3. Решите неравенство $\quad f'(x)\geqslant\varphi'(x)\,,\quad$ если
$$f(x)=\frac{x^2}{2}\,,\quad \varphi(x)=7x-16\ln(x+1)\,.$$
4. Решите уравнение $\quad \log_5\sqrt{x}-2=(\log_5 x)(\log_2\frac{1}{x})+\log_2\frac{x^3}{4}\,.$
5. Решите уравнение $\quad \sin^2 2x-4\cos^4 x=\sin 4x\,.$

Вариант 4

1. Основанием треугольной пирамиды $SABC$ служит равнобедренный треугольник ABC с углом α при основании BC. Все боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом β. Высота боковой грани пирамиды, проведенная из вершины S, равна b. Через середины равных сторон AB и AC основания и вершину S пирамиды проведена плоскость. Найдите объем получившейся четырехугольной пирамиды.

2. Решите уравнение $\quad 1+3+9+27+\ldots+x=1093$.
3. Решите неравенство $\quad f'(x)<g'(x)$, если
$$f(x)=\frac{x^2}{2}, \quad g(x)=-4\ln(3-x)-x.$$
4. Решите уравнение $\quad (\log_3\frac{3}{x})\log_2 x-\log_3\frac{x^3}{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}+\log_2\sqrt{x}$.
5. Решите уравнение $\quad \sin^4(\frac{\pi}{4}-x)+\cos^4 x=\frac{1}{4}$.

Вариант 5

1. В цилиндр, объем которого равен V, вписана пирамида. Основание пирамиды, являющееся правильным треугольником, вписано в нижнее основание цилиндра, а вершина находится на его другом основании. Две боковые грани пирамиды перпендикулярны к основанию, а третья образует с плоскостью основания двугранный угол α. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.
2. Решите уравнение $\quad \operatorname{tg} x+\frac{\cos x}{2-\sin x}=0$.
3. Решите неравенство $\quad x^2+4\geqslant|3x+5|-7x$.
4. Решите уравнение
$$x^4\log_6\sqrt{5x^2-2x-3}-\log_{1/6}(5x^2-2x-3)=x^4+2.$$
5. Сумма всех членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна наибольшему значению функции
$$y=x^3-3x^2+3x+4 \qquad \text{на } [0;2],$$
а первый член прогрессии равен 9. Найдите пять первых членов этой прогрессии.

Вариант 6

1. Боковые ребра правильной треугольной пирамиды наклонены к плоскости основания под углом α. Пирамида вписана в цилиндр так, что ее основание вписано в нижнее основание цилиндра, а вершина находится на другом основании. Объем цилиндра равен V. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

2. Решите уравнение $\dfrac{2\sin x}{3+2\cos x} = \operatorname{ctg} x$.

3. Решите неравенство $9x + |x-2| \leqslant 2x^2 + 8$.

4. Решите уравнение
$$x^2 \log_2 \frac{3x^2+11x+6}{10} - 2\log_{\sqrt{2}} \frac{3x^2+11x+6}{10} = x^2 - 4.$$

5. Сумма первых шести членов арифметической прогрессии равна наименьшему значению функции
$$y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 30 \qquad \text{на } [-2;2],$$
а первый член прогрессии равен -2. Найдите три первых члена этой прогрессии.

Вариант 7

1. Два конуса имеют общее основание, причем один из них находится внутри другого. Образующие этих конусов составляют с плоскостью основания углы α и β $(\alpha>\beta)$. Найдите боковую поверхность бо́льшего конуса и объем тела, заключенного между боковыми поверхностями этих конусов, если известно, что сумма высот обоих конусов равна m.

2. Решите уравнение $2\sqrt{x+1} - \dfrac{4}{\sqrt{x+1}} + 7 = 0$.

3. Решите неравенство $\dfrac{2x+5}{|x+1|} > 1$.

4. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2(2\log_{y^2} x + \log_{\frac{1}{x}} y) = 3, \\ xy = 27. \end{cases}$

5. Найдите все значения x, при каждом из которых касательная к графику функции $y(x) = \cos 7x + 7\cos x$ в точке с абсциссой x параллельна касательной к этому же графику в точке с абсциссой $\frac{\pi}{6}$.

Вариант 8

1. Два конуса имеют общую высоту H и параллельно расположенные основания. Образующие одного конуса наклонены к плоскости основания под углом α; образующие другого – под углом β. Определите длину линии, по которой пересека-

ются их боковые поверхности, и объем общей части данных конусов.

2. Решите уравнение $10\sqrt{x+3}+17=\dfrac{6}{\sqrt{x+3}}$.
3. Решите неравенство $\dfrac{3x-4}{|x-3|}>2$.
4. Решите систему уравнений $\begin{cases} y\cdot x^{\log_y x}=x^{\frac{5}{2}}, \\ \log_4 y\cdot\log_y(y-3x)=1. \end{cases}$
5. Найдите все значения x, при каждом из которых касательные к графикам функций $y(x)=2-14\sin 3x$ и $\varphi(x)=6\sin 7x$ в точках с абсциссой x параллельны.

Вариант 9

1. Высота правильной треугольной пирамиды $SABC$ равна H. Через высоту SO пирамиды проведено сечение DSE параллельно стороне AB и сечение KDE параллельно боковой грани SAB. Угол между построенными сечениями равен α. Найдите площадь сечения KDE.
2. При каких значениях x график функции $f(x)=\sqrt{\frac{x+5}{2x+1}}$ лежит выше графика функции $\varphi(x)=\sqrt{5x-3}$?
3. Решите уравнение
$$3x+(3-x)\cdot\log_3 2=\log_3\left(9\cdot\left(\tfrac{8}{3}\right)^x+2\cdot 6^x\right)+1.$$
4. Найдите решения уравнения $\sin^2 3x+\sin^2 5x=2\sin^2 4x$, для которых определено выражение $\operatorname{tg}(4x+\frac{\pi}{4})$.
5. Все члены арифметической прогрессии – натуральные числа. Сумма ее восьми последовательных членов, начиная с первого, больше 152, но меньше 168. Найдите прогрессию, если ее второй член равен 10.

Вариант 10

1. Высота правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ равна H. На диагонали AC основания пирамиды взята точка F так, что $|CF|:|FA|=1:3$. Через точку F проведен от-

резок K_1K_2 параллельно диагонали BD. Отрезок K_1K_2 является линией пересечения двух плоскостей, одна из которых K_1K_2M параллельна высоте пирамиды, а другая K_1K_2N параллельна боковому ребру SA. Угол между построенными плоскостями равен β. Найдите площадь сечения K_1K_2N пирамиды.

2. При каких значениях x график функции $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+7}{3x+5}}$ лежит ниже графика функции $\varphi(x)=\sqrt{x+4}$?
3. Решите уравнение $\log_x 3 + \log_3 x = \log_{\sqrt{x}} 3 + \log_3 \sqrt{x} + \frac{1}{2}$.
4. Найдите решения уравнения $\cos^2 4x - 2\cos^2 5x + \cos^2 6x = 0$, для которых определено выражение $\operatorname{ctg}(5x - \frac{3\pi}{4})$.
5. Все члены арифметической прогрессии - натуральные числа. Сумма первых ее восьми членов больше 181, но меньше 186. Найдите прогрессию, если ее четвертый член равен 20.

Вариант 11

1. Двугранный угол при основании правильной треугольной пирамиды равен α, площадь боковой поверхности пирамиды равна Q. Найдите расстояние от точки пересечения медиан основания до середины бокового ребра пирамиды.
2. Решите уравнение $\lg(1 + 2^{x+1}) = \lg 3 + \dfrac{x \cdot \lg 2 \cdot \lg 4}{\lg 16}$.
3. Решите уравнение $\sin 2x = 1 + \sqrt{2}\cos x + \cos 2x$.
4. Решите уравнение $\sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}} - \sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}} = 1$.
5. Решите неравенство
$$\log_2^2(x - x^2 + 2) + 3\log_{1/2}(x - x^2 + 2) + 2 \leqslant 0 .$$

Вариант 12

1. Боковые ребра правильной треугольной пирамиды наклонены к плоскости основания под углом α. Объем пирамиды

равен V. Найдите расстояние от точки пересечения высот основания до середины апофемы боковой грани пирамиды.

2. Решите уравнение $\qquad \lg(25\cdot 5^{-x}+1)=\lg 26-\dfrac{x\cdot\lg 5\cdot\lg 25}{\lg 625}$.

3. Решите уравнение $\qquad \sin 2x+\cos 2x=1+\sqrt{6}\sin x$.

4. Решите уравнение $\qquad \sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}=2$.

5. Решите неравенство
$$\log_3^2(6-x-x^2)+3\log_{1/3}(6-x-x^2)+2<0.$$

Вариант 13

1. В конус, у которого площадь боковой поверхности Q и угол между высотой и образующей равен β, вписана пирамида. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с острым углом α. Найдите объем пирамиды.

2. Найдите область определения функции $\qquad y=\dfrac{\sqrt{40+3x-x^2}\cdot\log_5(x^2-9)}{2\sin x-\sqrt{3}}$.

3. Решите неравенство $\qquad 2^x+2^{|x|}\geqslant 2\sqrt{2}$.

4. Даны две различные геометрические прогрессии, первые члены которых равны 1. Известно, что сумма вторых членов прогрессий равна 3, а сумма третьих членов прогрессий равна 19. Найдите сумму пятых членов прогрессий.

5. Решите неравенство $\qquad \log_{\frac{1}{4}}(\sqrt{x+3}-x+3)\geqslant -2+\log_{\frac{1}{4}}\dfrac{3}{8}$.

6. Решите уравнение
$$\left(\operatorname{tg}\frac{19\pi}{3}-\operatorname{tg}x\right)\sqrt{6\cos\frac{15\pi}{4}\cos\frac{x}{2}-\cos x-3}=0.$$

Вариант 14

1. В конус, у которого угол между образующими в осевом сечении равен 2α, вписана пирамида. Основанием пирамиды служит равнобедренный прямоугольный треугольник. Найдите площадь полной поверхности конуса, если объем пирамиды известен и равен V.

2. Найдите область определения функции $y=\dfrac{\sqrt{144-x^2}\cdot\log_{1/3}(x^2+7x+6)}{2\cos\frac{x}{2}-1}$.

3. Решите неравенство $3^{x+1}+3^{|x|}<12$.

4. Даны две различные геометрические прогрессии, первые члены которых равны 1. Известно, что разность между вторым членом первой прогрессии и вторым членом второй прогрессии равна 3, а разность между четвертым членом первой прогрессии и четвертым членом второй прогрессии равна 18. Найдите сумму третьих членов прогрессий.

5. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{10}}(\sqrt{x+6}-x+6)\geqslant -1+\log_{\frac{1}{10}}\frac{6}{5}$.

6. Решите уравнение
$$\left(\operatorname{tg}\frac{17\pi}{4}-\operatorname{tg}x\right)\sqrt{18\sin\frac{25\pi}{6}\sin\frac{x}{2}+\cos x-5}=0\,.$$

Вариант 15

1. Основанием призмы является равнобедренный треугольник с равными сторонами a и углом между ними α. Боковое ребро призмы, проходящее через вершину угла α, образует с прилежащими сторонами основания острые углы β. Найдите длину бокового ребра призмы, если объем призмы равен V.

