МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯРОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве методических указаний для обучающихся Самарского университета по основным образовательным программам высшего образования по направлениям подготовки 15.03.04 Автоматизация технологических процессов и производств; 11.03.01 Радиотехника; 11.03.04 Электроника и наноэлектроника; 11.03.03 Конструирование и технология электронных средств и специальности 11.05.01 Радиоэлектронные системы и комплексы

Составители С. В. Бушков
Е. А. Ефимов

С А М А Р А
Издательство Самарского университета
2023

УДК 519.21(076)
ББК В171я7
П765

Составители *С. В. Бушков, Е. А. Ефимов*

Рецензент: д.э.н., профессор Е. П. Ростова

П765 Примеры решения задач теории вероятностей: методические указания / сост. С. В. Бушков, Е. А. Ефимов. – Самара: Издательство Самарского университета, 2023. – 48 с.: ил.

Методические указания составлены в соответствии с действу-ющей программой по курсу высшей математики для инженерно-технических направлений подготовки и специальностей вузов. В них рассматривается решение задач типовых расчетов по различным разделам теории вероятностей.

Предназначены для обучающихся 2 курса по по направлениям подготовки 15.03.04 Автоматизация технологических процессов и производств; 11.03.01 Радиотехника; 11.03.04 Электроника и наноэлектроника; 11.03.03 Конструирование и технология электронных средств и специальности 11.05.01 Радиоэлектронные системы и комплексы, а также будут полезны студентам других специальностей Самарского университета.

УДК 519.21(076)
ББК В171я7

Содержание

Введение

В данной работе мы разберем решение типовых задач, приведенных в учебном пособии [3]: «Теория вероятностей: Типовые расчеты /Самарский государственный аэрокосмический университет. Составители Е.А. Ефимов, О.С. Иванова, Л.В. Коломиец, Самара, 2003.»

1. Классическое определение вероятности

Определение 1.1. Множество Ω всех возможных, взаимоисключающихся исходов случайного эксперимента называется ***пространством элементарных событий***. Элемент ω множества Ω называется ***элементарным событием*** или ***элементарным исходом***.

Определение 1.2. ***Случайным событием*** (в теоретико-множественном смысле) называется любое подмножество пространства элементарных событий, если оно конечно или счетно.

Определение 1.3. ***Мощностью*** случайного события называется число элементарных исходов, из которых оно состоит.

Будем предполагать:

1. Пространство элементарных событий конечно и не невозможно.
2. Исходы случайного эксперимента равновозможны.

Определение 1.4. ***Вероятностью*** события A называется величина

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{m}{n},$$

где $|\Omega| = n$ — мощность пространства элементарных исходов испытания, $|A| = m$ — мощность события A, т.е. число элементарных исходов испытания, благоприятствующих появлению события A.

В большинстве случаев значения n и m определяются на основании ***классической вероятностной схемы выбора*** (схемы урн). Рассмотрим эту схему. Пусть в урне находится n шаров одного размера, пронумерованных $1, 2, 3, \ldots, n$. Из урны наудачу извлекают m шаров. И извлекать эти m шаров можно различными способами.

1) Упорядоченная выборка с повторениями.

Выборка производится с возвращением шара и учитывается порядок вынутых шаров, т.е. наборы $\{1, 2, 2, 3, 1\}$ и $\{1, 2, 2, 1, 3\}$ считаются разными. Общее число всех упорядоченных выборок с повторениями определяется по формуле:

$$N(\Omega) = n^m. \tag{1}$$

Пример. В урне находятся 3 шара. Из урны вынимают один шар, записывают его номер и возвращают в урну. Опыт повторяют 5 раз. Сколько способов такого извлечения шаров может быть?

Запишем, например, такие варианты извлечения шаров: $\{1, 2, 2, 3, 1\}$, $\{1, 2, 2, 1, 3\}$, $\{1, 1, 1, 3, 3\}$, $\{1, 2, 3, 1, 1\}$, $\{1, 2, 3, 2, 1\}$. Заметим, что шары в указанных наборах повторяются, следовательно, это выборка с повторениями. И так как нам в этом примере важен порядок следования номера шара, то эта выборка — упорядоченная. Итак, мы имеем упорядоченную выборку с повторением: в нашем случаев $n = 3,\ m = 5$. И по формуле (1) получаем:

$$N(\Omega) = 3^5 = 243.$$

2) Упорядоченная выборка без повторений.

В данной выборке порядок вынутых шаров учитывается, но шары обратно в урну не возвращаются. Общее число всех упорядоченных выборок без повторений определяется по формуле:

$$N(\Omega) = A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}. \tag{2}$$

Здесь A_n^m — число размещений из n элементов по m. В частности, если $m = n$, получаем число перестановок из n элементов.

$$N(\Omega) = P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n! \tag{3}$$

Пример. На столе находится 12 карточек с различными буквами. Сколько 5-буквенных слов можно из них составить?

На карточках нет повторяющихся букв, поэтому данная выборка будет без повторений. А так как от расположения буквы в слове будет меняться само слово, то выборка — упорядоченная. Следовательно, по формуле (2) получаем:

$$N(\Omega) = A_n^m = A_{12}^5 = \frac{12!}{(12-5)!} = \frac{12!}{7!} = 95040.$$

3) Неупорядоченная выборка без повторений.

Шары обратно в урну не возвращаются и неважен порядок следования номера шара, т.е. наборы $\{1, 2, 3\}$ и $\{3, 2, 1\}$ считаются одинаковыми. Общее число всех неупорядоченных выборок без повторений определяется по формуле:

$$N(\Omega) = C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}, \tag{4}$$

где C_n^m — число сочетаний из n элементов по m.

Пример. Из колоды в 36 карт достают 4 карты. Сколькими способами это можно сделать?

В колоде нет одинаковых карт, поэтому выборка — без повторений. Так как порядок вынимаемой из колоды карты неважен, то выборка — неупорядоченная, и по формуле (4) для неупорядоченной выборки без повторений получаем:

$$N(\Omega) = C_n^m = C_{36}^4 = \frac{36!}{4! \cdot 32!} = \frac{33 \cdot 34 \cdot 35 \cdot 36}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 58905.$$

*4) **Неупорядоченная выборка с повторениями.***

Неважен порядок вынутых шаров. Шары обратно возвращаются в урну Общее число всех неупорядоченных выборок с повторениями определяется по формуле:

$$N(\Omega) = C_{n+m-1}^{m}. \tag{5}$$

Пример. В магазине имеется 7 видов цветов. Сколько букетов из 9 цветов можно составить?

