МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКМ РФ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра дифференциальных уравнений и теории управления

Е.В. Щетинина

МЕТОДЫ ВОЗМУЩЕНИЙ И РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Методические указания

Самара
Издательство «Универс групп»
2010

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Самарского государственного университета

УДК 517.9
ББК 22.161.6

Рецензент

доктор физико–математических наук, профессор О.П. Филатов

Щетинина, Е.В.

Методы возмущений и решение обыкновенных дифференциальных уравнений : методические указания / Е.В. Щетинина. – Самара : Изд-во «Универс групп», 2010. – 31 с.

В методических указаниях к спецкурсу «Методы возмущений» содержатся лекции по асимптотическим методам и их применению для качественного исследования дифференциальных уравнений. Цель этого курса – изложить основные понятия и методы асимптотического анализа, теории возмущений, как регулярных, так и сингулярных; проиллюстрировать основные методы на содержательных примерах, показать возможные сферы применения и дальнейшего обобщения. Предназначено для студентов механико-математических факультетов университетов по направлениям «математика» и «прикладная математика», может быть полезно аспирантам и специалистам в области математического моделирования и прикладной математики.

УДК 517.9
ББК 22.161.6

Оглавление

Введение

Системы обыкновенных дифференциальных уравнений с возмущениями используются для моделирования процессов различной природы. Они привлекают внимание большого количества исследователей. Любая математическая модель является приближенной, не адекватной полностью тому процессу, который она описывает. Конечно, при составлении математической модели стремятся к тому, чтобы она отражала все наиболее существенные стороны процесса. Однако, с другой стороны, математическая модель должна быть достаточно простой для исследования, должна давать возможность извлечь из нее доступными средствами необходимую информацию о процессе. Поэтому теория методов возмущений получила широкое применение в современной прикладной науке. С ее помощью исследователи отвечают на вопросы о влиянии различных факторов на течение процесса, об устойчивости полученных решений, о близости процессов, описываемых полученными решениями, и реальным исследуемым объектам.

Данное учебное пособие посвящено важному классу дифференциальных уравнений – уравнениям с возмущениями. Описаны некоторые методы приближенного решения таких уравнений, рассмотрено большое количество содержательных примеров, предложены задания для самостоятельной работы.

Глава 1
Основные понятия теории возмущений

1.1 Регулярные и сингулярные возмущения

Математика изучает процессы, происходящие в реальном мире, с помощью математических моделей этих процессов. Любая математическая модель является приближенной, не адекватной полностью тому процессу, который она описывает. Конечно, при составлении математической модели стремятся к тому, чтобы она отражала все наиболее существенные стороны процесса. Однако, с другой стороны, математическая модель должна быть достаточно простой для исследования, должна давать возможность извлечь из нее доступными средствами необходимую информацию о процессе. Поэтому какие-то факторы, влияние которых на процесс представляется малым, неизбежно приходиться не учитывать, и они оказываются не представленными в математической модели.

Естественно поставить вопрос о роли этих неучтенных факторов. Чтобы ответить на этот вопрос, нужно составить более сложную (расширенную) модель, учитывающую те малые факторы, которые в первоначальной (упрощенной) модели не были представлены, и затем исследовать вопрос о близости решений, полученных из упрощенной и расширенной модели.

Учет малых факторов приводит, как правило, к тому, что в расширенной модели по сравнению с первоначальной появляются дополнительные члены с малым параметром множителями, которые и характеризуют малость этих факторов. Указанные малые множители называют *малыми параметрами.* Члены уравнения, содержащие малые параметры, называют *возмущение*, исходное уравнение, не содержащее этих членов, — *невозмущенным* (или вырожденным), а расширенное уравнение (расширенная модель) – *возмущенным* уравнением или уравнением с возмущениями.

Возмущения, встречающиеся в различных задачах, можно условно разделить на два класса: *регулярные возмущения* и *сингулярные возмущения*. Дадим формальное определение. Рассмотрим два уравнения

$$(A_0): \qquad L_0 u = f_0;$$

$$(A_\varepsilon): \qquad L_0 u + \varepsilon L_1 u = f_0 + \varepsilon f_1.$$

Здесь L_0 и L_1 – заданные операторы, f_0 и f_1 – заданные функции, ε – малый числовой параметр (в дальнейшем будем считать, если не оговорено особо, что $\varepsilon > 0$), u – искомая функция от x (x может быть как одномерной, так и многомерной переменной). Уравнение (A_0) можно трактовать как упрощенную модель некоторого процесса, а уравнение (A_ε) – как расширенную модель. Члены $\varepsilon L_1 u$ и εf_1 представляют собой возмущение. Если уравнения (A_0) и (A_ε) являются дифференциальными, то добавим также начальные или граничные условия, которые могут содержать малый параметр. Пусть эти уравнения (в совокупности с начальными или граничными условиями) рассматриваются в области D, т.е. $u = u(x)$, $x \in D$. Решение задачи (A_0) обозначим через $u_0(x)$ а задачи (A_ε) – через $u_\varepsilon(x)$.

Основной вопрос теории возмущений состоит в следующем: будет ли разность $u_\varepsilon(x) - u_0(x)$ стремиться в нулю при $\varepsilon \to 0$? В определенной степени вопрос зависит от выбора нормы. В дальнейшем под нормой вектора $u(x) = \mathrm{col}(u_1(x), \ldots, u_n(x))$ в каждой точке x будем понимать евклидову норму $\|u(x)\| = \sqrt{u_1^2(x) + \ldots + u_n^2(x)}$, в частности, если $u(x)$ – скалярная функция, то $\|u(x)\| = |u(x)|$.

Сформулируем определения регулярно возмущенной и сингулярно возмущенной задачи.

Определение 1.1 *Задача (A_ε) называется регулярно возмущенной, если*

$$\sup_{x \in D} \|u_\varepsilon(x) - u_0(x)\| \to 0 \quad \varepsilon \to 0.$$

В противном случае задача (A_ε) называется сингулярно возмущенной.