2. Решите уравнение
$$2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+3x\right)=1+\sin 4x+2\sin 5x\cdot\cos^2 x\,.$$

3. Решите уравнение $2^{|x+2|}-|2^{x+1}-1|=2^{x+1}+1$.

4. Найдите ОДЗ и решите уравнение $\log_6\log_{15}(6x+15)+\log_{\frac{1}{6}}\log_{\frac{1}{15}}\frac{x+3}{6x+15}=\log_6 2$.

5. Найдите область определения функции $y=\sqrt{(x-x_\circ)\sin\pi x}$, если $x_\circ$ – корень уравнения $\dfrac{4^x}{9^{x-0,5}}\cdot\left(\dfrac{27}{8}\right)^{x-1}=2$.

6. Решите систему уравнений $\begin{cases}\sqrt{x+y-1}=1\,,\\ \sqrt{x-y+2}=2y-2\,.\end{cases}$

Найдите область допустимых значений и изобразите ее на координатной плоскости.

Вариант 16

1. Основанием призмы является равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом a. Боковое ребро призмы, проходящее через вершину прямого угла основания, с катетами составляет острые углы α и β. Длина бокового ребра равна b. Найдите объем призмы и угол между боковым ребром призмы и плоскостью основания.

2. Решите уравнение
$$\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + 5x\right) = \sin^2 x \cdot \cos 9x + \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + 4x\right).$$

3. Решите уравнение $\qquad 4^{|x+4,5|} - \left|4^{x+4} - 1\right| = 4^{x+4} + 1\,.$

4. Найдите ОДЗ и решите уравнение $\qquad \log_2 \log_3(2x+3) + \log_{\frac{1}{2}} \log_{\frac{1}{3}} \frac{x+1}{2x+3} = 1.$

5. Найдите область определения функции $\quad y = \sqrt{(x+x_\circ)\cos \pi x}$, если $x_\circ$ – меньший корень уравнения $4^{x^2+2} - 9 \cdot 2^{x^2+2} + 8 = 0\,.$

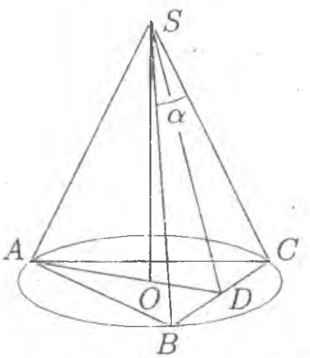
6. Решите систему уравнений $\qquad \begin{cases} \sqrt{x-y+5} = 3\,, \\ \sqrt{x+y-5} = -2x + 11\,. \end{cases}$

   Найдите область допустимых значений и изобразите ее на координатной плоскости.

3 ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ ВАРИАНТОВ

3.1 Решение варианта 1

Задача 1



Обозначим длину AB через a. Из $\triangle BSC$ находим: $DS = \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, $BS = \dfrac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$. Тогда из равенства $S_{\triangle BSC} = Q = \frac{1}{2}a\cdot\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ получаем, что $a = 2\sqrt{Q}\sqrt{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$.

В правильном $\triangle ABC$: радиус описанной окружности $R = AO = = \frac{2}{3}AD = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Следовательно, из $\triangle SAO$ находим $SO = \sqrt{AS^2 - R^2}$.

Тогда объем конуса $V = \frac{1}{3}\pi R^2 SO = \frac{1}{3}\pi\frac{a^2}{3}\sqrt{\dfrac{a^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} - \dfrac{a^2}{3}} = = \frac{4\pi}{27}\dfrac{Q\sqrt{Q}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\sqrt{9 - 12\sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

Ответ: $V = \frac{4\pi}{27}\dfrac{Q\sqrt{Q}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}\sqrt{9 - 12\sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

Задача 2

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\log_2 x - \log_4 y = 0, & \text{ОДЗ}:\ x > 0,\ y > 0 \\ x^2 - 5y^2 + 4 = 0. \end{cases}$$

Преобразуем первое уравнение: $\frac{1}{2}\log_2 x - \dfrac{\log_2 y}{\log_2 4} = 0$, откуда

$\frac{1}{2}(\log_2 x - \log_2 y) = 0$ и $x = y$. Подставляя $x = y$ во второе уравнение системы, получаем

$$\begin{cases} x = y \\ y^2 - 5y^2 + 4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ y^2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ y = \pm 1 \end{cases}$$

или, с учетом ОДЗ, $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

Ответ: $(1, 1)$.

Задача 3

Заметим, что ОДЗ: $x \in R$.

Левую часть данного уравнения

$$2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right) = 1 + \sin 4x + 2\sin 5x\cos^2 x$$

преобразуем по одной из формул понижения степени:

$$1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} + 6x\right) = 1 + \sin 4x + 2\sin 5x\cos^2 x.$$

Перенося все слагаемые в одну часть уравнения, получаем:

$$(\sin 6x + \sin 4x) + 2\sin 5x\cos^2 x = 0.$$

Разложение на множители приводит к уравнению

$$2\sin 5x\cos x(1 + \cos x) = 0,$$

которое эквивалентно следующей совокупности уравнений:

$\sin 5x = 0$, откуда $x = \frac{\pi k}{5}$, $k \in Z$, (1)

$\cos x = 0$, откуда $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$, (2)

$\cos x = -1$, откуда $x = \pi + 2\pi m$, $m \in Z$. (3)

Заметим, что группа решений (3) входит в (1).

Ответ: $\frac{\pi k}{5}$, $k \in Z$; $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in Z$.

Задача 4

$\frac{3}{|x-1|+1} > |x-1| - 1$. ОДЗ: $|x-1| + 1 \neq 0$ или $x \in R$.

Обозначим: $|x-1| = y$. Данное неравенство преобразуется к виду $\frac{3}{y+1} > y - 1$, откуда получаем $y^2 < 4$, $|y| < 2$, или, с учетом того, что $y \geqslant 0$, находим: $0 \leqslant y < 2$. Для переменной x это эквивалентно неравенству $|x-1| < 2$, или $-1 < x < 3$.

Ответ: $x \in (-1; 3)$.

Задача 5

По условию задачи составляем систему уравнений:

$$\begin{cases} b_1 q = -6, \\ \dfrac{b_1}{1-q} = \dfrac{27}{2}. \end{cases}$$

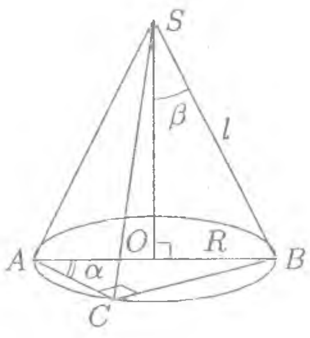
Из второго уравнения находим $b_1 = \frac{27}{2}(1-q)$. После подстановки в первое уравнение выражения для b_1 получаем квадратное уравнение относительно q вида $\frac{27}{2}(1-q)q = -6$, корни которого $q_1 = \frac{4}{3}$, $q_2 = -\frac{1}{3}$. Так как геометрическая прогрессия по условию — бесконечно убывающая, получаем один ответ: $q = -\frac{1}{3}$, $b_1 = 18$.

Чтобы ответить на второй вопрос задачи, воспользуемся свойством арифметической прогрессии, согласно которому $a_3 = \dfrac{a_2 + a_4}{2} = \dfrac{a_1 + a_5}{2}$. По условию, $a_3 = b_3 = 18 \cdot (-\frac{1}{3})^2 = 2$. Тогда $S_5 = 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 10$.

Ответ: $q = -\frac{1}{3}$; $b_1 = 18$; $S_5 = 10$.

3.2 Решение варианта 13

Задача 1



Заметим, что в условиях задачи вершина конуса проектируется в середину гипотенузы $\triangle ABC$. Площадь боковой поверхности конуса вычисляется по формуле $S_{бок} = \pi R \cdot l = \pi \cdot OB \cdot SB$. Из $\triangle BSO$ находим $l = \dfrac{R}{\sin\beta}$. По условию, $S_{бок} = Q$, откуда $Q = \dfrac{\pi R^2}{\sin\beta}$ и $R = \sqrt{\dfrac{Q \sin\beta}{\pi}}$.

Площадь основания пирамиды — это площадь прямоугольного треугольника, которую вычислим по формуле $S_{\triangle ABC} =$

$= \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin\alpha$. Учитывая, что $AB = 2R$, $AC = 2R\cos\alpha$, получаем: $S_{\triangle ABC} = R^2 \sin 2\alpha = \dfrac{Q \sin\beta \sin 2\alpha}{\pi}$.

Наконец, объем вычисляем непосредственно по формуле $V = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot SO = \dfrac{1}{3} \dfrac{Q\sin\beta\sin 2\alpha}{\pi} \cdot \sqrt{\dfrac{Q\sin\beta}{\pi}} \operatorname{ctg}\beta$.

Ответ: $V = \dfrac{Q\sqrt{Q}}{3\pi\sqrt{\pi}} \sin 2\alpha \cos\beta \sqrt{\sin\beta}$.

Задача 2

Область определения данной функции

$$y = \frac{\sqrt{40 + 3x - x^2} \cdot \log_5 (x^2 - 9)}{2\sin x - \sqrt{3}}$$

задается неравенствами

$$\begin{cases} 40 + 3x - x^2 \geqslant 0 \\ x^2 - 9 > 0 \\ 2\sin x - \sqrt{3} \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in [-5; 8] \\ x \in (-\infty; -3) \cup (3; +\infty) \\ \sin x \neq \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases},$$

откуда получаем

Ответ: $x \in [-5; -\frac{4\pi}{3}) \cup (-\frac{4\pi}{3}; -3) \cup (3; \frac{7\pi}{3}) \cup (\frac{7\pi}{3}; 8]$.

Задача 3

$2^x + 2^{|x|} \geqslant 2\sqrt{2}$.   ОДЗ: $x \in R$.

1) $x \geqslant 0$. На этом промежутке данное неравенство эквивалентно неравенству $2^x + 2^x \geqslant 2\sqrt{2}$, откуда $2^x \geqslant \sqrt{2}$, $x \geqslant \frac{1}{2}$.

2) $x < 0$. Для таких значений x данное неравенство эквивалентно неравенству $2^x + 2^{-x} \geqslant 2\sqrt{2}$. Решая это квадратное неравенство относительно 2^x, получаем:

$2^x \geqslant \sqrt{2} + 1$, откуда $x \geqslant \log_2 (\sqrt{2} + 1)$ (что не соответствует рассматриваемому случаю $x < 0$) или

$2^x \leqslant \sqrt{2} - 1$, откуда $x \leqslant \log_2 (\sqrt{2} - 1)$.

Ответ: $x \in (-\infty; \log_2 (\sqrt{2} - 1)] \cup [\frac{1}{2}; +\infty)$.

Задача 4

Так как $a_1 = b_1 = 1$, то $a_2 = a_1 \cdot q = q$, $b_2 = p$, $a_3 = q^2$, $b_3 = p^2$, $a_5 = q^4$, $b_5 = p^4$.