В букете 9 цветов, а в магазине только 7 видов. Следовательно, в букете обязательно будут повторяться какие-то виды цветов. Выборка — с повторением. А так как неважно, в каком порядке располагаются цветы в букете, то выборка — неупорядоченная. По формуле (5) для неупорядоченной выборки с повторениями получаем:

$$N(\Omega) = C_{n+m-1}^{m} = C_{7+9-1}^{9} = C_{15}^{9} = \frac{15!}{9! \cdot 6!} = 5005.$$

5) Разбиение на подмножества.

Пусть множество E, состоящее из n элементов ($|E| = n$) разбивается на k подмножеств E_i $(i = 1, 2, 3, \dots, k)$, состоящих соответственно из n_i элементов ($|E_i| = n_i$) так, что $E_i E_j = \emptyset$ при $i \neq j$, и $\sum\limits_{i=1}^{k} E_i = E$. Тогда общее число таких способов разбиения определяется по формуле:

$$N(\Omega) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \cdot \ldots \cdot n_k!}. \tag{6}$$

Пример. Группу из 20 человек разбивают на 3 подгруппы по 10, 5, 5 человек. Сколькими способами это можно сделать?

По формуле (6) получаем:

$$N(\Omega) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3!} = \frac{20!}{10! \cdot 5! \cdot 5!} = 46\,558\,512.$$

И последнее, что мы рассмотрим перед разбором задачи 1 из типового расчета, это ***правила комбинаторики***:

— ***Правило суммы.*** Если объект A можно выбрать m способами, а объект B можно выбрать n способами, то объект $A + B$ можно выбрать $m + n$ способами.

— ***Правило произведения.*** Если объект A можно выбрать m способами, и после такого выбора объект B можно выбрать n способами, то выбор пары AB осуществляется mn способами.

Пример 1.1. Случайным образом записываются 5 цифр. Считая, что все комбинации цифр от 00000 до 99999 равновероятны, найдите вероятности событий:
— число кратно 25;
— все цифры различны, и цифры 3 и 4 окажутся рядом.

Решение. Задача на классическое определение вероятности. Следовательно, применим формулу $P(A) = \dfrac{|A|}{|\Omega|}$, где $|A|$ — мощность события A. Чтобы найти $|\Omega|$, надо определить число всех вариантов комбинаций цифр от 00000 до 99999. В этой комбинации цифр $\boxed{*}\boxed{*}\boxed{*}\boxed{*}\boxed{*}$ на каждом месте может стоять любая цифра от 0 до 9, т.е. 10 цифр. Поэтому по правилу произведения комбинаторики получаем $|\Omega| = 10^5$.

Чтобы вычислить $|A|$ (событие A — число кратно 25), надо вспомнить признак делимости числа на 25. Число делится на 25, если последние две цифры образуют число, которое делится без остатка на 25, т.е. если число заканчивается на 00, 25, 50 или 75: $\boxed{*}\boxed{*}\boxed{*}\boxed{0}\boxed{0}$, $\boxed{*}\boxed{*}\boxed{*}\boxed{2}\boxed{5}$, $\boxed{*}\boxed{*}\boxed{*}\boxed{5}\boxed{0}$, $\boxed{*}\boxed{*}\boxed{*}\boxed{7}\boxed{5}$. Итак, на последних двух местах в нашей комбинации стоят вполне определенные цифры (4 варианта таких пар цифр), а на первых трех местах могут располагаться любые цифры от 0 до 9. Пусть, например, комбинация заканчивается на 00. В этом случае на первом месте может быть любая из 10 цифр, т.е. различных неповторяющихся — 10, на втором — 10, на третьем — 10, на четвертом — 1, на пятом — 1. По правилу произведения получаем $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 1 \cdot 1 = 10^3$. А так как комбинация цифр кроме 00 может еще заканчиваться на 25, 50, 75, т.е всего 4 варианта, то по правилу суммы |A| = 103 · 4.

Таким образом,

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{10^3 \cdot 4}{10^5} = \frac{4}{10^2} = 0{,}04.$$

Чтобы ответить на второй вопрос задачи, нам надо найти только $|B|$, где событие B — все цифры различны, и цифры 3 и 4 окажутся рядом. Величину $|\Omega|$ мы нашли выше. Пусть цифры 3 и 4 расположены, например, в таком порядке: «3» стоит на первом месте в комбинации, а «4» — на втором. Так как цифры 3 и 4 уже заняты, то на оставшихся трех местах должны стоять отличные друг от друга цифры «$*$», кроме 3 и 4: $\boxed{3|4|*|*|*}$. Таких вариантов будет столько, сколько комбинаций цифр на последних трех местах. А эта комбинация — есть упорядоченная выборка без повторений A_8^3. Но цифры 3 и 4 в таком порядке могут располагаться и на других местах и, таким образом, будем иметь 4 различных варианта расположения цифр в числе: $\boxed{3|4|*|*|*}$, $\boxed{*|3|4|*|*}$, $\boxed{*|*|3|4|*}$, $\boxed{*|*|*|3|4}$. Также получим еще 4 варианта, когда цифры 3 и 4 расположены в обратном порядке, т.е. сначала стоит цифра 4, а потом цифра 3: $\boxed{4|3|*|*|*}$, $\boxed{*|4|3|*|*}$, $\boxed{*|*|4|3|*}$, $\boxed{*|*|*|4|3}$. Следовательно, существует 8 вариантов расположения цифр 3 и 4 в данной комбинации. С учетом этого, $|B| = A_8^3 \cdot 8$, где A_8^3 вычисляется по формуле (2), и

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{A_8^3 \cdot 8}{|\Omega|} = \frac{\frac{8!}{5!} \cdot 8}{10^5} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 8}{10^5} = 0{,}02688.$$

Пример 1.2. 52 карты раздаются поровну 4 игрокам. Найдите вероятности событий:

— двое игроков получат по 2 туза;

— один из игроков получит все 13 карт крестовой масти.