Из определения следует, что в случае регулярно возмущенной задачи решение $u_0(x)$ задачи (A_0) при малых ε будет близко к решению $u_\varepsilon(x)$ задачи (A_ε) во всей области D (равномерно по x). Если же задача (A_ε) — сингулярно возмущенная, то $u_0(x)$ при малых ε не будет близко к решению $u_\varepsilon(x)$ по крайнем мере в какой-то части области D.

Проиллюстрируем введенное определение на примерах.

Пример 1.2

Рассмотри уравнение

$$(A_\varepsilon): \quad x^2 - (4-\varepsilon)x + (3+2\varepsilon) = 0.$$

Это квадратное уравнение. Решения этого уравнения можно найти с помощью формул определения корней квадратного уравнения:

$$x_1 = 2 - \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\sqrt{4 - 16\varepsilon + \varepsilon^2}, \quad x_2 = 2 - \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{1}{2}\sqrt{4 - 16\varepsilon + \varepsilon^2}.$$

Соответствующая задача (A_0) имеет вид

$$(A_0): \quad x^2 - 4x + 3 = 0,$$

корни которой равны

$$x_1 = 3, \qquad x_2 = 1.$$

Нетрудно убедиться, что решения возмущенной задачи (A_ε) стремятся к решению невозмущенной задачи при $\varepsilon \to 0$. Значит, согласно определению, задача (A_ε) является регулярно возмущенной.

Пример 1.3

Рассмотри уравнение

$$(A_\varepsilon): \quad \varepsilon x^2 + x + 1 = 0.$$

Это квадратное уравнение. Решения этого уравнения можно найти с помощью формул определения корней квадратного уравнения:

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon}, \qquad x_2 = \frac{-1-\sqrt{1-4\varepsilon}}{2\varepsilon}.$$

Соответствующая задача (A_0) имеет вид

$$(A_0): \quad x + 1 = 0.$$

Невозмущенное уравнение является алгебраическим уравнением первого порядка. Таким образом, возмущенная задача (A_ε) и невозмущенная задача (A_0) являются задачами разных типов. Уравнение (A_0) имеет единственный корень $x = -1$. Нетрудно убедиться, что решения возмущенной задачи (A_ε) не стремятся к решению невозмущенной задачи при $\varepsilon \to 0$. Значит, согласно определению, задача (A_ε) является сингулярно возмущенной.

Пример 1.4

Рассмотрим задачу Коши для скалярного дифференциального уравнения

$$(A_\varepsilon): \frac{du}{dx} = -u + \varepsilon x, \quad 0 \le x \le 1, \quad u(0) = 1.$$

Решение этой задачи элементарно определяется в явном виде

$$u_\varepsilon(x) = (1+\varepsilon)e^{-x} + \varepsilon(x-1).$$

Соответствующая задача (A_0) имеет вид

$$(A_0): \quad \frac{du}{dx} = -u, \quad 0 \le x \le 1, \quad u(0) = 1.$$

Отсюда

$$u_0(x) = e^{-x}.$$

Следовательно, при $\varepsilon \to 0$

$$\sup_{x\in[0,1]} \|u_\varepsilon(x) - u_0(x)\| = \varepsilon \max_{x\in[0,1]} \left(e^{-1} + x - 1\right) = \varepsilon e^{-1} \to 0,$$

и, значит, согласно определению, задача (A_ε) является регулярно возмущенной.

Пример 1.5

Рассмотрим задачу Коши

$$(A_\varepsilon): \quad \varepsilon\frac{du}{dx} = -u + x, \quad 0 \le x \le 1, \quad u(0) = 1.$$

Решение имеет вид

$$u_\varepsilon(x) = (1+\varepsilon)e^{-x/\varepsilon} + x - \varepsilon.$$

Уравнение (A_0), получающееся из (A_ε) при $\varepsilon = 0$, является в данном случае не дифференциальным, а алгебраическим:

$$(A_0): \quad 0 = -u + x,$$

и поэтому начального или дополнительного условия для решения задавать не нужно. Имеем

$$u_0(x) = x,$$

и, следовательно,

$$\sup_{x\in[0,1]} \|u_\varepsilon(x) - u_0(x)\| = \max_{x\in[0,1]} \left|(1+\varepsilon)e^{-x/\varepsilon} - \varepsilon\right| = 1.$$

Таким образом, $\sup_{x\in[0,1]} \|u_\varepsilon(x) - u_0(x)\|$ не стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$, а значит, согласно определению, задача (A_ε) является сингулярно возмущенной.

1.2 Асимптотические последовательности и асимптотические ряды. Сравнение сходящихся и асимптотических рядов

Введем понятия асимптотической последовательности.

Определение 1.6 *Последовательность*

$$\delta_0(\varepsilon), \delta_1(\varepsilon), \delta_2(\varepsilon), \ldots$$

называется асимптотической, если выполняется соотношение

$$\delta_n(\varepsilon) = o(\delta_{n-1}(\varepsilon))$$

при $\varepsilon \to 0$.

Простейшими примерами асимптотических последовательностей являются:

$$1,\, \varepsilon,\, \varepsilon^2,\, \varepsilon^3,\, \ldots,$$

$$1,\, \sin\varepsilon,\, \sin\varepsilon^2,\, \sin\varepsilon^3,\, \ldots,$$

$$1,\, \varepsilon^{\frac{1}{2}},\, \varepsilon,\, \varepsilon^{\frac{3}{2}},\, \ldots,$$

$$1, (\log\varepsilon)^{-1}, (\log\varepsilon)^{-2}, (\log\varepsilon)^{-3}, \ldots.$$

Очевидно, что количество асимптотических последовательностей неограничено.

Введем понятие асимптотического разложения. Рассмотрим сумму $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\delta_n(\varepsilon)$, где a_n не зависит от ε , а $\delta_n(\varepsilon)$ есть асимптотическая последовательность.