Составим систему для определения p и q:

$$\begin{cases} p + q = 3, \\ p^2 + q^2 = 19. \end{cases}$$

Заметим, однако, что значения p и q не требуется найти, а нужно найти значение $q^4 + p^4$. Поэтому в полученной системе возведем второе уравнение в квадрат: $p^4 + q^4 + 2p^2q^2 = 361$. Следовательно, $p^4 + q^4 = 361 - 2(pq)^2$. Далее, возводя первое уравнение системы в квадрат и вычитая из него второе, получим: $2pq = 9 - (p^2 + q^2) = -10$. Тогда $pq = -5$, и $q^4 + p^4 = 361 - 50 = 311$.

Ответ: 311.

Задача 5

Установим вначале область определения неравенства

$$\log_{\frac{1}{4}}(\sqrt{x+3} - x + 3) \geqslant -2 + \log_{\frac{1}{4}} \frac{3}{8}.$$

ОДЗ определяется системой неравенств

$$\begin{cases} \sqrt{x+3} - x + 3 > 0 \\ x + 3 \geqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sqrt{x+3} > x - 3 \\ x + 3 \geqslant 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - 3 \geqslant 0 \\ x + 3 > (x-3)^2 \end{cases} \\ x - 3 < 0 \end{array} \right. \\ x \geqslant -3 \end{cases} \iff \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - 3 \geqslant 0 \\ x^2 - 7x + 6 < 0 \end{cases} \\ x - 3 < 0 \end{array} \right. \\ x \geqslant -3 \end{cases}$$

Итак, ОДЗ: $-3 \leqslant x < 6$.

Решаем далее неравенство $\sqrt{x+3} - x + 3 \leqslant 6$. После очевидных преобразований получаем $\sqrt{x+3} \leqslant x + 3$. Так как $x + 3 \geqslant 0$, возводим обе части неравенства в квадрат и получаем эквивалентное неравенство $x^2 + 5x + 6 \geqslant 0$, откуда $x \in (-\infty; -3) \cup (-2; +\infty)$, или, с учетом ОДЗ, получаем

Ответ: $x \in \{-3\} \cup [-2; 6)$.

Задача 6

Область допустимых значений переменной x в уравнении

$$\left(\operatorname{tg}\frac{19\pi}{3}-\operatorname{tg}x\right)\sqrt{6\cos\frac{15\pi}{4}\cos\frac{x}{2}-\cos x-3}=0$$

определяется из системы неравенств

$$\begin{cases}\cos x\neq 0,\\ 6\cos\frac{15\pi}{4}\cos\frac{x}{2}-\cos x-3\geqslant 0.\end{cases}$$

Вначале решим данное уравнение, а затем установим, какие из его решений принадлежат ОДЗ. Уравнение распадается на два:

1) $\operatorname{tg}\frac{19\pi}{3}-\operatorname{tg}x=0$, откуда $\operatorname{tg}x=\sqrt{3}$, $x=\frac{\pi}{3}+\pi k$, $k\in Z$.

2) $6\cos\frac{15\pi}{4}\cos\frac{x}{2}-\cos x-3=0$. Переходя к аргументу $\frac{x}{2}$, получим уравнение $2\cos^2\frac{x}{2}-3\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}+2=0$, откуда

$\cos\frac{x}{2}=\sqrt{2}$ (не имеет решений) или

$\cos\frac{x}{2}=\sqrt{2}/2$, откуда $x=\pm\frac{\pi}{2}+4\pi k$, $k\in Z$. Эта группа решений не принадлежит ОДЗ, т. к. при этих значениях x не определен $\operatorname{tg}x$.

Установим теперь, какие значения x из группы решений $x=\frac{\pi}{3}+\pi k$ входят в ОДЗ. Переходя к аргументу $\frac{x}{2}$, неравенство $6\cos\frac{15\pi}{4}\cos\frac{x}{2}-\cos x-3\geqslant 0$ решим как квадратное относительно $\cos\frac{x}{2}$. Получим: $\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\cos\frac{x}{2}\leqslant\sqrt{2}$, или $\cos\frac{x}{2}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$. Непосредственная проверка показывает, что этому неравенству удовлетворяет только совокупность решений $x=\frac{\pi}{3}+4\pi k$ уравнения в 1).

Ответ: $x=\frac{\pi}{3}+4\pi k$, $k\in Z$.

4 ЗАДАЧИ, ПРЕДЛАГАВШИЕСЯ НА ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНАХ

4.1 Геометрические задачи

1. Тупоугольный треугольник, острые углы которого равны α и β и меньшая высота равна h, вращается около стороны, противолежащей углу β. Найдите площадь поверхности тела вращения.
2. Основанием прямой призмы служит ромб с острым углом α. Угол между меньшей диагональю ромба и меньшей диагональю призмы равен β. Определите объем призмы, если меньшая диагональ ромба равна d.
3. Основанием прямой призмы служит прямоугольник. Определите объем призмы, если диагональ призмы, равная d, составляет с боковыми гранями углы α и β.
4. В правильной треугольной призме проведена плоскость через сторону нижнего основания и через середину противоположного бокового ребра. Площадь полученного сечения равна Q, а угол при его вершине α. Найдите площадь боковой поверхности призмы.
5. Объем правильной треугольной призмы равен V, угол между диагоналями двух боковых граней, проведенных из одной вершины, равен α. Определите сторону основания призмы.
6. Треугольник ABC, у которого угол при вершине A тупой и равен α, а угол при вершине B равен β, вращается вокруг стороны AB, равной c. Найдите объем тела вращения.
7. В основание конуса вписан квадрат, сторона которого равна a. Плоскость, проходящая через вершину конуса и сторону квадрата, дает в сечении с поверхностью конуса тре-

угольник, угол при вершине которого равен α. Определите объем и полную поверхность конуса.

8. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a и составляет с боковым ребром угол α. Найдите площадь сечения, проведенного через боковое ребро пирамиды и ее высоту.
9. Пирамида имеет в основании квадрат. Из двух противоположных друг другу ребер одно перпендикулярно к плоскости основания, а другое наклонено к ней под углом α и имеет длину l. Определите длины остальных ребер и углы их наклона к плоскости основания.
10. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно b, плоский угол при вершине пирамиды равен α. Найдите объем и полную поверхность пирамиды.
11. Объем правильной треугольной пирамиды равен V, а высота образует с боковой гранью угол α. Найдите сторону основания пирамиды.
12. Основанием прямой призмы служит равнобедренный треугольник, боковые стороны которого равны b и угол между ними равен α. Диагональ боковой грани, противолежащей углу α, составляет со смежной боковой гранью угол β. Найдите объем призмы.
13. Боковое ребро треугольной пирамиды перпендикулярно к ее основанию, два других боковых ребра имеют одинаковую длину l и наклонены к основанию под углом α. Боковая грань, содержащая равные боковые ребра, образует с основанием угол β. Найдите объем пирамиды.
14. В правильной четырехугольной пирамиде через сторону основания, равную a, проведена плоскость, перпендикулярная апофеме противоположной боковой грани. Найдите площадь сечения, если боковые грани наклонены к плоскости основания под углом α
15. Длина перпендикуляра, опущенного из вершины основания правильной треугольной пирамиды на противоположную

грань, равна d. Апофема боковой грани образует с плоскостью основания угол α. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

16. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна d и составляет с боковым ребром угол α. Найдите объем параллелепипеда, если периметр основания равен p.
17. Основанием прямой призмы служит равнобедренный треугольник, основание которого равно a и угол при основании равен α. Определите объем призмы, если площадь ее боковой поверхности равна сумме площадей ее оснований.
18. Самая большая диагональ правильной шестиугольной призмы, имеющая длину d, составляет с боковым ребром угол α. Найдите объем призмы.
19. Расстояние от центра основания конуса до его образующей равно d. Угол между образующей и высотой равен α. Найдите площадь полной поверхности конуса.
20. Угол при вершине осевого сечения конуса равен 2α, а сумма длин его образующей и высоты равна m. Найдите объем конуса.
21. В конусе, радиус основания которого равен R, проведена плоскость через вершину конуса под углом β к его высоте. Найдите площадь полученного сечения, если образующая конуса наклонена к основанию под углом α.
22. Основанием пирамиды служит параллелограмм, диагонали которого пересекаются под углом α. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей параллелограмма и равна H. Неравные боковые ребра образуют с плоскостью основания углы β и γ. Найдите объем пирамиды.
23. В основании конуса хорда длиной a стягивает дугу 2α. Угол между образующей конуса и плоскостью основания равен φ. Найдите объем конуса и площадь его полной поверхности.
24. Через вершину конуса проведена плоскость под углом β к его основанию, пересекающая основание по хорде длиной a. Найдите площадь полученного сечения, если образующая

конуса наклонена к основанию под углом α.

25 В треугольной пирамиде все боковые ребра и две стороны основания равны a. Вычислите объем пирамиды, если угол между равными сторонами основания равен α.

26. В треугольной пирамиде плоские углы при вершине равны α, α и β. Боковое ребро, служащее общей стороной равных углов, перпендикулярно к плоскости основания и равно a. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

27. Высота правильной четырехугольной призмы равна H. Из одной вершины основания проведены в двух смежных боковых гранях две диагонали, угол между которыми равен α. Определите площадь боковой поверхности призмы.

28. Основанием прямой призмы служит ромб с острым углом α. Угол между меньшей диагональю ромба и меньшей диагональю призмы равен β. Найдите объем призмы, если сумма длин диагоналей ромба равна m.

29. Через вершину правильной четырехугольной пирамиды под углом β к плоскости основания проведена плоскость, параллельная стороне основания и пересекающая основание. Найдите площадь сечения, если сторона основания равна a, а плоский угол при вершине пирамиды равен α.

30. Через сторону основания правильной треугольной пирамиды проведена плоскость перпендикулярно противоположному боковому ребру. Найдите площадь сечения, если высота исходной пирамиды равна H и образует с боковым ребром угол α.

31. В правильной треугольной призме угол между диагональю боковой грани и плоскостью другой боковой грани равен α. Найдите площадь боковой поверхности призмы, если ребро основания равно a.

32. Диагонали осевого сечения цилиндра пересекаются под углом α, обращенным к основанию. Объем цилиндра равен V. Найдите высоту цилиндра.

33. Основанием пирамиды служит равнобедренный треуголь-

ник, у которого боковая сторона равна a, а угол при вершине равен α. Все боковые ребра наклонены к основанию под одинаковыми углами β. Найдите объем пирамиды.