Решение. Мощность пространства элементарных событий найдем по формуле (6), где $n = 52$, $n_i = 13$, $i = \overline{1,4}$ (у каждого игрока по 13 карт):

$$|\Omega| = \frac{52!}{(13!)^4}.$$

Пусть событие A — двое игроков получат по 2 туза. Если зафиксировать по 2 туза для двух определенных игроков, то оставшиеся 48 карт, не являющихся тузами, нужно раздать по 11 тем, у кого есть тузы, и по 13 тем, кто без тузов. Это можно сделать по формуле (6) $\dfrac{48!}{(11!)^2 \cdot (13!)^2}$ способами. Тузы могут быть и у других игроков. Число вариантов, когда тузы получают двое игроков из четырех, находим по формуле (4) для неупорядоченной выборки без повторений из 4 элементов по 2: $C_4^2 = \dfrac{4!}{2! \cdot 2!}$. Тогда, с учетом вышесказанного,

$$|A| = \frac{48!}{(11!)^2 \cdot (13!)^2} \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!},$$

а вероятность события A:

$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{48!\cdot 4! \cdot (13!)^4}{(11!)^2\cdot(13!)^2\cdot 2!\cdot 2! \cdot 52!}=\frac{3\cdot 4\cdot(12\cdot 13)^2}{1\cdot 2\cdot 49\cdot 50\cdot 51\cdot 52}=\frac{468}{20825}\approx 0{,}0225.$$

Пусть событие B — один из игроков получит все 13 карт крестовой масти. Если зафиксировать игрока с крестовой мастью, то остальные 39 карт, раздаются по 13 остальным игрокам. Число таких вариантов $\dfrac{39!}{(13!)^3}$. Игроков с крестовой мастью может быть 4. Следовательно,

$$|B| = \frac{39!}{(13!)^3} \cdot 4.$$

Тогда вероятность события B:

$$P(B)=\frac{|B|}{|\Omega|}=\frac{39!\cdot 4\cdot(13!)^4}{(13!)^3 \cdot 52!}=\frac{4 \cdot 13!}{40\cdot 41\cdot 42\cdot\ldots\cdot 52}=\frac{1}{158753389900}\approx 6{,}30\cdot 10^{-12}.$$

Пример 1.3. Бросаются 4 одинаковые игральные кости. Найдите вероятности событий:

— ни на одной кости не выпадет 6 очков;
— хотя бы на 3-х костях выпадет 6 очков.

Решение. Найдем сначала мощность пространства элементарных событий, т.е. число всех возможных вариантов, которые могут быть при бросании 4-х игральных костей. На каждой кости может выпасть любое число от 1 до 6. Поэтому по правилу произведения $|\Omega| = 6^4$.

Пусть событие A — ни на одной кости не выпадет 6 очков. На каждой кости может выпасть любое число от 1 до 5. Следовательно, по правилу произведения $|A| = 5^4$, и вероятность события A:

$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{5^4}{6^4} = \frac{625}{1296} \approx 0{,}482.$$

Пусть событие B — хотя бы на 3-х костях выпадет 6 очков. Это означает, что 6 очков выпадет на каких-то 3-х костях или на всех 4-х.

Если на 3-х костях выпадает 6 очков, то на 4-ой кости может выпасть любое число, кроме 6. Пусть, например, 6 очков не выпадет на первой кости. В этом случае может быть 5 вариантов выпадения чисел на первой кости и по 1 варианту на остальных костях. И по правилу произведения получаем $5 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 5$ исходов. 6 очков может не выпасть и на второй, и на третьей, и на четвертой кости. Это 4 варианта. В итоге будет $5 \cdot 4 = 20$ исходов, когда на 3-х костях выпадет 6 очков.

Число вариантов, когда на всех 4-х костях выпадет 6 очков, равно 1. По правилу суммы получаем $|B| = 20 + 1 = 21$, и вероятность события B:

$$P(B)=\frac{|B|}{|\Omega|}=\frac{21}{6^4} = \frac{7}{432} \approx 0{,}0162.$$

Пример 1.4. В группе из 30 студентов 20 студентов учатся без троек. Наудачу выбрано 5 человек. Найдите вероятности событий:
- среди отобранных человек все учатся плохо;
- среди отобранных человек ровно 3 учатся хорошо.

Решение. Найдем мощность пространства элементарных событий, т.е. сколькими способами можно отобрать 5 студентов из 30. Это неупорядоченная выборка без повторений из 30 элементов по 5:

$$|\Omega| = C_{30}^5 = \frac{30!}{5! \cdot 25!}.$$

Пусть событие A — среди отобранных человек все учатся плохо. Эти 5 человек можно отобрать из 10 студентов, которые учатся плохо, C_{10}^5 способами, т.е.

$$|A| = C_{10}^5 = \frac{10!}{5! \cdot 5!},$$

и вероятность события A:

$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{10! \cdot 5!\cdot 25!}{5!\cdot 5! \cdot 30!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{26 \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29 \cdot 30} = \frac{2}{1131} \approx 0{,}00177.$$

Пусть событие B — среди отобранных человек ровно 3 учатся хорошо. Эти 3 человека могут быть отобраны среди 20 студентов группы, которые учатся без троек, C_{20}^3 способами. При этом другие 2 человека среди отобранных учатся плохо. Их можно выбрать из 10 студентов группы, которые учатся плохо, C_{10}^2 способами. Следовательно, по правилу произведения получаем

$$|B| = C_{20}^3 \cdot C_{10}^2 = \frac{20! \cdot 10!}{3!\cdot 17! \cdot 2!\cdot 8!},$$

и вероятность события B:

$$P(B)=\frac{|B|}{|\Omega|}=\frac{20!\cdot 10! \cdot 5!\cdot 25!}{3!\cdot 17!\cdot 2!\cdot 8! \cdot 30!}=\frac{18\cdot 19\cdot 20 \cdot 9\cdot 10 \cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2 \cdot 25\cdot 26\cdot 27\cdot 28\cdot 29\cdot 30}=\frac{950}{2639}\approx 0{,}360.$$

Пример 1.5. В кондитерской имеется 8 видов пирожных. Покупатель пробил чек на 5 пирожных. Найдите вероятности событий:

- все пирожные различных видов;
- 3 пирожных одного вида.