Определение 1.7 *Сумма*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)\delta_n(\varepsilon)$$

называется асимптотическим разложением функции $u(x,\varepsilon)$, *если выполняется соотношение*

$$u(x,\varepsilon) = \sum_{n=0}^{N} a_n(x)\delta_n(\varepsilon) + O(\delta_{N+1}(\varepsilon)), \qquad \varepsilon \to 0.$$

В этом случае мы пишем

$$u(x,\varepsilon) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)\delta_n(\varepsilon).$$

Очевидно, что асимптотический ряд является частным случаем асимптотической последовательности. Из того факта, что количество асимптотических последовательностей неограничено, следует, что и некоторое асимптотическое разложение функции не является единственным. В большинстве случаев, если не оговаривается особо, мы будем определять и исследовать асимптотические разложения по асимптотической последовательности

$$1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \ldots .$$

В этом случае говорят, что мы исследуем ряд по степеням ε.

Обратим внимание на важный момент: асимптотический ряд может и не сходиться к функции u и даже может быть расходящимся. Приведем пример асимптотического ряда, который расходится.

Пример 1.8

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\varepsilon\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x^2} - \frac{1}{x}. \tag{1.1}$$

Будем искать его решение в виде асимптотического ряда по степеням ε:

$$y(x,\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n y_n(x).$$

Подставляя этот ряд в уравнение (1.1), получим

$$\varepsilon\left(y_0' + \varepsilon y_1' + \cdots\right) = -\frac{1}{x^2}\left(y_0 + \varepsilon y_1 + \cdots\right) - \frac{1}{x}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε в обеих частях равенства, приходим к уравнениям:

$$0 = -\frac{y_1}{x^2} - \frac{1}{x}, \quad y_0' = -\frac{y_1}{x^2}, \quad \ldots, \quad y_{n-1}' = -\frac{y_n}{x^2}, \quad \ldots,$$

откуда последовательно находим коэффициенты искомого ряда:

$$y_0 = -x,\ y_1 = x^2,\ y_2 = -(2!)x^3,\ y_n = (-1)^{n+1}(n!)x^{n+1}, \ldots.$$

Таким образом, мы построили ряд

$$Y(x,\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\varepsilon^n(n!)x^{n+1}, \tag{1.2}$$

который, очевидно, расходится при всех $\varepsilon > 0$ во всех точках x, кроме точки $x = 0$.

Покажем, что этот расходящийся ряд является асимптотических рядом для некоторого решения уравнения (1.1). Будем рассматривать уравнение (1.1) на промежутке $0 < x \leq a$. Общее решение уравнения имеет вид

$$y(x,\varepsilon;C) = Ce^{1/\varepsilon x} - \left(\int\limits_0^x \frac{1}{\varepsilon t}e^{-1/\varepsilon t}\,dt\right)e^{1/\varepsilon x}.$$

Здесь C - произвольная постоянная. Рассмотрим частное решение уравнения при $C = 0$:

$$y(x,\varepsilon;0) = -\left(\int\limits_0^x \frac{1}{\varepsilon t}e^{-1/\varepsilon t}\,dt\right)e^{1/\varepsilon x}.$$

Интегрируя трижды по частям, получим

$$y(x,\varepsilon;0)=\left(\int\limits_0^x \frac{1}{\varepsilon t}e^{-1/\varepsilon t}\,dt\right)e^{1/\varepsilon x}=$$

$$=-x+\left(\int\limits_0^x \varepsilon t^2\,d(e^{-1/\varepsilon t})\right)e^{1/\varepsilon x}=$$

$$=-x+\varepsilon x^2-\left(\int\limits_0^x 2\varepsilon t^2 e^{-1/\varepsilon t}\,dt\right)e^{1/\varepsilon x}=$$

$$=-x+\varepsilon x^2-2\varepsilon^2x^3+\varepsilon^2\left(\int\limits_0^x 6t^2e^{-1/\varepsilon t}\,dt\right)e^{1/\varepsilon x}.$$

Так как $e^{-1/\varepsilon t+1/\varepsilon x}\le 1$ при всех $0<t\le x$, то последнее слагаемое в полученном равенстве можно оценить:

$$\left|\varepsilon^2\left(\int\limits_0^x 6t^2e^{-1/\varepsilon t}\,dt\right)e^{1/\varepsilon x}\right|\le\varepsilon^2\int\limits_0^x 6t^2dt=2\varepsilon^2x^3\le 2\varepsilon^2a^3.$$

Таким образом,

$$y(x,\varepsilon;0)=-x+\varepsilon x^2+O(\varepsilon^2).$$

Продолжая интегрировать по частям, придем к равенству

$$y(x,\varepsilon;0)=\sum_{n=0}^{N}(-1)^{n+1}(n!)\varepsilon^n x^{n+1}+O(\varepsilon^{N+1}).$$

Это равенство показывает, что расходящийся ряд (1.2) является асимптотическим рядом при $\varepsilon\to 0$ для решения $y(x,\varepsilon;0)$ уравнения (1.1) на промежутке $0<x\le a$.

Глава 2

Решение дифференциальных уравнений

2.1 Регулярные возмущения

Рассмотрим начальную задачу

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y, \varepsilon), \qquad y(0, \varepsilon) = y^0. \tag{2.1}$$

При этом будем считать, что ε изменяется в некоторой окрестности значения $\varepsilon = 0$. При соответствующих условиях на правую часть (2.1) решение $y(t, \varepsilon)$ задачи (2.1) существует и является непрерывной функцией t и ε на множестве $t \in [0, T]$, $|\varepsilon| < c$ (Теорема о зависимости решения от начальных данных и параметров: см., например [4], Гл.2, теорема 2.10).