34. В конусе через его вершину и хорду основания проведено сечение. Длина хорды равна a, меньшая дуга, стягиваемая этой хордой, равна α. Определите полную поверхность конуса, если угол между образующими сечения равен β.
35. В конус вписан цилиндр, высота которого равна радиусу основания конуса. Найдите величину угла между осью конуса и его образующей, зная, что площадь полной поверхности цилиндра относится к площади основания конуса как 3:2.
36. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с гипотенузой c и острым углом α. Все боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом β. Найдите объем пирамиды.
37. В основании пирамиды лежит равнобочная трапеция, в которой боковые стороны и меньшее основание равны a, а острый угол α. Найдите объем пирамиды, если все боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом φ.
38. Высота конуса равна H, угол между образующей и высотой равен α. В этот конус вписан другой конус, вершина которого совпадает с центром основания первого конуса, а соответствующие образующие конусов взаимно перпендикулярны. Найдите объем вписанного конуса.
39. В конус вписан шар, площадь поверхности которого равна площади основания конуса. Найдите косинус угла при вершине в осевом сечении конуса.
40. Через диагональ нижнего основания правильной четырехугольной призмы и противоположную вершину верхнего основания призмы проведена плоскость. Угол между равными сторонами сечения равен α. Найдите отношение высоты призмы к стороне основания.
41. Найдите синус угла между образующей и высотой конуса, если боковая поверхность конуса есть среднее геометричес-

кое площади основания и полной поверхности.

42. Через сторону нижнего основания куба проведена плоскость, пересекающая верхнее основание и делящая объем куба в отношении $m:n$, считая от нижнего основания. Найдите тангенс угла между этой плоскостью и плоскостью основания куба.
43. Плоскость P, проведенная через образующую цилиндра, составляет с плоскостью осевого сечения, содержащего ту же образующую, острый угол α. Диагональ прямоугольника, полученного в сечении цилиндра плоскостью P, равна l и образует угол β с плоскостью основания. Найдите объем цилиндра.
44. Основания двух конусов, имеющих общую вершину, лежат в одной плоскости. Разность их объемов равна V. Найдите объем меньшего конуса, если касательные к окружности меньшего основания, проведенные из точки окружности большего основания, образуют угол α.
45. Высота правильной треугольной призмы равна H. Плоскость, проведенная через среднюю линию нижнего основания и параллельную ей сторону верхнего основания, составляет с плоскостью нижнего основания острый угол α. Найдите площадь сечения, образованного этой плоскостью.
46. Основанием прямой призмы служит равнобедренный треугольник, у которого каждая из равных сторон имеет длину a и угол между ними равен α. Найдите объем призмы, если площадь ее боковой поверхности равна S.
47. Все боковые ребра треугольной пирамиды составляют с плоскостью основания один и тот же угол, равный одному из острых углов прямоугольного треугольника, лежащего в основании пирамиды. Найдите этот угол, если гипотенуза основания равна c, а объем пирамиды равен V.
48. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник, радиусы описанной и вписанной окружностей которого равны соответственно R и r. Найдите объем пирамиды, если ее высота равна H.

49. Углы между диагональю прямоугольного параллелепипеда и сторонами его оснований равны α и β. Найдите объем параллелепипеда, если диагонали его оснований равны l.
50. В основании пирамиды лежит правильный треугольник, который вписан в нижнее основание цилиндра с радиусом R. Вершина пирамиды принадлежит окружности верхнего основания цилиндра. Одно из боковых ребер служит высотой цилиндра, а два других ребра образуют между собой угол α. Найдите объем пирамиды.
51. Образующая конуса равна l и составляет с плоскостью основания угол α. Найдите ребро равновеликой правильной треугольной призмы, если высота призмы равна стороне ее основания.
52. В треугольной пирамиде все грани – правильные треугольники. Через сторону основания проведена плоскость, делящая объем пирамиды в отношении 1:3, считая от основания. Найдите угол между этой плоскостью и плоскостью основания.
53. Двугранный угол между двумя смежными боковыми гранями правильной четырехугольной пирамиды равен α. Высота пирамиды равна H. Найдите радиус описанного шара.

4.2 Алгебраические преобразования

Упростить выражения:

1. $\left(\frac{b}{a^2+ab}-\frac{2}{a+b}+\frac{a}{b^2+ab}\right):\left(\frac{b}{a}-2+\frac{a}{b}\right)$.
2. $\left(\frac{1}{a-3b}-\frac{1}{a+3b}+\frac{6b}{a^2-9b^2}\right):\frac{2ab+b^2}{a^2-9b^2}$.
3. $\left(m+n-\frac{4mn}{m+n}\right):\left(\frac{m}{m+n}-\frac{n}{n-m}-\frac{2mn}{m^2-n^2}\right)$.
4. $\left(\frac{1}{2+2\sqrt{a}}+\frac{1}{2-2\sqrt{a}}-\frac{a^2+1}{1-a^2}\right)\left(1+\frac{1}{a}\right)$.

5. $\left(\dfrac{\sqrt{a}+2}{a+2\sqrt{a}+1}-\dfrac{\sqrt{a}-2}{a-1}\right)\dfrac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}}$.

6. $\dfrac{2}{a}-\left(\dfrac{a+1}{a^3-1}-\dfrac{1}{a^2+a+1}-\dfrac{2}{1-a}\right):\dfrac{a^3+a^2+2a}{a^3-1}$

7. $\left(\sqrt{x}+\dfrac{y-\sqrt{xy}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right):\left(\dfrac{x}{\sqrt{xy}+y}+\dfrac{y}{\sqrt{xy}-x}-\dfrac{x+y}{\sqrt{xy}}\right)$.

8. $\dfrac{x-1}{x^2+2x+1}-\dfrac{x+1}{x^2-2x+1}-\dfrac{1}{x^2-1}$, если $x=\sqrt[4]{(a-1)^2}$.

4.3 Алгебраические уравнения и неравенства

Решите уравнения:

1. $\dfrac{2}{x-1}+x=\dfrac{x+1}{x-1}$.
2. $\dfrac{x^2+3}{x+3}=2$.
3. $\dfrac{2x-3}{x-1}+1=\dfrac{6x-x^2-6}{x-1}$.
4. $\dfrac{2x+1}{x}+\dfrac{4x}{2x+1}=5$.
5. $\dfrac{1}{x(x+2)}-\dfrac{1}{(x+1)^2}=\dfrac{1}{12}$.
6. $(x^2-6x)^2-2(x-3)^2=81$.
7. $\dfrac{6}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{8}{(x-1)(x+4)}=1$.
8. $7\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-2\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)=9$.
9. $|2x-5|=x-1$.
10. $|2x-4|+|1-x|=1$.
11. $|2x+1|=|x-1|+2$.

Решите неравенства:

12. $(2x+3)^2(3x-5)^3(x+1)(x+3)<0$.
13. $\dfrac{(x-1)(2x+4)}{3x+2}\geqslant 0$.
14. $\dfrac{3x^2-10x+3}{x^2-10x+25}>0$.
15. $\dfrac{4-x}{x-5}>\dfrac{1}{1-x}$.
16. $\dfrac{1}{x}<\dfrac{2}{x-2}$.
17. $\dfrac{1-2x-3x^2}{3x-x^2-5}>0$.
18. $\dfrac{1}{x^2-5x+6}\geqslant\dfrac{1}{2}$.
19. $1+\dfrac{2}{x+1}>\dfrac{2}{x}$.
20. $|x-5|\leqslant 3$.
21. $|2x+1|>2$.
22. $|x-1|\geqslant 2x-1$.
23. $|x-3|<|x|+2$.
24. $|x-2|\geqslant x^2$.

Найдите область определения функций:

25. $y=\sqrt{x^2-x}+\dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}$.

26. $y=\sqrt{7x-14}-\sqrt{x^2-15x+56}$.

27. $y=\sqrt{x^2+9x+14}+\dfrac{1}{\sqrt{6-5x-x^2}}$.

28. $y=\sqrt{x^2-|x|}+\sqrt{25-x^2}$.

4.4 Иррациональные уравнения и неравенства

Решите уравнения:

1. $\sqrt{2x-4}-\sqrt{x+5}=1$.
2. $\sqrt{6-x-x^2}=x+1$.
3. $x^2+4-5\sqrt{x^2-2}=0$.
4. $\sqrt{x^3+8}+\sqrt[4]{x^3+8}=6$.
5. $x^2+\sqrt{x^2+20}=22$.
6. $\sqrt{x+5}+\sqrt{2x-7}=2\sqrt{x}$.
7. $\sqrt[4]{x-4}+\dfrac{x-4}{\sqrt{x-4}}=12$.
8. $5\cdot\sqrt[15]{x^{22}}+\sqrt[15]{x^{14}\cdot\sqrt{x}}-22\cdot\sqrt[15]{x^7}=0$.
9. $\sqrt{x+2}-\sqrt{2x-3}=\sqrt{4x-7}$.
10. $\sqrt{x+\sqrt{x+11}}+\sqrt{x-\sqrt{x+11}}=4$.

Решите неравенства:

11. $\sqrt{x+1}>\sqrt{3-x}$.
12. $\sqrt{\dfrac{x-2}{1-2x}}>-1$.
13. $\sqrt{2x-x^2}<5-x$
14. $\sqrt{x^2-x-12}<x$.
15. $\sqrt{x^2-3x+2}>x+3$.
16. $\sqrt{x^2+5x-6}>x+1$.

Найдите область определения функции:

17. $y=\dfrac{x-3}{\sqrt{x-\sqrt{3x+10}}}$.
18. $y=\dfrac{\sqrt{\sqrt{x^2-4x}-x+3}}{x+2}$.

4.5 Показательные уравнения и неравенства

Решите уравнения:

1. $\left(\frac{3}{7}\right)^{3x-7}=\left(\frac{7}{3}\right)^{7x-3}$.
2. $(0{,}5)^{x^2}\cdot 2^{2x+2}=64^{-1}$.
3. $25^x=6\cdot5^x-5$.
4. $3\cdot5^{2x-1}-2\cdot5^{x-1}=0{,}2$.

5. $5^x - 5^{3-x} = 20$.

6. $2^x - 2 = 15\cdot 2^{\frac{x-3}{2}}$.

7. $\dfrac{2^x + 10}{4} = \dfrac{9}{2^{x-2}}$.

8. $(\sqrt[5]{3})^{x+5} + (\sqrt[10]{3})^{x-5} = 84$.

9. $4^x + 6^x = \dfrac{15}{4}\cdot 9^x$.

10. $3^{2x+4} + 45\cdot 6^x - 9\cdot 2^{2x+2} = 0$.

11. $7\cdot 4^{x^2} - 9\cdot 14^{x^2} + 2\cdot 49^{x^2} = 0$.

12. $4^{x-1} + 4^x + 4^{x+1} = 84$.

13. $4^x + 8^{\frac{2(x-2)}{3}} - 2^{2(x-1)} = 52$.

14. $4^x + 2^{2x-1} = 3^{x-0,5} + 3^{x+0,5}$.

15. $3\cdot 4^x + \frac{1}{3}\cdot 9^{x+2} = 6\cdot 4^{x+1} - \frac{1}{2}\cdot 9^{x+1}$.

16. $9^x - 2^{x+0,5} = 2^{x+3,5} - 3^{2x-1}$.

17. $7^{|2x-4|} = 49^{1-3x}$.

18. $|3^x - 3| + 3^{2x} - 3 = 0$.

Решите неравенства:

19. $2^{x^2-x} > 2^{x+3}$.

20. $(1/3)^{x^2-5x+8} < 1/9$.

21. $9^x - 8\cdot 3^x \leqslant 9$.

22. $5^{2\sqrt{x}} + 5 < 5^{\sqrt{x}+1} + 5^{\sqrt{x}}$.