Решение. Найдем сначала мощность пространства элементарных событий, т.е. сколькими способами можно выбрать 5 пирожных из 8. Понятно, что среди выбранных 5 пирожных могут быть и пирожные одного вида. Следовательно, имеем выборку с повторениями. И так как порядок следования выбранных пирожных неважен, то эта выборка неупорядоченная. Итак, число способов выбрать 5 пирожных из 8 находим по формуле (5):

$$|\Omega| = C^5_{8+5-1} = C^5_{12} = \frac{12!}{5! \cdot 7!}.$$

Пусть событие A — все пирожные различных видов. Отбираем 5 различных пирожных из 8 видов: получаем неупорядоченную выборку без повторений. Число исходов находим по формуле (4):

$$|A| = C^5_8 = \frac{8!}{5! \cdot 3!}\,,$$

и вероятность события A:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{8! \cdot 5! \cdot 7!}{5! \cdot 3! \cdot 12!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12} = \frac{7}{99} \approx 0{,}0707.$$

Пусть событие B — из пяти выбранных пирожных три пирожных одного вида. Обозначим виды пирожных числами $1, 2, 3, \ldots, 8$. Пусть вначале в нашей выборке три пирожных с номером 1, например:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 5 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

или по-другому:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

Число таких исходов будет столько, сколько вариантов расположить числа от 2 до 8 на втором и третьем местах без повторений (здесь порядок следования цифр неважен, поэтому для удобства расположили «1» на первом месте). Это число исходов найдем по формуле (4). Оно равно C_7^2. Напомним, что это число исходов, когда в выборке три пирожных вида 1. Всего в кондитерской 8 видов пирожных, поэтому найденное число исходов умножаем на 8. В итоге имеем

$$|B| = C_7^2 \cdot 8 = \frac{7!}{2! \cdot 5!} \cdot 8,$$

и окончательно, вероятность события B:

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{7! \cdot 8 \cdot 5! \cdot 7!}{2! \cdot 5! \cdot 12!} = \frac{7}{33} \approx 0{,}212.$$

Возможно и такое решение для события B.

Пусть событие B — из пяти выбранных пирожных три пирожных одного вида. Отбираем сначала три пирожных одного вида, а так как всего 8 различных видов, то таких исходов будет 8. После этого осталось выбрать еще два различных пирожных из оставшихся 7 видов пирожных — получаем еще неупорядоченную выборку без повторений с числом исходов C_7^2. В итоге по правилу произведения имеем

$$|B| = 8 \cdot C_7^2 = 8 \cdot \frac{7!}{2! \cdot 5!},$$

и окончательно, вероятность события B:

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{8 \cdot 7! \cdot 5! \cdot 7!}{2! \cdot 5! \cdot 12!} = \frac{8 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12} = \frac{7}{33} \approx 0{,}212.$$

2. Геометрическое определение вероятности

Классическое определение вероятности нельзя применять в случае бесконечного числа исходов. К описанию такой ситуации приспособлено ***геометрическое определение вероятности.***

Пусть пространство элементарных событий Ω — ограниченная область n-мерного пространства, имеющая конечный объем. Назовем ***мерой*** области ее длину, площадь и объем в одномерном, двумерном и трехмерном пространстве соответственно. Меру области Ω будет обозначать $\operatorname{mes}\Omega$.

Рассмотрим событие $A \subset \Omega$, для которого $0 \leqslant \operatorname{mes} A \leqslant \operatorname{mes}\Omega$.

Определение 2.1. Геометрической вероятностью события A называется величина

$$P(A) = \frac{\operatorname{mes} A}{\operatorname{mes}\Omega}.$$

Пример 2.1. Иван и Петр договорились встретиться у торгового центра между 20 и 21 часами. Каждый приходит в случайный момент указанного промежутка и ждет появления другого до истечения часа, но не более 15 минут, после чего уходит. Найдите вероятность того, что Ивану не пришлось ждать Петра.

Решение. Пусть x — время прихода Петра, y — время прихода Ивана. Каждый из них может прийти в любой момент указанного часа, поэтому $x \in [0; 60]$, $y \in [0; 60]$. Рассматривая все комбинации значений x и y, получаем, что точки $(x; y)$ заполняют на координатной плоскости квадрат со стороной 60 (рис. 1). Мерой пространства элементарных событий будет площадь этого квадрата, т.е.

$$\operatorname{mes}\Omega = 60 \cdot 60 = 3600.$$

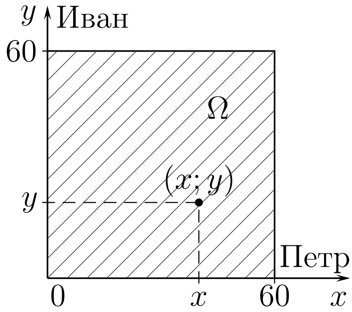
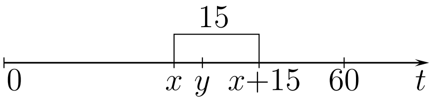


Рис. 1

Теперь изобразим в этом квадрате область, соответствующую событию A — Ивану не пришлось ждать Петра. Раз Иван не ждал Петра, то мы имеет следующую ситуацию: Иван приходит на место встречи, а Петр его уже дожидается (и еще не ушел), т.е. $x < y$. Но чтобы Петр встретился с Иваном, необходимо, чтобы время прихода Петра отличалось от времени прихода Ивана не более, чем на 15 минут, т.е. $y - x \leqslant 15$. Таким образом, событию A соответствуют значения x и y, удовлетворяющие следующей системе:

$$\begin{cases} x < y \\ y - x \leqslant 15 \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} y > x \\ y \leqslant x + 15\,. \end{cases}$$



Геометрически на плоскости Oxy внутри вышеописанного квадрата — это заштрихованная область (рис. 2).