Доказанная теорема включает в себя следующую возможность построения приближенного решения задачи (2.1). Рассмотрим вырожденное уравнение, которое получается из (2.1), если в нем формально положить $\varepsilon = 0$:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y, 0), \qquad y(0, 0) = y^0. \tag{2.2}$$

Задача (2.2), вообще говоря, проще исходной задачи (2.1), и ее решение, которое обозначим через $\bar{y}(t)$, исследовать проще. Из теоремы о зависимости решения от начальных данных и параметров следует, что на некотором сегменте $[0, T]$

$$y(t, \varepsilon) = \bar{y}(t) + \delta(t, \varepsilon),$$

где $\delta(t, \varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Таким образом, $\bar{y}(t)$ служит для $y(t, \varepsilon)$ приближенным выражением, а $\delta(t, \varepsilon)$ есть погрешность этого приближения.

Можно получить для $y(t, \varepsilon)$ асимптотическую формулу с остаточным членом более высокого порядка малости, чем $O(\varepsilon)$, если функция $f(t,y,\varepsilon)$ из правой части (2.1) удовлетворяет условиям, обеспечивающим существование $n+1$ непрерывных производных по ε. Справедлива теорема.

Пусть в некоторой области D переменных t,y,ε функция $f(t,y,\varepsilon)$ обладает непрерывными и равномерно ограниченными частными производными по y и ε до порядка $n+1$ включительно. Тогда существует сегмент $[0,T]$, на котором для решения $y(t,\varepsilon)$ задачи (2.1) справедливо асимптотическое представление

$$y(t,\varepsilon) = \bar{y}(t) + \varepsilon y_1(t) + \varepsilon^2 y_2(t) + \ldots + \varepsilon^n y_n(t) + \delta_{n+1}(t,\varepsilon), \qquad (2.3)$$

где $\delta_{n+1}(t) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, $0 \le t \le T$, причем $\delta_{n+1}(t,\varepsilon) = O(\varepsilon^{n+1})$.

Чем меньше ε, тем лучше $\bar{y}(t)$ приближает $y(t,\varepsilon)$. Однако в реальных задачах ε является малой, но не бесконечно малой величиной. Поэтому асимптотическая формула не может обеспечить произвольную степень точности, и это является ее принципиальным недостатком. Тем не менее, асимптотические формулы очень удобны в тех случаях, когда требуется получить качественную картину решения.

Пример 2.1

Найти приближенное решение уравнения

$$\dot{y} = 4\varepsilon t - y^2, \qquad y(1) = 1. \qquad (2.4)$$

Будем искать решение в виде ряда по степеням ε

$$y(t,\varepsilon) = \bar{y}(t) + \varepsilon y_1(t) + \varepsilon^2 y_2(t) + \ldots . \qquad (2.5)$$

Подставим (2.5) в уравнение (2.4):

$$\frac{d}{dt}\left(\bar{y}(t) + \varepsilon y_1(t) + \varepsilon^2 y_2(t) + \ldots\right) =$$

$$= 4\varepsilon t - \left(\bar{y}(t) + \varepsilon y_1(t) + \varepsilon^2 y_2(t) + \ldots\right)^2,$$

$$\bar{y}(1) + \varepsilon y_1(1) + \varepsilon^2 y_2(1) + \ldots = 1.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε. При $\varepsilon = 0$ получаем

$$\frac{d}{dt}y = -\bar{y}^2, \qquad \bar{y}(1) = 1.$$

Решением этой начальной задачи является функция $\bar{y}(t) = \frac{1}{t}$. При ε в первой степени получаем уравнение

$$\frac{d}{dt}y_1 = 4t - 2\bar{y}y_1, \qquad y_1(1) = 0.$$

Подставляя найденную функцию $\bar{y}$, находим функцию y_1

$$y_1(t) = \frac{t^4 - 1}{t^2}.$$

Таким образом, получаем

$$y(t, \varepsilon) = \frac{1}{t} + \varepsilon \frac{t^4 - 1}{t^2} + O(\varepsilon^2).$$

Пример 2. С помощью метода малого параметра определить приближенные периодические решения уравнений с периодом, равным периоду правой части

$$\ddot{x} + 3x = 2\sin t + \varepsilon \dot{x}^2. \tag{2.6}$$

Будем искать решение в виде ряда по степеням ε

$$x(t, \varepsilon) = \bar{x}(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \ldots. \tag{2.7}$$

Подставим (2.7) в уравнение (2.6):

$$\frac{d^2}{dt^2}\bar{x}(t) + \varepsilon \frac{d^2}{dt^2}x_1(t) + \varepsilon^2 \frac{d^2}{dt^2}x_2(t) + \ldots +$$

$$+3(\bar{x}(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \ldots) =$$

$$= 2\sin t + \varepsilon(\frac{d}{dt}\bar{x}(t) + \varepsilon \frac{d}{dt}x_1(t) + \varepsilon^2 \frac{d}{dt}x_2(t) + \ldots)^2. \tag{2.8}$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε. При $\varepsilon = 0$ получаем

$$\frac{d^2}{dt^2}\bar{x}(t) + 3\bar{x}(t) = 2\sin t.$$

Решением этого уравнения является функция

$$x(t) = A\sin(\sqrt{3}t + \delta) + \sin t,$$

где A и δ — произвольные постоянные.

Учитывая условие, что решение должно иметь такой же период, что и правая часть уравнения, определяем неизвестные константы:

$$A = 0, \qquad \delta = 0.$$

Получаем, что

$$\bar{x}(t) = \sin t.$$

Подставляем найденную функцию $\bar{x}(t)$ в (2.8) и выписываем уравнение при ε в первой степени:

$$\ddot{x}_1(t) + 3x_1(t) = \cos^2 t.$$

Решением этого уравнения, удовлетворяющим граничному условию, является функция

$$x_1(t) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}\cos 2t.$$

Таким образом, приближенное решение, удовлетворяющее условию, что период решения равен периоду правой части, является функция

$$x(t) = \sin t + \varepsilon\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\cos 2t\right) + O(\varepsilon^2).$$

Упражнения.