23. $2^{2x+1} - 21\cdot(0,5)^{2x+3} + 2 \geqslant 0$.

24. $4^{0,5-x} - 7\cdot 2^{-x} - 4 < 0$.

4.6 Логарифмические уравнения и неравенства

Решите уравнения:

1. $\log_3(5x-2) - 2\log_3\sqrt{3x-1} = 1 - \log_3 4$.
2. $(x+1)\lg\sqrt[3]{3^{5x-2}} = \lg 9$.
3. $\log_5\sqrt{y-7} - \log_5 10 + \log_5\sqrt{2y+3} = 0$.
4. $2x - \lg(5^{2x} + 4x - 16) = \lg 4^x$.
5. $\lg(2^{x+1} + 3) = (x-1)(\lg 5 - 1)$.
6. $\log_2 182 - 2\log_2\sqrt{4-x} = \log_2(10-x) + 1$.
7. $\dfrac{\lg(\sqrt{2x+5}+1)}{\lg\sqrt[5]{x-4}} = 5$.
8. $2\lg 2 + (1 + \frac{1}{2x})\lg 3 - \lg(\sqrt[x]{3} + 27) = 0$.
9. $\log_2(2-x) - \log_2(2-\sqrt{x}) = \log_2\sqrt{2-x} - \frac{1}{2}$.
10. $0,5\log_3(-x-16) - \log_3(\sqrt{-x} - 4) = 1$.
11. $9^{\log_{25} x^2} + \log_{\sqrt{2}} 2\sqrt{2} = \frac{1}{2}(9^{\log_{25} x+1} - 9^{\log_{25} x})$.
12. $\dfrac{1}{5+\lg x} + \dfrac{2}{1-\lg x} = 1$.
13. $3\sqrt{\lg x} + 2\lg\dfrac{1}{\sqrt{x}} = 2$.
14. $3\lg x^2 - \lg^2(-x) = 9$.
15. $\lg^4(x-1)^2 + \lg^2(x-1)^3 = 25$.

16. $\log_3 x \log_9 x \log_{27} x \log_{81} x = \dfrac{2}{3}$.

17. $1 + \log_2(x-1) = \log_{x-1} 4$. 18. $\log_x 9 + \log_{x^2} 729 = 10$.

19. $\log_{3x}(\frac{3}{x}) + \log_3^2 x = 1$. 20. $x^{\lg x + 7} = 10^{4(\lg x + 1)}$.

21. $x^{\lg^3 x - 5\lg x} = 0{,}0001$. 22. $27^{\log_{27} x} = x^{\frac{10}{3}}$.

23. $x^{\log_3 x} = 9$. 24. $3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} = 162$.

25. $2 - 6^{\frac{1}{2} + \log_6 \sin x} = 2^{\frac{1}{2} + \log_2 \cos x}$.

26. При каких a уравнение

$$\left((\log_{\sqrt{11}}(2\lg a - x))\log_x \sqrt{11} + 1\right)\log_{\sqrt{11}} x = 2$$

имеет решение? Найдите решение при $a = 10^6$.

Решите неравенства:

27. $\log_{0,5}(x^2 - 5x + 6) > -1$. 28. $\log_5(x^2 - 2x - 3) > 1$.

29. $\log_x \dfrac{1-2x}{x} \leqslant 0$. 30. $\dfrac{\log_3(x+2)}{\log_2(x-3)} < 0$.

31. Решите систему неравенств $\begin{cases} \log_{0,5}^2 x + \log_{0,5} x - 2 \leqslant 0, \\ \dfrac{(x-2)(5-x)}{(x+1)^2} > 0. \end{cases}$

Найдите область определения функции:

32. $y = \sqrt{\log_{0,3}\left(\dfrac{x-1}{x+5}\right)}$. 33. $y = \sqrt{\lg(x^2 - 7x + 13)}$.

34. $y = \sqrt{\lg(0{,}25(5x - x^2))} + \sqrt{\lg(|x| - 1)}$.

35. Для всех допустимых значений параметра a найдите решение $\log_a(x-2) + \log_a x < 1$.

4.7 Тригонометрия

Найдите область определения функций и упростите выражения:

1. $\dfrac{1 + \sin 2x}{(\sin x + \cos x)^2}$. 2. $4\cos^4 x - 2\cos 2x - 0{,}5\cos 4x$.

3. $\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos^4\alpha - \sin^4\alpha} - \left(\dfrac{1 - 0{,}5\sin^2 2\alpha}{\cos^4\alpha + \sin^4\alpha}\right)^{-1}$

4. $\sqrt{\dfrac{2}{1+\sin\alpha} + \dfrac{2}{1-\sin\alpha}}$.

5. $3(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha) - 2(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha)$.

Вычислите:

6. $\cos(2x + \frac{7\pi}{4})$, если $\operatorname{ctg} x = \frac{2}{3}$.

7. $\sin 4\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$.

8. $\operatorname{tg}(\alpha - \frac{\pi}{4})$, если $\cos\alpha = -\frac{9}{41}$; $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

9. $\cos\frac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha = -\frac{12}{13}$; $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

10. $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = -\frac{3}{4}$.

11. $\sin(2\alpha + \frac{5\pi}{4})$, если $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}6$.

12. $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ и $\cos^3\alpha - \sin^3\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha = 4$.

Решите уравнения:

13. $2\cos^2 x + 5\sin x = 4$. 14. $\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + \frac{3}{2} = 0$.

15. $\sin^2 x - \cos^2 x = \cos x$. 16. $3\cos x + 5\sin\frac{x}{2} + 1 = 0$.

17. $\cos^4 x - \sin^4 x = \frac{1}{2}$. 18. $\cos 2x - 5\sin x = 3$.

19. $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin 2x - 0{,}5$. 20. $\sin^2 2x + \sin^2 x = \frac{3}{2}$.

21. $1 - \cos(\pi - x) + \sin(\frac{\pi + x}{2}) = 0$.

22. $5\sin^2 x - 3\sin x\cos x - 2\cos^2 x = 0$.

23. $8\sin 2x - 3\cos^2 x = 4$.

24. $4\cos^2\frac{x}{2} + 0{,}5\sin x + 3\sin^2\frac{x}{2} = 3$.

25. $10\sin^2 x + 3\sin 2x = 2(1 + \cos 2x)$.

26. $\cos(2x + \frac{3\pi}{2}) - 2\cos^2(3\pi - x) = \cos(4\pi - 2x)$.

27. $\sin x + \sqrt{3}\cos x = \frac{1}{\sin x}$. 28. $1 + \cos x = \operatorname{ctg}\frac{x}{2}$.

29. $\operatorname{tg} x + \frac{\cos x}{1 + \sin x} = 2$. 30. $4\operatorname{tg}^2 3x - \frac{1}{\cos^2 3x} = 2$.

31. $\sin x(1 + \cos x) = 1 + \cos x + \cos^2 x$.

32. $(\sin x + \cos x)^2 = \cos 2x$.

33. $5(1 + \cos x) = 2 + \sin^4 x - \cos^4 x$.

34. $\frac{1 + \cos 2x}{2\cos x} = \frac{2\sin 2x}{1 - \cos 2x}$.

35. $\cos^2 x + 3\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x = 1$.

36. $(1 + \cos 4x)\sin 2x = \cos^2 2x$.

37. $\sin 2x = \cos^4 \frac{x}{2} - \sin^4 \frac{x}{2}$. 38. $1 + \sin x + \cos x + \operatorname{tg} x = 0$.

39. $\dfrac{\sin^2 2x - 4\sin^2 x}{\sin^2 2x + 4\sin^2 x - 4} = 2\operatorname{tg}^2 x - 1$.

40. $7 + 4\sin x\cos x + 1{,}5(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x) = 0$.

41. $\dfrac{3}{\cos^2 x} - \dfrac{3}{\sin^2 x} = 8$.

42. $\operatorname{ctg}(\frac{3\pi}{2} + x) - \operatorname{tg}^2 x = (\cos 2x - 1)\cos^{-2} x$.

43. $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 1$. 44. $4\sin x + \cos x = 4$.

45. $\sin x - \sin^2 x = \cos^2 x - \cos x$. 46. $3\sin 5x - 2\cos 5x = 3$.

47. $\sin x\cos 2x + \cos x\cos 4x = \sin(\frac{\pi}{4} + 2x)\sin(\frac{\pi}{4} - 3x)$.

48. $8\cos x\cos(60^\circ - x)\cos(60^\circ + x) + 1 = 0$.

49. $\sin x\sin 3x = \frac{1}{2}$. 50. $\sin x\sin 3x + \sin 4x\sin 8x = 0$.

51. $2\cos^2 x + \cos 5x = 1$. 52. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 3x$.

53. $\sin x + \sin 3x = \sin 2x$. 54. $8\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 1 = \dfrac{1}{\cos x}$.

55. $\sin^3 x + \cos^3 x = 1 - 0{,}5\sin 2x$. 56. $\operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} x = 8\cos^2 x$.

57. $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x = 3$.

58. $\sqrt{3}\sin x - \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x\sin x = \sqrt{3}$.

59. $2\cos x\sin 3x = \sin 4x + 1$.

60. $2\cos 4x - 2\cos 2x = 4\cos^2 x - 1$.

61. $\left(1 + \sin(\frac{\pi}{2} - 4x)\right)\sin 4x = \cos^2(2x - \pi)$.

62. $0{,}5\sin 2x = \cos 2x - \sin^2 x + 1$.

63. $\cos x + \sin x = \dfrac{\cos 2x}{1 - \sin 2x}$. 64. $\sin 9x = 2\sin 3x$.

65. $1 - \cos 2x - 2\operatorname{tg} 1 \cdot \sin x + \sin(\pi + x) + \operatorname{tg} 1 = 0$.

66. $(x-2)^2|\cos x| = \cos x$.

Найдите решения уравнений, удовлетворяющие неравенству:

67. $1 - 5\sin x + 2\cos^2 x = 0$, $\cos x \geqslant 0$.

68. $2 - \sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x = 4\cos^2 3x$, $\cos(2x - \frac{\pi}{4}) > 0$.

Решите неравенство:

69. $\sqrt{5 - 2\sin x} \leqslant 6\operatorname{tg} x \cdot \cos x - 1$.

4.8 Прогрессии

1. Сумма трех чисел, образующих арифметическую прогрессию, равна 2, а сумма квадратов этих же чисел равна $\frac{14}{9}$. Найдите эти числа.
2. Сколько надо взять членов арифметической прогрессии 5, 9, 13, ..., чтобы получить сумму, равную 119?
3. В арифметической прогрессии 20 членов. Сумма членов, стоящих на четных местах, равна 250, а на нечетных 220. Найдите прогрессию.
4. Найдите четыре числа, составляющих геометрическую прогрессию, в которой сумма крайних членов равна -49, а сумма средних равна 14.
5. Три числа образуют возрастающую геометрическую прогрессию. Их произведение равно 64, а среднее арифметическое равно $\frac{14}{3}$. Найдите эти числа.
6. Найдите три последовательных члена геометрической прогрессии, если их сумма равна 62, а сумма их десятичных логарифмов равна 3.
7. Сумма всех членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 12, а сумма трех первых членов равна 10,5. Найдите прогрессию.
8. Сумма всех членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 2, разность первого и второго членов равна $\frac{2}{9}$. Найдите прогрессию.
9. В бесконечно убывающей геометрической прогрессии, первый член которой равен 4, сумма всех членов равна $\frac{1}{8}$ суммы квадратов всех членов. Найдите прогрессию.
10. В геометрической прогрессии, все члены которой положительны, второй член равен 12, а четвертый 108. На какое натуральное число нужно разделить сумму первых четырех членов этой прогрессии, чтобы в частном получилось число, меньшее делителя на 5 единиц, а остаток от деления был бы равен частному?