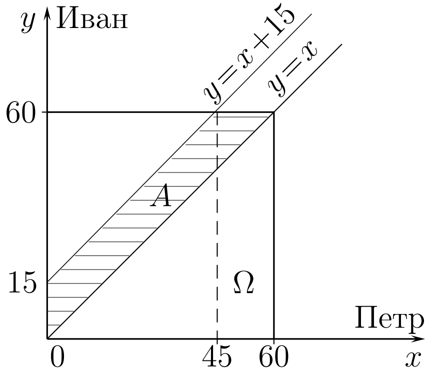


Рис. 2

Найдем площадь заштрихованной фигуры. Из площади половины квадрата (выше диагонали $y=x$) вычтем площадь треугольника, расположенного выше прямой $y=x+15$:

$$\operatorname{mes} A = \frac{1}{2}\,60^2 - \frac{1}{2}\,45^2 = \frac{1}{2}\,(60-45)(60+45) = \frac{1}{2}\cdot 15\cdot 105.$$

И окончательно находим

$$P(A) = \frac{\operatorname{mes} A}{\operatorname{mes}\Omega} = \frac{15\cdot 105}{2\cdot 60^2} = \frac{7}{32} = 0{,}21875 \approx 0{,}219.$$

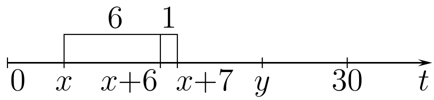
Пример 2.2. Товарный и пассажирский поезда должны пройти через стрелку с 15 часов до 15 часов 30 минут. Время прихода поездов независимо и равновозможно. Товарный поезд проходит стрелку за 6 минут, а пассажирский — за 2 минуты. После прохода поезда семафор переключается с красного на зеленый свет в течение 1 минуты. Найдите вероятность, что пассажирский поезд подъедет к стрелке на зеленый свет после товарного поезда.

Решение. Пусть x — время прихода товарного поезда к стрелке, y — время прихода пассажирского поезда к стрелке. Рассматривая различные значения x, y, для которых $x\in[0;30]$, $y\in[0;30]$, получаем, что пространство элементарных событий — квадрат со стороной 30. Следовательно,

$$\operatorname{mes}\Omega = 30^2 = 900.$$

Если пассажирский поезд подъезжает к стрелке позже товарного, то зеленый свет будет перед ним гореть только в том случае, когда товарный поезд уже прошел через стрелку и семафор переключился с красного на зеленый, т.е. разница между временем прихода пассажирского и товарного поездов была бы больше 7 минут. Следовательно, событию A соответствует множество значений, удовлетворяющих неравенству:

$$y > x + 7.$$



Геометрически — это заштрихованный прямоугольный треугольник внутри квадрата (рис. 3).

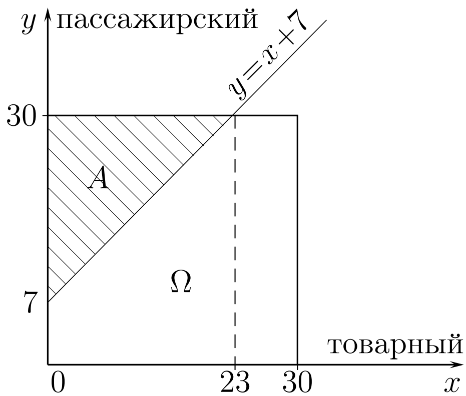


Рис. 3

Площадь этого треугольника — это и есть $\operatorname{mes} A$.

$$\operatorname{mes} A = \frac{1}{2}\, 23^2.$$

Окончательно имеем

$$P(A) = \frac{\operatorname{mes} A}{\operatorname{mes} \Omega} = \frac{23^2}{2 \cdot 900} = \frac{529}{1800} \approx 0{,}294.$$

3. Сложные события

Определение 3.1. События A и B называются ***несовместными,*** если при проведении опыта они не могут произойти одновременно.

Теорема 3.1. Вероятность появления одного из двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий, т.е.

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Следствие. Вероятность появления хотя бы одного из событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$, попарно несовместных, равна сумме вероятностей этих событий, т.е.

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

Теорема 3.2. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления, т.е.

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Следствие. Если события A, B, C совместны, то

$$\begin{aligned} P(A+B+C) = {} & P(A) + P(B) + P(C) - \\ & - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC). \end{aligned}$$

Определение 3.2. ***Условной вероятностью*** события A при условии, что событие B уже произошло, называется величина

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Теорема 3.3. Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого при условии, что первое событие уже произошло, т.е.

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A|B).$$

Теорема 3.4. Вероятность совместного появления нескольких событий равна произведению вероятности одного из них на соответствующие условные вероятности остальных, т.е.

$$P(A_1A_2A_3...A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)...P(A_n|A_1A_2...A_{n-1}).$$

Определение 3.3. Событие A называется ***независимым*** от события B, если вероятность его появления не зависит от того, произошло событие B или нет, т.е. $P(A|B)=P(A)$. В противном случае события — ***зависимы.***

Теорема 3.5. Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий, т.е.

$$P(AB) = P(A)\,P(B).$$

Следствие. Вероятность совместного появления нескольких независимых событий равна произведению вероятностей этих событий, т.е.

$$P(A_1A_2A_3\dots A_n) = P(A_1)\,P(A_2)\,P(A_3)\dots P(A_n).$$

Пример 3.1. В схеме на рисунке 4 вероятности отказов элементов соответственно равны $p_1=0{,}2$; $p_2=0{,}1$; $p_3=p_4=0{,}3$; $p_5=0{,}4$. Состояние каждого из элементов не влияет на состояние остальных. Схема не работает. Найдите вероятность, что отказал 4-й элемент.

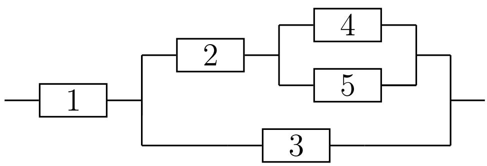


Рис. 4

Решение. Введем обозначения для событий:
A — схема не работает;
A_i — не работает i-й элемент, $i=\overline{1,5}$.