I. Найти двучленные приближения решений уравнений

1. $y' = \frac{2}{y} - 5\varepsilon x, \qquad y(1) = 2;$
2. $xy' = \varepsilon x^2 + \ln y, \qquad y(1) = 1;$

3. $y' = \frac{6\varepsilon}{x} - y^2, \qquad y(1) = 1 + 3\varepsilon;$

4. $y' = e^{y-x} + \varepsilon y, \qquad y(0) = -\varepsilon.$

II. С помощью метода малого параметра определить приближенные периодические решения уравнений с периодом, равным периоду правой части

1. $\ddot{x} + 5x = \cos 2t + \varepsilon x^2;$

2. $\ddot{x} + 3x + x^3 = 2\varepsilon \cos t;$

3. $\ddot{x} + x^2 = 1 + \varepsilon \sin t.$

2.2 Сингулярные возмущения

В приложениях нередко встречаются случаи, когда малый параметр входит таким образом, что теория предыдущего параграфа неприменима.

Рассмотрим уравнение

$$\varepsilon \dot{y} = ay + b, \qquad a = \text{const}, b = \text{const},$$

с начальным условием $y(0,\varepsilon) = y_0$. Его точное решение имеет вид

$$y(t,\varepsilon) = (y_0 + \frac{b}{a})e^{at/\varepsilon} - \frac{b}{a}. \tag{2.9}$$

Полагая в уравнении $\varepsilon = 0$, получим (применяя обозначения предыдущего параграфа) $\bar{y}(t) = -b/a$. Анализируя (2.9), можно видеть, что близость y к $\bar{y}$ имеет место только при выполнении некоторых *специальных* условий, о которых не было речи в предыдущем параграфе. А именно, рассматривать решение начальной задачи вправо от $t = 0$, то $y \to \bar{y}$, если $a < 0$, а $\varepsilon \to +0$ (или $a > 0$, а $\varepsilon \to -0$). Если же $\varepsilon \to 0$ произвольным образом, то ни при каких a решение y предела не имеет и является неограниченным. Кроме того, даже если выполнены условия $a < 0$, а $\varepsilon \to +0$ (или $a > 0$, а $\varepsilon \to -0$), предельный переход имеет место для t, строго больших 0, так как при $t = 0$ $y(0,\varepsilon) = y^0$, а y^0, вообще говоря, не равно $-b/a$.

2.3 Теорема о предельном переходе

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y, z), \tag{2.10}$$

$$\varepsilon \frac{dz}{dt} = g(t, y, z), \tag{2.11}$$

с начальными условиями

$$y(0, \varepsilon) = y^0, \qquad z(0, \varepsilon) = z^0. \tag{2.12}$$

Относительно правых частей системы сделаем следующее предположение

(A $_1$) Правые части системы (2.10)-(2.11) будем предполагать непрерывными вместе с частными производными по y, z в некоторой области

$$H = \{(t, y) \in \bar{D} = \{0 \leq t \leq T, \|y\| \leq b\}, \|z\| < d\}.$$

Полагая в системе (2.10)-(2.11) формально $\varepsilon = 0$, получаем вырожденную систему

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y, z), \tag{2.13}$$

$$0 = g(t, y, z). \tag{2.14}$$

Порядок системы (2.13)–(2.14) ниже, чем порядок исходной системы. Чтобы определить решение этой системы, надо разрешить уравнение (2.14), которое не является дифференциальным, относительно z . В общем случае, это уравнение нелинейное, поэтому оно может иметь несколько решений. Очевидно, что корни второго уравнения порождающей системы необязательно удовлетворяют начальному условию для переменной z из (2.12). Мы будем предполагать, что все решения (корни) $z = \varphi(t, y)$ действительны и изолированы в $\bar{D}$. Надо выбрать один из корней уравнения $z = \varphi(t, y)$

и подставить его в уравнение (2.13). Вопрос заключается в том, какой из корней уравнения выбрать, чтобы обеспечить близость конструируемого нами решения вырожденной системы (2.13)–(2.14) к системы к решению задачи (2.10)–(2.11). Правило выбора корня будет сформулировано ниже.

(A_2) Будем предполагать, что функция $\varphi(t,y)$ непрерывна вместе с производной по y, $(t,y)\in\bar{D}$

Определение. *Корень* $z=\varphi(t,y)$ *будем называть устойчивым в области* $\bar{D}$, *если при* $(t,y)\in\bar{D}$ *выполняется неравенство*

$$\frac{\partial}{\partial z}g(t,y,\varphi(t,y))<0.$$

(A_3) Будем предполагать, что корень $z=\varphi(t,y)$ является устойчивым.

После подстановки $z=\varphi(t,y)$ в первое уравнение вырожденной системы получится дифференциальное уравнение относительно y со своим начальным условием. Получаем задачу

$$\frac{d\bar{y}}{dt}=f(t,\bar{y},z=\varphi(t,\bar{y})),\qquad \bar{y}(0)=y^0. \tag{2.15}$$

(A_4) Будем предполагать, что решение $\bar{y}(t)$ задачи (2.15) определено при $0\le t\le T$ и принадлежит области D.

(A_5) Будем предполагать, что начальное значение z^0 принадлежит области влияния корня $\varphi(0,y^0)$ уравнения $g(0,y^0,z^0)=0$.

Более подробно об области влияния можно прочитать, например, в [1].

Теорема 2.2 *При выполнении условий* A_1–A_5 *решение* $z(t,\varepsilon)$, $y(t,\varepsilon)$ *задачи (2.10)–(2.11) с начальными условиями (2.12) существует на* $[0,T]$ *и имеет место предельный переход*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}y(t,\varepsilon)=\bar{y}(t)\qquad \text{при}\quad 0\le t\le T, \tag{2.16}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} z(t,\varepsilon) = \varphi(t, \bar{y}(t)) = \bar{z}(t) \qquad \text{при} \qquad 0 < t \leq T. \tag{2.17}$$

Доказательство теоремы можно найти, например, в [4].