Решите уравнения:

11. $\lg x + \lg^3 x + \lg^5 x + \ldots = \frac{2}{3}$. 12. $x^2 + x^3 + x^4 + \ldots = \frac{1}{2}$.

13. $x^2 + \frac{x^2}{1+x^2} + \frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \ldots = 2$.

14. $5^2 \cdot 5^4 \cdot 5^6 \cdot \ldots \cdot 5^{2x} = 0{,}04^{-28}$.

15. $1 - 2x + 4x^2 - 8x^3 + \ldots = \frac{2}{3}$.

4.9 Векторная алгебра

1. Даны точки $M_1(3,8,1)$ и $M_2(-1,2,-3)$. Найдите длину вектора $\overline{M_1M_2}$ и косинусы углов, которые образуют этот вектор с осями координат.
2. Даны векторы $\overline{a} = 3\overline{i} - 5\overline{j} + 8\overline{k}$ и $\overline{b} = -\overline{i} + \overline{j} - 4\overline{k}$. Найдите длины векторов $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$ и $\overline{d} = \overline{a} - \overline{b}$.
3. Даны точки $A(2,-1,3)$, $B(1,1,1)$ и $C(0,0,5)$. Найдите угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$.
4. Найдите угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a} = 2\overline{i} + \overline{j}$ и $\overline{b} = -2\overline{j} + \overline{k}$.
5. Даны точки $A(2,4,0)$, $B(1,-2,3)$ и $C(m,5,-2)$, где m — неизвестная абсцисса точки C. Найдите m, если известно, что вектор $\overline{AB}$ перпендикулярен вектору $\overline{AC}$.
6. Найдите вектор $\overline{a}$, сонаправленный с вектором $\overline{b}$, если $|\overline{a}| = 100$, $\overline{b} = (12,-16,-15)$.
7. Найдите вектор $\overline{a}$, параллельный вектору $\overline{b} = (3,6,6)$ и удовлетворяющий условию $\overline{a} \cdot \overline{b} = 27$.
8. При каком значении параметра m векторы $(\overline{a}+\overline{b})$ и $\overline{c}$ параллельны, если $\overline{a} = (-1,2,1)$, $\overline{b} = (5,4,m)$, $\overline{c} = (2,3,-1)$?
9. Найдите вектор $\overline{b}$, если он перпендикулярен векторам $\overline{a} = (-2,-1,1)$ и $\overline{d} = (3,5,-2)$, а скалярное произведение $\overline{b} \cdot \overline{c} = 3$, где $\overline{c} = (1,-1,2)$.

4.10 Производная и ее применение

1. Найдите производную функции $y = \cos^2(x+1)$ в точке $x = 0$.
2. Найдите производную функции $y = e^{\sin x} + e^{\cos x}$ в точке $x = \frac{\pi}{4}$.
3. Запишите уравнения касательных к графику функции $y = x^2 - 5x + 6$ в точках пересечения этого графика с осью абсцисс.
4. Найдите уравнение касательной к гиперболе $y = 1 - \frac{3}{x}$ в точке пересечения ее с осью Ox.
5. Запишите уравнения касательных к кривой $y = e^{1-x^2}$ в точках пересечения этой кривой с прямой $y = 1$.
6. На параболе $y = x^2 - 7x + 3$ найдите точку, в которой касательная параллельна прямой $5x + y = 3$. Запишите уравнение касательной в этой точке.
7. В каких точках касательная к графику функции $y = \frac{x+2}{x-2}$ образует с осью Ox угол в $135°$?
8. Найдите площадь треугольника, образованного координатными осями и касательной к кривой $y = \sqrt{x^2 - 5}$ в точке $M(3; 2)$.
9. Зависимость пути от времени при прямолинейном движении тела задается формулой $S = \sqrt{t}$. Найдите ускорение в конце 4-й секунды.

Исследуйте на экстремум функции:

10. $y = x^3 - 3x^2 + 2$. 11. $y = x + \frac{1}{x}$. 12. $y = x \ln x$.
13. $y = x^3 - 3x^2 - 24x + 7$.

Найдите интервалы возрастания и убывания функций:

14. $y = \frac{2x-1}{2-2x}$. 15. $y = x(1 + \sqrt{x})$.
16. $y = 2x(x^2 - 3x - 6) + 7$. 17. $y = x - \ln x$.

Найдите наибольшее и наименьшее значения функций на отрезке:

18. $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 10$; $x \in [-1; 3]$.

19. $y = \dfrac{1}{\cos x}$; $x \in [0; \frac{\pi}{3}]$.   20. $y = x^4 - 8x^2 + 1$; $x \in [0; 3]$.

21. $y = x^2 + \dfrac{128}{x}$; $x \in [1; 6]$.   22. $y = \sin x + \cos x$; $x \in [0; 2\pi]$.

4.11 Графики функций

Постройте графики функций:

1. а) $y = |x^2 + x|$;   б) $y = |x^2 - 8x + 7|$.
2. а) $y = x^2 - 4|x| + 3$;   б) $y = x^2 - |x| + 6$.
3. а) $y = |x^2 - 3|x| + 2|$;   б) $y = (3 - x) \cdot |x + 1|$.
4. а) $y = x + |x - 3|$;   б) $y = x - |x + 4|$.
5. а) $y = \dfrac{x+1}{x-1}$;   б) $y = \dfrac{x+2}{3-x}$.
6. а) $y = 2^{|x|}$;   б) $y = 3^{-|x|}$.
7. а) $y = |\lg x|$;   б) $y = |\log_{1/2} x|$.
8. а) $y = \lg |x|$;   б) $y = \lg x^2$.
9. а) $y = \log_2(1 - x)$;   б) $y = \log_2(2 - x)^2$.
10. а) $y = |\sin x|$;   б) $y = |\operatorname{tg} x|$.
11. а) $y = \cos |x|$;   б) $y = \operatorname{ctg} |x|$.
12. а) $y = 3 \sin 2(x - \frac{\pi}{6})$;   б) $y = \frac{3}{2} \cos(\frac{x}{2} + \frac{2\pi}{3})$.

5 ОТВЕТЫ

ПРИМЕРЫ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ ВАРИАНТОВ

Вариант 1

1. $V = \dfrac{4\pi Q\sqrt{Q}\sqrt{(3\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-1)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}}{9\sqrt{3}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}$.

2. $x=1$; $y=1$. **3.** $\frac{\pi}{2}+\pi k$; $\frac{\pi n}{5}$.

4. $x\in(-1;3)$. **5.** $b_1=18$; $q=-\frac{1}{3}$; $S_5=10$.

Вариант 2

1. $S_{\text{сеч}} = \left(\dfrac{3V}{\pi\sin\beta(\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\cos^2\beta)}\right)^{\frac{2}{3}}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

2. $x=1$; $y=-1$. **3.** πk; $\frac{\pi}{18}+\frac{\pi m}{9}$; $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$.

4. $x\in(-5;1)$. **5.** $S=50$; $b_1=40$; $q=\frac{1}{5}$.

Вариант 3

1. $V_2=\frac{3\sqrt{3}}{16}l^3\cos^3\varphi\sin\varphi$. **2.** $x=37$. **3.** $x\in(-1;+\infty)$.

4. $x=1$; $x=\frac{125}{\sqrt{2}}$. **5.** $\frac{\pi}{2}+\pi k$; $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$; $-\frac{\pi}{4}+\pi m$.

Вариант 4

1. $V=\frac{b^3}{4}\cos^2\beta\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\alpha\sin\beta$. **2.** $x=3^6=729$.

3. $x\in(-\infty;1)\cup(1;3)$. **4.** $x=1$; $x=\frac{\sqrt{3}}{8}$.

5. $\frac{\pi}{2}+\pi k$; $\frac{\pi}{4}+\pi n$.

Вариант 5

1. $S=\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt[3]{\frac{12V^2\operatorname{ctg}^2\alpha}{\pi^2}}\,\frac{\cos\alpha+2\sin\alpha+1}{\cos\alpha}$.

2. $(-1)^n\arcsin\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)+\pi n$. **3.** $x\in(-\infty;-9]\cup[-2+\sqrt{5};\infty)$.

4. $x=-\frac{13}{5}=-2{,}6;\quad x=3$. **5.** $9,\ -\frac{9}{2},\ \frac{9}{4},\ -\frac{9}{8},\ \frac{9}{16}$.

Вариант 6

1. $S=\frac{3\sqrt{3}}{4}\sqrt[3]{\frac{V^2\operatorname{ctg}^2\alpha}{\pi^2}}\sqrt{1+4\operatorname{tg}^2\alpha}$.

2. $\pm\arccos\left(\frac{\sqrt{41}-3}{8}\right)+2\pi n$. **3.** $x\in(-\infty;1]\cup\left[\frac{5+\sqrt{5}}{2};+\infty\right)$.

4. $x=-\frac{14}{3};\quad x=1;\quad x=2$. **5.** $-2,\ \frac{1}{3},\ \frac{8}{3}$.

Вариант 7

1. $S=\frac{\pi m^2}{(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)^2\cos\alpha};\quad V=\frac{\pi m^3(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta)}{3(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)^3}$.

2. $x=-0{,}75$. **3.** $x\in(-2;-1)\cup(-1;+\infty)$.

4. $x=9,\ y=3;\quad x=\frac{1}{27},\ y=729$. **5.** $\frac{\pi k}{4};\quad\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}$.

Вариант 8

1. $V=\frac{\pi H^3}{3(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)^2};\quad l=\frac{2\pi H}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}$. **2.** $x=-2{,}91$.

3. $x\in(2;3)\cup(3;+\infty)$. **4.** $x=4,\quad y=16$.

5. $\frac{\pi}{10}+\frac{\pi k}{5};\quad\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$.

Вариант 9

1. $S=\frac{4\sqrt{3}H^2\sin\alpha}{9\cos^2\alpha}$. **2.** $x\in[\frac{3}{5};1)$. **3.** $x=1$.

4. $\frac{3\pi}{16}+\frac{\pi k}{4};\quad\pi n$. **5.** $a_1=6;\quad d=4$.

Вариант 10

1. $S=\frac{H^2\sin\beta}{8\cos^2\beta}$. **2.** $x\in(-1;+\infty)$. **3.** $x=\frac{1}{3};\quad x=9$.

4. $\frac{\pi}{20}+\frac{\pi k}{5};\quad\pi n$. **5.** $a_1=2;\quad d=6;\quad S_8=184$.