Чтобы ответить на вопрос задачи, нам требуется найти $P(A_4|A)$. По определению 3.2 условной вероятности имеем

$$P(A_4|A) = \frac{P(A_4A)}{P(A)}. \qquad (7)$$

Найдем вероятности событий, стоящие в числителе и знаменателе дроби. Сначала вычислим $P(A)$. Для этого распишем событие A через события A_i, $i=\overline{1,5}$:

$$A = A_1 + (A_2 + A_4A_5)A_3 = A_1 + A_2A_3 + A_3A_4A_5.$$

Так как по условию задачи состояние каждого из элементов не влияет на состояние остальных, то события A_1, A_2A_3 и $A_3A_4A_5$ являются совместными, и по следствию из теоремы 3.2 имеем

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1 + A_2A_3 + A_3A_4A_5) = \\ &= P(A_1) + P(A_2A_3) + P(A_3A_4A_5) - \\ &\quad - P(A_1A_2A_3) - P(A_1A_3A_4A_5) - P(A_2A_3A_4A_5) + \\ &\quad + P(A_1A_2A_3A_4A_5). \end{aligned}$$

События A_i, $i=\overline{1,5}$ независимые. Поэтому по следствию к теореме 3.5:

$$\begin{aligned} P(A) = {}& P(A_1) + P(A_2)P(A_3) + P(A_3)P(A_4)P(A_5) - \\ & - P(A_1)P(A_2)P(A_3) - P(A_1)P(A_3)P(A_4)P(A_5) - \\ & - P(A_2)P(A_3)P(A_4)P(A_5) + \\ & + P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)P(A_5). \end{aligned}$$

Подставляя значения $P(A_1)=0{,}2$; $P(A_2)=0{,}1$; $P(A_3)=P(A_4)=0{,}3$; $P(A_5)=0{,}4$ в равенство для $P(A)$, получим

$$\begin{aligned} P(A) = {}& 0{,}2 + 0{,}1 \cdot 0,3 + 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4 - 0{,}2 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}3 - \\ & - 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4 - 0{,}1 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4 + \\ & + 0{,}2 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4 = 0{,}24992. \end{aligned}$$

Теперь найдем $P(A_4A)$.
Т.к. $A_4A = A_4(A_1 + A_2A_3 + A_3A_4A_5) = A_1A_4 + A_2A_3A_4 + A_3A_4A_5$, то, рассуждая, как это было показано выше, запишем

$$\begin{aligned}
P(A_4A) &= P(A_1A_4) + P(A_2A_3A_4) + P(A_3A_4A_5) - \\
&\quad - P(A_1A_2A_3A_4) - P(A_1A_3A_4A_5) - P(A_2A_3A_4A_5) + \\
&\quad + P(A_1A_2A_3A_4A_5) = \\
&= P(A_1)P(A_4) + P(A_2)P(A_3)P(A_4) + P(A_3)P(A_4)P(A_5) - \\
&\quad - P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4) - P(A_1)P(A_3)P(A_4)P(A_5) - \\
&\quad - P(A_2)P(A_3)P(A_4)P(A_5) + \\
&\quad + P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)P(A_5) = \\
&= 0{,}2 \cdot 0{,}3 + 0{,}1 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 + 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4 - \\
&\quad - 0{,}2 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 - 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4 - \\
&\quad - 0{,}1 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}40 + 0{,}2 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4 = 0{,}09312.
\end{aligned}$$

Подставляя найденные значения в формулу (7), окончательно находим

$$P(A_4|A) = \frac{P(A_4A)}{P(A)} = \frac{0{,}09312}{0{,}24992} = \frac{291}{781} \approx 0{,}37260.$$

4. Формулы полной вероятности и Байеса

Пусть событие A может произойти при наступлении одного из событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, которые будем называть ***гипотезами.*** Гипотезы должны удовлетворять следующим условиям:
1) $H_1, H_2, \ldots, H_n$ образуют полную группу событий, т.е. $H_1 + H_2 + \ldots + H_n = \Omega$;
2) $H_1, H_2, \ldots, H_n$ попарно несовместны, т.е. $P(H_iH_j) = 0$ при $i \neq j$.

При выполнении этих условий $\sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i) = 1$.

Тогда вероятность события A вычисляется по формуле ***полной вероятности***

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)\, P(A|H_i).$$

В случае, если событие A уже произошло, и требуется пересчитать первоначальные вероятности гипотез, то применяют ***формулу Байеса***

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)\, P(A|H_i)}{P(A)}, \quad i = \overline{1,n},$$

где $P(A)$ находят по формуле полной вероятности.

Эти формулы позволяют изменить первоначальные (***априорные, доопытные***) вероятности гипотез на (***аппостериорные, послеопытные***) вероятности при условии, что событие A уже произошло.

Пример 4.1. По каналу связи может быть передана одна из последовательностей букв: $AAAA, BBBB, CCCC$. Известно, что вероятности передачи каждой из этих последовательностей соответственно равны 0,3; 0,4; 0,3. В результате наличия шумов в канале связи буквы принимаются правильно с вероятностью 0,6. Вероятность того, что принятая буква будет искажена, равна 0,2. Предполагается, что буквы искажаются независимо друг от друга. Найдите вероятность того, что передано $AAAA$, если на приемном устройстве получено $ABCA$. Сравните априорные и апостериорные вероятности гипотез.

Решение. Введем события:
A — на приемном устройстве получено $ABCA$;
H_1 — передано $AAAA$;
H_2 — передано $BBBB$;
H_3 — передано $CCCC$.
По условию задачи $P(H_1)=0{,}3;$ $P(H_2)=0{,}4;$ $P(H_3)=0{,}3.$

Событие A может произойти лишь при наступлении одного из события (гипотезы) H_1, H_2, H_3, которые попарно несовместны и образуют полную группу событий:

$$P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) = 0{,}3 + 0{,}4 + 0{,}3 = 1.$$

Следовательно, вероятность события A будем находить по формуле полной вероятности, а апостериорную вероятность первой гипотезы $P(H_1|A)$ вычислим по формуле Байеса

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)\,P(A|H_1)}{P(A)}.$$

Сначала найдем $P(A)$ по формуле полной вероятности, как было сказано выше:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(H_i)\,P(A|H_i).$$

Вероятности $P(H_i)$, $i=\overline{1,3}$ даны в условии задачи. Остается найти условные вероятности $P(A|H_i)$, $i=\overline{1,3}$.