Замечание. Предельный переход (2.16) является равномерным на $[0,T]$, а предельный переход (2.17), справедливый на $(0,T]$ равномерным не является. В окрестности $t=0$ имеется область, в которой z-компонента решения задачи (2.10)–(2.11) с начальными условиями (2.12) сильно отличается от z-компоненты решения вырожденной задачи. Эта область называется *пограничным слоем.*

Пример 2.3

Найти корни порождающего уравнения, определить их устойчивость, найти области, в которых корни изолированы, определить зоны влияния устойчивых корней.

$$\begin{aligned} &\dot{y} = y + z, \\ &\varepsilon \dot{z} = z^2 - y^2, \\ &y(0,\varepsilon) = 1,\ z(0,\varepsilon) = 0,\ t \in (0,T]. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Рассмотрим вырожденную систему (при $\varepsilon = 0$)

$$\begin{aligned} &\dot{y} = y + z, \\ &0 = z^2 - y^2, \\ &y(0) = 1,\ z(0) = 0,\ t \in (0,T]. \end{aligned}$$

Второе уравнение системы имеет два корня $z = y$ и $z = -y$. Корни вырожденного уравнения не являются изолированными во всем фазовом пространстве.

Определим устойчивость корней:

$$\frac{\partial}{\partial z} g(t, y, \varphi(t,y)) = 2z = 2y \quad \text{при} \quad z = y,$$

$$\frac{\partial}{\partial z} g(t, y, \varphi(t,y)) = 2z = -2y \quad \text{при} \quad z = -y.$$

Корень $z = y$ является устойчивым при $y < 0$ и неустойчивым при $y > 0$. Корень $z = -y$ является устойчивым при $y > 0$ и неустойчивым при $y< 0$.

Нарисуем в фазовом пространстве (y, z) корни порождающего уравнения и обозначим начальную точку $y(0) = 1,\ \ z(0) = 0$. Начальное положение находится в области влияния устойчивого участка корня $z = -y$.

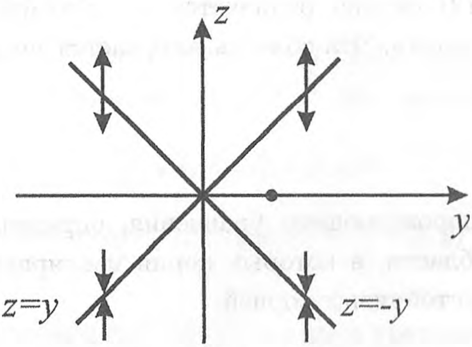

Рис. 1. Устойчивость корней вырожденного уравнения

Упражнения.

Найти корни порождающего уравнения, определить их устойчивость, найти области, в которых корни изолированы, определить зоны влияния устойчивых корней.

1. $\varepsilon y' = y^2 - 2y$;
2. $\varepsilon y' = xy - y^2$;
3. $\varepsilon y' = xy - y^3$;
4. $\varepsilon y' = 4y - y^3$.

2.4 Асимптотическое разложение решения задачи (2.10)–(2.12)

Будем искать решение задачи (2.10)–(2.11) с начальными условиями (2.12) в следующем виде:

$$x = \bar{x}(t, \varepsilon) + \Pi x(\tau, \varepsilon), \tag{2.19}$$

где

$$\bar{x}(t,\varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \ldots \tag{2.20}$$

— так называемый *регулярный ряд* (ср. (2.3)), т.е. ряд по степеням ε с коэффициентами, зависящими от t,

$$\Pi x(\tau,\varepsilon) = \Pi x_0(\tau) + \varepsilon \Pi x_1(\tau) + \varepsilon^2 \Pi x_2(\tau) + \ldots \tag{2.21}$$

— так называемый *пограничный ряд*, представляющий собой тоже ряд по степеням ε, но с коэффициентами, зависящими от τ, где $\tau = t/\varepsilon$. Члены этого ряда называют *пограничными членами.*

Подставим (2.19) в (2.10)–(2.11), умножив первое уравнение для симметрии на ε:

$$\varepsilon \frac{d\bar{y}}{dt} + \frac{d}{d\tau}\Pi y = \varepsilon f(t, \bar{y} + \Pi y, \bar{z} + \Pi z),$$

$$\varepsilon \frac{d\bar{z}}{dt} + \frac{d}{d\tau}\Pi z = g(t, \bar{y} + \Pi y, \bar{z} + \Pi z).$$

Введем величины $\bar{f}$ и Πf, полагая

$$\bar{f} = f(t, \bar{y}(t,\varepsilon), \bar{z}(t,\varepsilon)),$$

$$\Pi f = f\left(\varepsilon\tau, \bar{y}(\varepsilon\tau,\varepsilon) + \Pi y(\tau,\varepsilon), \bar{z}(\varepsilon\tau,\varepsilon) + \Pi z(\tau,\varepsilon)\right) - \\ - f\left(\varepsilon\tau, \bar{y}(\varepsilon\tau,\varepsilon), \bar{z}(\varepsilon\tau,\varepsilon)\right),$$

введем для g аналогичные величины $\bar{g}$ и Πg. Тогда систему можно переписать в виде

$$\varepsilon \frac{d\bar{y}}{dt} + \frac{d}{d\tau}\Pi y = \varepsilon\left(\bar{f} + \Pi f\right), \quad \varepsilon \frac{d\bar{z}}{dt} + \frac{d}{d\tau}\Pi z = \bar{g} + \Pi g. \tag{2.22}$$

Разложим теперь $\bar{f}$ и Πf формально по степеням ε. Коэффициенты этих разложений будут зависеть от t и τ соответственно:

$$\bar{f} = f_0 + \varepsilon f_1 + \varepsilon f_2 + \ldots, \qquad \Pi f = \Pi f_0 + \varepsilon \Pi f_1 + \varepsilon \Pi f_2 + \ldots.$$

Аналогичные разложения запишем для $\bar{g}$ и Πg. После этого в (2.22) приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε, причем отдельно зависящие от t и отдельно зависящие от τ:

$$\frac{d}{dt}y_k = f_k, \qquad \frac{d}{dt}z_{k-1} = g_k, \tag{2.23}$$

$$\frac{d}{d\tau}\Pi y_k = \Pi f_{k-1}, \qquad \frac{d}{dt}\Pi z_k = \Pi g_k. \tag{2.24}$$

Тем самым, мы получили уравнения для определения членов разложений (2.20) и (2.21).