Вариант 11

1. $x=\frac{\sqrt[4]{3}\sqrt{Q\cos\alpha(1+3\cos^2\alpha)}}{6\cos\alpha}$. **2.** $x=-2;\quad x=0$.

3. $\frac{\pi}{2}+\pi k;\ \frac{5\pi}{12}+2\pi n;\ \frac{13\pi}{12}+2\pi n$. **4.** $x=2{,}25$. **5.** $x\in[0,1]$.

Вариант 12

1. $x=\frac{\sqrt{3}}{12}\sqrt[3]{12V\operatorname{ctg}\alpha}\sqrt{4\operatorname{tg}^2\alpha+1}$. **2.** $x=4;\quad x=0$.

3. πk; $-\frac{\pi}{12}+2\pi n$; $-\frac{5\pi}{12}+2\pi n$. 4. $x\in[-1;0]$.

5. $x\in\left(\frac{-1-\sqrt{13}}{2};\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right)$.

Вариант 13

1. $V=\frac{Q\sqrt{Q}}{3\pi\sqrt{\pi}}\sin 2\alpha\cos\beta\sqrt{\sin\beta}$.

2. $x\in[-5;-\frac{4\pi}{3})\cup(-\frac{4\pi}{3};-3)\cup(3;\frac{7\pi}{3})\cup(\frac{7\pi}{3};8]$.

3. $x\in(-\infty;\log_2(\sqrt{2}-1)]\cup[\frac{1}{2};+\infty)$. 4. 311.

5. $x\in\{-3\}\cup[-2;6)$. 6. $\frac{\pi}{3}+4\pi k$.

Вариант 14

1. $S=\pi\sqrt[3]{9V^2\operatorname{tg}^2\alpha}\,(1+\frac{1}{\sin\alpha})$.

2. $x\in[-12;-\frac{10\pi}{3})\cup(-\frac{10\pi}{3};-6)\cup(-1;\frac{2\pi}{3})\cup(\frac{2\pi}{3};\frac{10\pi}{3})\cup(\frac{10\pi}{3};12]$.

3. $x\in(\log_3(2-\frac{\sqrt{33}}{3});1)$. 4. 7. 5. $x\in\{-6\}\cup[-5;10)$.

6. $\frac{5\pi}{4}+4\pi k$; $(-1)^n\frac{\pi}{3}+2\pi n$.

Вариант 15

1. $l=\frac{V}{a^2\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\beta}}$. 2. $\frac{\pi}{2}+\pi k$; $\frac{\pi n}{5}$.

3. $x=-3$; $x\geqslant -1$. 4. $x=\sqrt{6}$; $x\in(-\frac{7}{3};+\infty)$.

5. $x_\circ=2$; $2k\leqslant x\leqslant 1+2k,\ k\in Z,\ k\geqslant 1$;
$-1+2n\leqslant x\leqslant 2n,\ n\in Z,\ n\leqslant 1$. 6. $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{3}{2}$.

Вариант 16

1. $V=\frac{1}{2}a^2b\sqrt{\sin^2\alpha-\cos^2\beta}$; $\gamma=\arccos\sqrt{\cos^2\alpha+\cos^2\beta}$.

2. πk; $\frac{\pi}{18}+\frac{\pi m}{9}$; $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$.

3. $x=-5$; $x\geqslant -4$. 4. $x=\sqrt{2}$; $x\in(-1;+\infty)$.

5. $x_\circ=-1$; $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$; $-\frac{1}{2}+2k\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}+2k,\ k\geqslant 1$;
$\frac{1}{2}+2n\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}+2n,\ n\leqslant -1$ $k,n\in Z$.

6. $x=5$, $y=1$.

Геометрические задачи

1. $S=\pi h^2\sin\alpha(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta)(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\frac{1}{\sin\alpha})$.

2. $V=\dfrac{d^3\operatorname{tg}\beta}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$. 3. $V=d^3\sin\alpha\sin\beta\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}$.

4. $S=\dfrac{24Q\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}\sqrt{1-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$. 5. $a=\sqrt[3]{\dfrac{8V\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{6\cos\alpha-3}}}$.

6. $V=\dfrac{\pi c^3\sin^2\alpha\sin^2\beta}{3\sin^2(\alpha+\beta)}$. 7. $V=\dfrac{\pi a^3\sqrt{\cos\alpha}}{12\sin\frac{\alpha}{2}}$;

$S=\dfrac{\pi a^2(\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}+1)}{2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}}$. 8. $S=\dfrac{a^2\sqrt{3\operatorname{tg}^2\alpha-1}}{8}$.

9. $l\sin\alpha$; $\frac{\sqrt{2}}{2}l\sqrt{1+\sin^2\alpha}$; $\operatorname{tg}\beta=\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha$.

10. $V=\frac{4}{3}b^3\sin^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}$. 11. $a=\sqrt[3]{24V\operatorname{tg}\alpha}$.

12. $V=\dfrac{b^3\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\beta}}{\sin\beta}$.

13. $V=\dfrac{l^3\sin^2\alpha\sqrt{\sin^2\beta-\sin^2\alpha}}{3\sin\beta\cdot\operatorname{tg}\beta}$. 14. $S=a^2\sin^3\alpha$.

15. $S=\dfrac{\sqrt{3}\,d^2}{3\sin^2\alpha}\left(\dfrac{1}{\cos\alpha}+1\right)$. 16. $V=\frac{1}{8}(p^2-4d^2\sin^2\alpha)d\cos\alpha$.

17. $V=\dfrac{a^3\operatorname{tg}^2\alpha\cos\alpha}{8(1+\cos\alpha)}$. 18. $V=\dfrac{3\sqrt{3}}{8}d^3\sin^2\alpha\cos\alpha$.

19. $S=\dfrac{\pi d^2(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha\cos^2\alpha}$. 20. $V=\dfrac{\pi m^3\sin^2\alpha\cos\alpha}{3(1+\cos\alpha)^3}$.

21. $S=\dfrac{R^2\operatorname{tg}\alpha\sqrt{1-\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\beta}}{\cos\beta}$. 22. $V=\frac{2}{3}H^3\sin\alpha\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma$.

23. $V=\dfrac{\pi a^3\operatorname{tg}\varphi}{24\sin^3\alpha}$; $S=\dfrac{\pi a^2\cos^2\frac{\varphi}{2}}{2\sin^2\alpha\cos\varphi}$.

24. $S=\dfrac{a^2\operatorname{tg}\alpha}{4\cos\beta\sqrt{\operatorname{tg}^2\beta-\operatorname{tg}^2\alpha}}$. 25. $V=\dfrac{a^3}{6}\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{4\cos^2\frac{\alpha}{2}-1}$.

26. $S=\dfrac{a^2(\sin 2\alpha+\sin\beta)}{2\cos^2\alpha}$. 27. $S=\dfrac{4\sqrt{2}\,H^2\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\cos\alpha}}$.

28. $V=\dfrac{m^3\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta}{2(1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2})^3}$. 29. $S=\dfrac{a^2\sqrt{\cos\alpha}}{4\sin\beta\sin\frac{\alpha}{2}}$.

30. $S=\frac{3\sqrt{3}}{4}H^2\operatorname{tg}\alpha\sin\alpha$. **31.** $S=\frac{3}{2}a^2\sqrt{3\operatorname{ctg}^2\alpha-1}$.

32. $H=\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}}$. **33.** $V=\frac{1}{6}a^3\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\beta$.

34. $S=\dfrac{\pi a^2\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}\right)}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}$. **35.** $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.

36. $V=\frac{c^3}{12}\sin\alpha\cos\alpha\operatorname{tg}\beta$. **37.** $V=\frac{2}{3}a^3\cos^3\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\varphi$.

38. $V=\frac{1}{3}\pi H^3\sin^4\alpha\cos^2\alpha$. **39.** $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{3}{4}$; $\cos\alpha=\frac{7}{25}$.

40. $\frac{H}{a}=\dfrac{\sqrt{\cos\alpha}}{\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}}$. **41.** $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

42. $\operatorname{tg}\alpha=\frac{m+n}{2n}$. **43.** $V=\dfrac{\pi l^3\cos^2\beta\sin\beta}{4\cos^2\alpha}$.

44. $V_1=V\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$. **45.** $S=\dfrac{\sqrt{3}\,H^2\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$.

46. $V=\dfrac{Sa\sin\alpha}{4(1+\sin\frac{\alpha}{2})}$. **47.** $\sin\alpha=\sqrt{\frac{12V}{c^3}}$.

48. $V=\frac{1}{3}rH(r+2R)$. **49.** $V=\dfrac{l^3\cos\alpha\cos\beta\sqrt{\sin^2\alpha-\cos^2\beta}}{\sqrt{(\cos^2\alpha+\cos^2\beta)^3}}$.

50. $V=\frac{3}{4}R^3\operatorname{tg}\alpha$. **51.** $a=\sqrt[3]{\dfrac{4\pi l^3\cos^2\alpha\sin\alpha}{3\sqrt{3}}}$.

52. $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{2}}{5}$. **53.** $R=\frac{1}{2}H\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$.

Алгебраические преобразования

1. $\frac{1}{a+b}$. **2.** $\frac{12}{2a+b}$. **3.** $m-n$.

4. 1. **5.** $\frac{2}{a-1}$. **6.** 0. **7.** $\sqrt{y}-\sqrt{x}$.

8. $\frac{6-7a}{(a-2)^2}$ при $a\geqslant 1$; $\frac{7a-8}{a^2}$ при $a<1$.

Алгебраические уравнения и неравенства

1. $\emptyset$. **2.** $-1;3$. **3.** 2. **4.** $-1;\frac{1}{2}$. **5.** $1;-3$.

6. $3;3\pm2\sqrt{5}$. **7.** $0;-3;\frac{-3\pm\sqrt{73}}{2}$. **8.** $2;0{,}5$.

9. $2; 4$. **10.** 2. **11.** $-4; \frac{2}{3}$. **12.** $(-\infty; -3) \cup (-1; \frac{5}{3})$.
13. $[-2; -\frac{2}{3}) \cup [1; +\infty)$. **14.** $(-\infty; \frac{1}{3}) \cup (2; 3) \cup (5; +\infty)$.
15. $(1; 3) \cup (3; 5)$. **16.** $(-2; 0) \cup (2; +\infty)$.
17. $(-\infty; -1] \cup (\frac{1}{3}; +\infty)$. **18.** $[1; 2) \cup (3; 4]$.
19. $(-\infty; -2) \cup (-1; 0) \cup (1; +\infty)$. **20.** $[2; 8]$.
21. $(-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; +\infty)$. **22.** $(-\infty; \frac{2}{3}]$. **23.** $(0{,}5; +\infty)$.
24. $[-2; 1]$. **25.** $(-3; 0] \cup [1; 3)$. **26.** $[2; 7] \cup [8; +\infty)$.
27. $[-2; 1]$. **28.** $[-5; -1] \cup \{0\} \cup [1; 5]$.