$P(A|H_1)$ — это вероятность того, что на устройстве получено $ABCA$, если передано $AAAA$. В этом случае получаем, что первая и последняя буквы при передаче не исказились, а вторая и третья буквы исказились, т.е. по теореме умножения для независимых событий получаем

$$P(A|H_1) = 0{,}6 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}6 = 0{,}0144.$$

Аналогично рассуждая, находим

$$P(A|H_2) = 0{,}2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}0048,$$
$$P(A|H_3) = 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}2 = 0{,}0048.$$

Тогда

$$P(A) = \sum_{i=1}^{3} P(H_i)\,P(A|H_i) =$$
$$= 0{,}3 \cdot 0{,}0144 + 0{,}4 \cdot 0{,}0048 + 0{,}3 \cdot 0{,}0048 = 0{,}00768,$$

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)\,P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}3\cdot 0{,}0144}{0{,}00768} = \frac{9}{16} = 0{,}5625.$$

На первый вопрос задачи мы ответили. Осталось сравнить априорные и апостериорные вероятности гипотез. Напомним: $P(H_i)$ — априорные вероятности гипотез, а $P(H_i|A)$ — апостериорные вероятности гипотез, $i=\overline{1,3}$. Четыре из этих шести вероятностей нам уже известны. Найдем оставшиеся $P(H_2|A)$ и $P(H_3|A)$. Применяя формулу Байеса, получаем

$$P(H_2|A) = \frac{P(H_2)\,P(A|H_2)}{P(A)} = \frac{0{,}4\cdot 0{,}0048}{0{,}00768} = \frac{1}{4} = 0{,}25,$$

$$P(H_3|A) = \frac{P(H_3)\,P(A|H_3)}{P(A)} = \frac{0{,}3\cdot 0{,}0048}{0{,}00768} = \frac{3}{16} = 0{,}1875.$$

И тогда

$$P(H_1) = \frac{3}{10} = 0{,}3 \ < \ P(H_1|A) = \frac{9}{16} = 0{,}5625$$

$$P(H_2) = \frac{4}{10} = 0{,}4 \ > \ P(H_2|A) = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

$$P(H_3) = \frac{3}{10} = 0{,}3 \ > \ P(H_3|A) = \frac{3}{16} = 0{,}1875$$

5. Дискретная случайная величина. Биномиальное распределение

Случайная величина — это числовая функция, которая в результате случайного эксперимента принимает различные значения. Случайные величины обозначаются большими (прописными) буквами $X, Y, Z, \ldots$, а возможные значения случайной величины обозначаются строчными буквами в виде $x_i, y_i, z_i, \ldots$.

Случайные величины, у которых множество значений конечно или счетно, называются ***дискретными*** случайными величинами, другие — недискретными.

Случайная величина — это числовая функция элементарного события $X(\omega)$, определенная в пространстве элементарных событий, $\omega \in \Omega$.

Значение $x = X(\omega)$ случайной величины X — всегда число, причем каждое число появляется с определенной вероятностью $p(\omega)$.

Определение 5.1. ***Законом распределения*** случайной величины называется любое правило (функция, таблица), позволяющее находить вероятности элементарных событий, связанных со случайной величиной.

Для дискретной случайной величины закон распределения задается в виде ряда распределения — таблицы возможных значений случайной величины и соответствующих вероятностей. ***Условием нормировки*** закона распределения дискретной случайной величины (свойством ряда распределения) является тот факт, что сумма вероятностей всех возможных значений случайной величины равна 1, т.е. $\sum\limits_i p_i = 1$.

Важнейшими числовыми характеристиками дискретной случайной величины являются ***математическое ожидание*** $M[X] = m_X = \sum\limits_i x_i p_i$, ***дисперсия*** $D[X] = D_X = \sum\limits_i x_i^2 p_i - m_X^2$ и ***среднее квадратичное отклонение*** $\sigma[X] = \sigma_X = \sqrt{D_X}$, при условии, что указанные числовые ряды сходятся абсолютно.

Рассмотрим ***схему независимых испытаний Бернулли:***

1) Каждый эксперимент имеет два исхода — успех и неуспех.
2) Вероятность успеха в каждом эксперименте одинакова и равна p, а вероятность неуспеха равна $q = 1 - p$.
3) Независимые эксперименты повторяются n раз.

В рамках этой схемы рассмотрим случайную величину X — число успехов в n опытах.

Утверждение. Число успехов случайной величины X в n опытах в схеме испытаний Бернулли имеет биномиальное распределение

$$p_m = P(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Числовые характеристики биномиального распределения: $m_X = np,\ D_X = npq,\ \sigma_X = \sqrt{npq}$.

Пример 5.1. Устройство состоит из 12 независимо работающих элементов. Вероятности отказов каждого из элементов за время T одинаковы и равны 0,3.

1) Постройте ряд распределения случайной величины X — число элементов, вышедших из строя за время T.
2) Какова вероятность того, что за время T откажут:
   а) ровно 4 элемента;
   б) хотя бы один элемент;
   в) не менее 4 элементов;
   г) меньше 3 элементов.
3) Каковы $M[X],\ D[X]$?

Решение.

1) Условие задачи попадает под биномиальный закон распределения, где в схеме испытания Бернулли $n = 12,\ p = 0{,}3,$ значит $q = 1 - p = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$. Случайная величина X принимает значения от $x = 0$ до $x = 12$. Найдем значения вероятностей при этих значениях X по формуле Бернулли

$$p_m = P(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

$$p_0 = P(X = 0) = C_{12}^0\, p^0 q^{12} = 1 \cdot 1 \cdot 0{,}7^{12} \approx 0{,}0138412872$$

$$p_1 = P(X = 1) = C_{12}^1\, p^1 q^{11} = 12 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7^{11} \approx 0{,}0711837628$$

$$p_2 = P(X = 2) = C_{12}^2\, p^2 q^{10} = \frac{12!}{2!\,10!} \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}7^{10} \approx 0{,}1677902979$$

$$p_3 = P(X = 3) = C_{12}^3\, p^3 q^9 = \frac{12!}{3!\,9!} \cdot 0{,}3^3 \cdot 0{,}7^9 \approx 0{,}2397004256$$

$$p_4 = P(X = 4) = C_{12}^4\, p^4 q^8 = \frac{12!}{4!\,8!} \cdot 0{,}3^4 \cdot 0{,}7^8 \approx 0{,}2311396961$$

$$p_5 = P(X = 5) = C_{12}^5\, p^5 q^7 = \frac{12!}{5!\,7!} \cdot 0{,}3^5 \cdot 0{,}7^7 \approx 0{,}1584957916$$