Выпишем эти коэффициенты более детально для $k = 0$. Имеем :

$$\frac{d}{dt}y_0 = f(t, y_0, z_0), \qquad 0 = g_0 = g(t, y_0, z_0). \tag{2.25}$$

Эта система, как и следовало ожидать, совпадает с вырожденной системой (2.13)–(2.14). Имеем также (учитывая первое и второе уравнения (2.25)) :

$$\frac{d}{d\tau}\Pi y_0 = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\Pi z_0 = \Pi g_0 = g(0, y_0(0) + \Pi y_0, z_0(0) + \Pi z_0) - g(0, y_0(0), z_0(0)) \equiv$$
$$\equiv g(0, y_0(0) + \Pi y_0, z_0(0) + \Pi z_0). \tag{2.26}$$

Начиная с $k = 1$ уравнения (2.23) и (2.24) будут линейными относительно y_k, z_k и $\Pi y_k, \Pi z_k$.

Для того чтобы из полученных уравнений определить члены разложения (2.20) и (2.21), нужно задать начальные условия. Для этого подставим (2.19) в (2.12):

$$\bar{x}_0(0) + \varepsilon x_1(0) + \ldots + \Pi x_0(0) + \varepsilon \Pi x_1(0) + \ldots = x^0. \tag{2.27}$$

и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε в обеих частях равенства. При нулевой степени ε получаем

$$\bar{y}_0(0) + \Pi y_0(0) = y^0, \qquad \bar{z}_0(0) + \Pi z_0(0) = z^0. \tag{2.28}$$

Рассмотрим первое из этих равенств. Без каких-либо дополнительных соображений из него нельзя определить $\bar{y}_0(0)$ и $\Pi y_0(0)$. Наложим дополнительное условие на пограничные члены. Пограничные функции призваны играть роль поправок в окрестности $t = 0$. Потребуем, чтобы Πx стремились к нулю при $t > 0$, т.е. $\Pi x \to 0$ при $\tau \to \infty$. Отсюда получаем, что $\Pi y_0(0) = 0$, а иначе $\Pi y_0(\tau) \equiv \Pi y_0(0) \equiv \text{const} \not\to 0$. Тогда

$$\bar{y}_0(0) = y^0. \tag{2.29}$$

При этом условии решаем систему (2.25) и получаем, что $y_0(t)$, $z_0(t)$ совпадают с решением $\bar{y}(t)$, $\bar{z}(t)$, которые встречались в теореме 2.2. Из (2.25) получим $z_0(t) = \varphi(0, y_0(0)) = \varphi(0, y^0)$, тогда первое из равенств (2.28) лает начальное условие для Πz_0. Итак, начальные условия для системы (2.26) имеют вид

$$\Pi y_0(0) = 0, \qquad \Pi z_0(0) = z^0 - z_0(0) = z^0 - \varphi(0, y^0). \tag{2.30}$$

Поэтому $\Pi y_0(\tau) \equiv 0$, а $\Pi z_0(\tau)$ является решением следующей начальной задачи

$$\frac{d}{d\tau}\Pi z_0 = g(0, y^0, \varphi(0, y^0) + \Pi z_0), \quad \Pi z_0(0) = z^0 - \varphi(0, y^0). \tag{2.31}$$

Итак, нулевые члены разложения (2.20)–(2.21) полностью определены.

Приравнивая коэффициенты при первой степени ε, будем иметь

$$y_1(0) + \Pi y_1(0) = 0, \qquad z_1(0) + \Pi z_1(0) = 0. \tag{2.32}$$

Кроме того, нужно воспользоваться условием $\Pi y_1 \to 0$ при $\tau \to \infty$. Из первого уравнения (2.24) (при $k = 0$) имеем

$$\Pi y_1(\tau) = \Pi y_0(\tau) + \int\limits_0^\tau \Pi f_0 ds,$$

откуда в силу условия на Πy_1 при $\tau \to \infty$ следует

$$\Pi y_1(0) = -\int\limits_0^\infty \Pi f_0 ds. \tag{2.33}$$

Вопрос о сходимости этого интеграла рассматривается, например, в [4]. С учетом (2.33) для Πy_1 получим

$$\Pi y_1(\tau) = -\int\limits_\tau^\infty \Pi f_0 ds. \tag{2.34}$$

Из первого равенства (2.32) теперь следует

$$y_1(0) = \int\limits_0^\infty \Pi f_0 ds. \tag{2.35}$$

Это и будет начальным условием для системы (2.23) при $k = 1$, откуда определятся $y_1(t), z_1(t)$. После этого из второго равенства (2.32) получим

$$\Pi z_1(0) = -z_1(0). \tag{2.36}$$

Это условие позволяет найти Πz_1 из первого уравнения (2.24) при $k = 1$, поскольку Πy_1 уже определено.

Совершенно аналогично определяются y_k, Πy_k, z_k, Πz_k ($k = 2, 3, \ldots$) из системы (2.23)–(2.24) с помощью дополнительных условий

$$\Pi x_k \to 0 \quad \text{при } k \to \infty,$$

$$y_k(0) = \int\limits_0^\infty \Pi f_{k-1} ds, \qquad \Pi z_k(0) = -z_k(0). \tag{2.37}$$

Тем самым описание построения ряда (2.19) закончено.