Иррациональные уравнения и неравенства

1. 20. **2.** 1. **3.** $\pm\sqrt{6}; \pm\sqrt{11}$. **4.** 2. **5.** ± 4.
6. 4. **7.** 85. **8.** $0; 4$. **9.** 2. **10.** 5.
11. $(1; 3]$. **12.** $(0{,}5; 2]$. **13.** $[0; 2]$. **14.** $[4; +\infty)$.
15. $(-\infty; -\frac{7}{9})$. **16.** $(-\infty; -6] \cup (\frac{7}{3}; +\infty)$. **17.** $(5; +\infty)$.
18. $(-\infty; -2) \cup (-2; 0] \cup [4{,}5; +\infty)$.

Показательные уравнения и неравенства

1. 1. **2.** $4; -2$. **3.** $0; 1$. **4.** 0. **5.** 2. **6.** 5.
7. 3. **8.** 15. **9.** -1. **10.** -2. **11.** $\pm 1; 0$.
12. 2. **13.** 3. **14.** $\frac{3}{2}$. **15.** $-\frac{1}{2}$. **16.** $\frac{3}{2}$.
17. $-\frac{1}{2}$. **18.** 0. **19.** $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.
20. $(-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$. **21.** $(-\infty; 2]$. **22.** $(0; 1)$.
23. $x \geqslant 0{,}5 \log_2 0{,}75$. **24.** $(-2; +\infty)$.

Логарифмические уравнения и неравенства

1. $\frac{5}{11}$. **2.** $1; -\frac{8}{5}$. **3.** 11. **4.** 4. **5.** -1.
6. -3. **7.** 10. **8.** $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}$. **9.** $0; \frac{16}{9}$. **10.** -25.
11. $1; 5$. **12.** $10^{-2}; 10^{-3}$. **13.** $10; 10^4$. **14.** -1000.
15. $1{,}1; 11$. **16.** $9; \frac{1}{9}$. **17.** $3; \frac{5}{4}$. **18.** $\sqrt{3}$.
19. $\frac{1}{9}; 1; 3$. **20.** $10; 10^{-4}$. **21.** $10^{\pm 1}; 10^{\pm 2}$.
22. $3; 27^3$. **23.** $3^{\pm\sqrt{2}}$. **24.** $\frac{1}{9}; 9$. **25.** $\frac{\pi}{12} \pm 2\pi k$.
26. $a \geqslant 10^{\sqrt{11}}; 11$. **27.** $(1; 2) \cup (3; 4)$.

28. $(-\infty; 3) \cup (4; +\infty)$. **29.** $(0; \frac{1}{3}]$. **30.** $(3; 4)$.
31. $(2; 4]$. **32.** $(1; +\infty)$. **33.** $(-\infty; 3] \cup [4; +\infty)$.
34. $[2; 4]$. **35.** $x > 1 + \sqrt{1+a}$ при $0 < a < 1$;
$2 < x < 1 + \sqrt{1+a}$ при $a > 1$.

Тригонометрия

1. $1;\ x \neq -\frac{\pi}{4} + \pi n$. **2.** $\frac{3}{2};\ x \in R$. **3.** $0;\ x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$.
4. $\frac{2}{|\cos x|};\ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$. **5.** $1;\ x \in R$. **6.** $\frac{7\sqrt{2}}{26}$.
7. $\frac{24}{25}$. **8.** $\frac{31}{49}$. **9.** $\frac{-2}{\sqrt{13}}$. **10.** $-\frac{24}{25};\ -\frac{24}{7}$.
11. $\frac{-23\sqrt{2}}{34}$. **12.** $\frac{15}{17};\ \frac{\pm 63}{17\sqrt{17}}$. **13.** $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$.
14. $\operatorname{arctg}(-2) + \pi k;\ \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi n$. **15.** $\pi + 2\pi k;\ \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$.
16. $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{3} + 2\pi k$. **17.** $\pm\frac{\pi}{6} + \pi k$. **18.** $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k$.
19. $\frac{\pi}{4} + \pi k$. **20.** $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2};\ \pm\frac{\pi}{3} + \pi n$.
21. $\pi + 2\pi k;\ \pm\frac{4\pi}{3} + 4\pi n$. **22.** $\frac{\pi}{4} + \pi k;\ \operatorname{arctg}(-0{,}4) + \pi n$.
23. $\operatorname{arctg} 0{,}5 + \pi k;\ \operatorname{arctg} 3{,}5 + \pi n$. **24.** $\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ \pi + 2\pi n$.
25. $-\frac{\pi}{4} + \pi k;\ \operatorname{arctg}\frac{2}{5} + \pi n$. **26.** $\frac{\pi}{4} + \pi k;\ -\operatorname{arctg} 3 + \pi n$.
27. $\frac{\pi}{2} + \pi k;\ \frac{\pi}{6} + \pi n$. **28.** $\pi + 2\pi k;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n$.
29. $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$. **30.** $\pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}$. **31.** $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$.
32. $\pi k;\ -\frac{\pi}{4} + \pi n$. **33.** $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$. **34.** $\emptyset$.
35. $\pi k;\ -\frac{\pi}{3} + \pi n$. **36.** $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2};\ (-1)^n\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$.
37. $\frac{\pi}{2} + \pi k;\ (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n$. **38.** $-\frac{\pi}{4} + \pi k;\ \pi + 2\pi n$.
39. $\pm\frac{\pi}{4} + \pi k$. **40.** $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$. **41.** $\pm\frac{\pi}{3} + \pi k$.
42. $\pi k;\ \frac{\pi}{4} + \pi n$. **43.** $2\pi k;\ \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$.
44. $\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ 2\operatorname{arctg}\frac{3}{5} + 2\pi n$. **45.** $2\pi k;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n$.
46. $\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{15};\ 0{,}4(\operatorname{arctg} 5 + \pi n)$. **47.** $-\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}$.
48. $\pm 40^\circ + 120^\circ k$. **49.** $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2};\ \pm\frac{\pi}{6} + \pi n$. **50.** $\frac{\pi k}{5};\ \frac{\pi n}{7}$

51. $\frac{\pi}{7}+\frac{2\pi k}{7};\ \frac{\pi}{3}+\frac{2\pi n}{3}$. 52. $\frac{\pi k}{3}$. 53. $\frac{\pi k}{2};\ \pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$.
54. $\pi+2\pi k;\ \pm\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+2\pi n$. 55. $\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ 2\pi n$.
56. $\frac{\pi}{2}+\pi k;\ (-1)^n\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{4}$. 57. $-\frac{\pi}{4}+\pi k;\ \pm\frac{\pi}{3}+\pi n$.
58. $\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ -\frac{\pi}{3}+\pi n$. 59. $\frac{\pi}{4}+\pi k$. 60. $\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$.
61. $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2};\ (-1)^n\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{4}$. 62. $\frac{\pi}{4}+\pi k;\ -\operatorname{arctg}2+\pi n$.
63. $2\pi k;\ -\frac{\pi}{4}+\pi n;\ -\frac{\pi}{2}+2\pi m$. 64. $\frac{\pi k}{3};\ \pm\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{3}$.
65. $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$. 66. $1;\ \frac{\pi}{2}+\pi k$. 67. $\frac{\pi}{6}+2\pi k$.
68. $\frac{5\pi}{48}+\pi k;\ \frac{17\pi}{48}+\pi n;\ \frac{7\pi}{24}+\pi m$.
69. $[\frac{\pi}{6}+2\pi k;\frac{\pi}{2}+2\pi k)\cup(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\frac{5\pi}{6}+2\pi n)$.

Прогрессии

1. $\{1;\frac{2}{3};\frac{1}{3}\};\ \{\frac{1}{3};\frac{2}{3};1\}$. 2. 7. 3. $a_1=-5;\ d=3$.
4. $\{b_1=7;\ q=-2\};\ \{b_1=-56;\ q=-\frac{1}{2}\}$. 5. $\{2;4;8\}$.
6. $\{2;10;50\},\ \{50;10;2\}$. 7. $b_1=6;\ q=\frac{1}{2}$.
8. $b_1=\frac{2}{3};\ q=\frac{2}{3}$. 9. $q=-\frac{1}{2}$. 10. 15. 11. $\sqrt{10}$.
12. $\frac{1}{2}$. 13. $-1;1$. 14. 7. 15. $\frac{1}{4}$.

Векторная алгебра

1. $\sqrt{68};\ -2/\sqrt{17};\ -3/\sqrt{17};\ -2/\sqrt{17}$. 2. 6; 14.
3. 135°. 4. 90°. 5. -10. 6. $(48;-64;-60)$.
7. $(1;2;2)$. 8. -3. 9. $(\frac{9}{16};\frac{3}{16};\frac{21}{16})$.

Производная и ее применение

1. $-\sin 2$. 2. 0. 3. $y=2-x;\ y=x-3$.
4. $3y=x-3$. 5. $y=2x+3;\ y=3-2x$.
6. $M(1;-3);\ y=2-5x$. 7. $M_1(0;-1);\ M_2(4;3)$.
8. $\frac{25}{12}$. 9. $-\frac{1}{32}$м/c^2. 10. $y_{\max}(0)=2;\ y_{\min}(2)=-2$.
11. $y_{\max}(-1)=-2;\ y_{\min}(1)=2$. 12. $y_{\min}(\frac{1}{e})=-\frac{1}{e}$.
13. $y_{\max}(-2)=35;\ y_{\min}(-4)=-73$.
14. Возрастает при $x\in(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.
15. Возрастает при $x\in[0;+\infty)$.

16. Возрастает при $x \in (-\infty; 1-\sqrt{3}) \cup (1+\sqrt{3}; +\infty)$;
убывает при $x \in (1-\sqrt{3}; 1+\sqrt{3})$.

17. Возрастает при $x \in (1; +\infty)$; убывает при $x \in (0; 1)$.

18. $\max\limits_{[-1;3]} y = y(-1) = 17$; $\min\limits_{[-1;3]} y = y(2) = -10$.

19. $\max\limits_{[0;\pi/3]} y = y(\frac{\pi}{3}) = 2$; $\min\limits_{[0;\pi/3]} y = y(0) = 1$.

20. $\max\limits_{[0;3]} y = y(3) = 10$; $\min\limits_{[0;3]} y = y(2) = -15$.

21. $\max\limits_{[1;6]} y = y(1) = 129$; $\min\limits_{[1;6]} y = y(4) = 48$.

22. $\max\limits_{[0;2\pi]} y = y(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$; $\min\limits_{[0;2\pi]} y = y(\frac{5\pi}{4}) = -\sqrt{2}$.

Учебное издание

МАТЕМАТИКА - 99

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И ВАРИАНТЫ ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНОВ В СГАУ

Составители: Горелов Георгий Николаевич
Ефимов Евгений Александрович

Редактор Н. С. Куприянова
Техн. редактор Г. А. Усачева
Корректор Н. С. Куприянова

Подписано в печать 9.12.98. Формат 60x84 1/16.
Бумага газетная. Печать офсетная.
Усл. п. л. 2,79. Усл. кр. отт.2,91. Уч.-изд.л. 3,0.
Тираж 1000 экз. Заказ 107. Арт. С-30/99.

Самарский государственный аэрокосмический университет
им. академика С.П.Королева.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

ИПО Самарского государственного
аэрокосмического университета
443001 Самара, ул. Молодогвардейская, 151.