Пример 2.4

Построить равномерное на $[0, T]$ нулевое приближение решения задачи

$$\begin{aligned} &\dot{y} = y + z, \\ &\varepsilon\dot{z} = z^2 - y^2, \\ &y(0,\varepsilon) = 1,\ z(0,\varepsilon) = 0,\ t \in (0,T]. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Рассмотрим порождающую задачу (при $\varepsilon = 0$):

$$\begin{aligned} &\dot{y} = y + z, \\ &0 = z^2 - y^2, \\ &y(0,\varepsilon) = 1,\ t \in (0,T]. \end{aligned} \tag{2.39}$$

Второе уравнения имеет два корня $z = y$, $z = -y$. Как было показано выше (Пример 2.3), корень $z = y$ является устойчивым при $y < 0$ и неустойчивым при $y > 0$. Корень $z = -y$ является устойчивым при $y > 0$ и неустойчивым при $y < 0$. Начальная точка находится в области влияния устойчивого участка корня $z = -y$. Будем искать решение в виде ряда ($\tau = t/\varepsilon$):

$$y = y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \ldots + \Pi y_0(\tau) + \varepsilon\Pi y_1(\tau) + \ldots, \tag{2.40}$$

$$z = z_0(t) + \varepsilon z_1(t) + \ldots + \Pi z_0(\tau) + \varepsilon\Pi z_1(\tau) + \ldots. \tag{2.41}$$

Подставим (2.40)–(2.41) в (2.39), умножив первое уравнение для симметрии на ε:

$$\varepsilon\frac{d\bar{y}}{dt} + \frac{d}{d\tau}\Pi y = \varepsilon\left(y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \ldots + \Pi y_0(\tau) + \varepsilon\Pi y_1(\tau) + \ldots + \right.$$

$$\left. + z_0(t) + \varepsilon z_1(t) + \ldots + \Pi z_0(\tau) + \varepsilon\Pi z_1(\tau) + \ldots\right),$$

$$\varepsilon\frac{d\bar{z}}{dt} + \frac{d}{d\tau}\Pi z = \left(z_0(t) + \varepsilon z_1(t) + \ldots + \Pi z_0(\tau) + \varepsilon\Pi z_1(\tau) + \ldots\right)^2 -$$

$$- \left(y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \ldots + \Pi y_0(\tau) + \varepsilon\Pi y_1(\tau) + \ldots\right)^2.$$

Приравнивая коэффициенты при нулевой степени ε, получаем систему уравнений:

$$\frac{d}{d\tau}\Pi y_0(\tau) = 0;$$

$$0 = z_0^2(t) - y_0^2(t); \tag{2.42}$$

$$\frac{d}{d\tau}\Pi z_0(\tau) = \Pi z_0^2(\tau) - \Pi y_0^2(\tau) + 2z_0(t)\Pi z_0(\tau) - 2y_0(t)\Pi y_0(\tau).$$

Из того, что $\Pi y_0(\tau)$ – пограничная функция, следует, что $\Pi y_0(\tau) \equiv \equiv 0$. Так как начальная точка лежит в области влияния корня $z = -y$, то решением второго уравнения получившейся системы следует взять функцию $z_0 = -y_0$. Для того, чтобы найти функцию y_0, выпишем одно уравнение из системы, получающейся при первой степени ε:

$$\frac{dy_0}{dt} = y_0 + z_0 = 0.$$

Следовательно, $y_0 = \mathrm{const}$. Чтобы определить значение константы, подставим разложение в начальное условие:

$$y_0(0) + \Pi y_0(0) = 1,$$

откуда

$$y_0 = 1.$$

Подставляя найденные функции в третье уравнение системы (2.42), получаем:

$$\frac{d}{d\tau}\Pi z_0(\tau) = \Pi z_0^2(\tau) + 2\Pi z_0(\tau).$$

Решая это уравнение, определяем функцию $\Pi z_0(\tau)$:

$$\Pi z_0(\tau) = \frac{2}{1+e^{2\tau}}.$$

Таким образом, нулевое приближение решения системы (2.42) имеет вид

$$y(t) = 1 + O(\varepsilon), \qquad z(t) = -1 + \frac{2}{1+e^{2t/\varepsilon}} + O(\varepsilon).$$

Упражнения.

Построить равномерное на $[0, T]$ нулевое приближение решения для систем:

1.
$$\frac{dy}{dt} = y, \qquad y(0) = y^0;$$
$$\varepsilon\frac{dz}{dt} = -z, \qquad z(0) = z^0.$$

2.
$$\frac{dy}{dt} = \frac{-z}{1+e^t}, \qquad y(0) = 0;$$
$$\varepsilon\frac{dz}{dt} = -z + e^t(y+\varepsilon), \qquad z(0) = 2.$$

3.
$$\frac{dy}{dt} = (y+\varepsilon)(y+\varepsilon-1), \qquad y(0) = 0;$$
$$\varepsilon\frac{dz}{dt} = -z, \qquad z(0) = 1.$$

4.
$$\frac{dy}{dt} = (y+\varepsilon)^2, \qquad y(0) = 0;$$
$$\varepsilon\frac{dz}{dt} = -z, \qquad z(0) = z1.$$

5.
$$\frac{dy}{dt} = (y+\varepsilon)(y+\varepsilon+1), \qquad y(0) = 0;$$
$$\varepsilon\frac{dz}{dt} = -z, \qquad z(0) = 1.$$

6.
$$\frac{dy}{dt} = -y + z^2, \qquad y(0) = 0;$$
$$\varepsilon\frac{dz}{dt} = -z, \qquad z(0) = 1.$$

Литература

1. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. *Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений.* – М.: Высшая школа, 1990. 208 с.

2. Кузьмина Р.П. *Асимптотические методы для обыкновенных дифференциальных уравнений.* – М.: УРСС, 2003. 333 с.

3. Найфэ А.Х. *Методы возмущений.* – М.: Мир, 1976. 455 с.

4. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. *Дифференциальные уравнения.* – М.: Наука, 1998. 232 с.

5. Фихтенгольц Г.М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления.* Т.1. – М.: ОГИЗ, Гостехиздат, 1948. 860 с.