$$p_6 = P(X=6) = C_{12}^6\, p^6 q^6 = \frac{12!}{6!\,6!} \cdot 0{,}3^6 \cdot 0{,}7^6 \approx 0{,}0792478958$$

$$p_7 = P(X=7) = C_{12}^7\, p^7 q^5 = \frac{12!}{7!\,5!} \cdot 0{,}3^7 \cdot 0{,}7^5 \approx 0{,}0291114719$$

$$p_8 = P(X=8) = C_{12}^8\, p^8 q^4 = \frac{12!}{8!\,4!} \cdot 0{,}3^8 \cdot 0{,}7^4 \approx 0{,}0077977157$$

$$p_9 = P(X=9) = C_{12}^9\, p^9 q^3 = \frac{12!}{9!\,3!} \cdot 0{,}3^9 \cdot 0{,}7^3 \approx 0{,}0014852792$$

$$p_{10} = P(X=10) = C_{12}^{10}\, p^{10} q^2 = \frac{12!}{10!\,2!} \cdot 0{,}3^{10} \cdot 0{,}7^2 \approx 0{,}0001909645$$

$$p_{11} = P(X=11) = C_{12}^{11}\, p^{11} q^1 = 12 \cdot 0{,}3^{11} \cdot 0{,}7 \approx 0{,}0000148803$$

$$p_{12} = P(X=12) = C_{12}^{12}\, p^{12} q^0 = 1 \cdot 0{,}3^{12} \cdot 1 \approx 0{,}0000005314$$

Теперь занесем полученные значения в таблицу и получим ряд распределения случайной величины X — число элементов, вышедших из строя за время T.

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,01384	0,07118	0,16779	0,23970	0,23114

x_i	5	6	7	8	9
p_i	0,15850	0,07925	0,02911	0,00780	0,00149

x_i	10	11	12
p_i	0,000191	0,0000149	0,000000531

Если сделать проверку и найти сумму всех вероятностей из таблицы, то получим 1,000006431. Это связано с тем, что в таблицу занесены округленные значения вероятностей. Точные значения получаются по формуле $C_n^m p^m q^{n-m}$. Найдем сумму $\sum\limits_{m=0}^{12} p_m = \sum\limits_{m=0}^{12} C_{12}^m p^m q^{12-m}$. Заметим, что в правой части равенства — формула бинома Ньютона, т.е.

$$\sum_{m=0}^{12} C_{12}^m p^m q^{12-m} = (p+q)^{12} = 1^{12} = 1.$$

Таким образом, условие нормировки выполняется.

2) а) $P(X=4) \approx 0{,}23114$ (значения вероятностей здесь и ниже взяты из приведенной таблицы).

б) $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X<1) = 1 - P(X=0) \approx 1 - 0{,}01384 = 0{,}98616.$

в) $P(X \geqslant 4) = 1 - P(X<4) = 1 - \big(P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)\big) \approx 1 - (0{,}01384 + 0{,}07118 + 0{,}16779 + 0{,}23970) = 0{,}50749.$

г) $P(X<3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) \approx 0{,}01384 + 0{,}07118 + 0{,}16779 = 0{,}25281.$

3) $M[X] = np = 12 \cdot 0{,}3 = 3{,}6\,;$
$D[X] = npq = 12 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 2{,}52.$

6. Распределение Пуассона

Пример 6.1. Вероятность аварии такси в год равна 0,0001. Всего таких машин в городе 50 000.

1) Постройте ряд распределения случайной величины X — число аварий такси за год.
2) Какова вероятность того, что в течении года будет:
   а) ровно 8 аварий;
   б) хотя бы одна авария;

в) не менее 8 аварий;

г) больше 8 аварий.

3) Каковы $M[X]$, $D[X]$?

Заметим, что в этом примере рассматривается схема испытаний Бернулли, и поставленная задача полностью повторяет задачу, разобранную в примере 5.1. Разница лишь в том, что число опытов здесь довольно велико (50 000 машин), а вероятность успеха в каждом опыте очень мала (вероятность аварии 0,0001). В таком случае, когда число опытов очень велико, а вероятность появления события в каждом опыте мала, можно вместо биномиального распределения применять приближенно распределение Пуассона с параметром $a = np$.

Утверждение. Распределение Пуассона — есть предельный случай биномиального распределения, когда $n \to \infty$, вероятность $p \to 0$, но их произведение $np \xrightarrow[p\to 0]{n\to\infty} a = const$. При этом

$$P(X = m) = \frac{a^m}{m!}\, e^{-a}.$$

Числовые характеристики распределения Пуассона: $m_X = D_X = a$, т.е. математическое ожидание и дисперсия равны параметру распределения.

Решение примера 6.1.

1) Как было сказано выше, в данном примере рассматривается закон распределения Пуассона с параметром $a = np = 50\,000 \times \times 0{,}0001 = 5$. Случайная величина X принимает значения от $X = 0$ до $X = 50\,000$. У нас нет необходимости составлять ряд распределения случайной величины X, рассматривая все ее возможные значения. Для того, чтобы ответить на вопросы задачи, достаточно построить ряд распределения X с ее значениями от 0 до 8. Вероятности этих значений случайной величины будем находить по формуле Пуассона $P(X = m) = \frac{a^m}{m!}\, e^{-a}$. Вероятность следующего события $X = m + 1$ можно найти, домножив $P(X = m)$ на $\frac{a}{m+1}$: $P(X = m + 1) = P(X = m) \cdot \frac{a}{m+1}$.

$$p_0 = P(X=0) = \frac{5^0}{0!}\, e^{-5} = e^{-5} \approx 0{,}00674$$

$$p_1 = P(X=1) = e^{-5} \cdot \frac{5}{1} = 5\, e^{-5} \approx 0{,}03369$$

$$p_2 = P(X=2) = 5\, e^{-5} \cdot \frac{5}{2} = \frac{25}{2}\, e^{-5} \approx 0{,}08422$$

$$p_3 = P(X=3) = \frac{25}{2}\, e^{-5} \cdot \frac{5}{3} = \frac{125}{6}\, e^{-5} \approx 0{,}14037$$

$$p_4 = P(X=4) = \frac{125}{6}\, e^{-5} \cdot \frac{5}{4} = \frac{625}{24}\, e^{-5} \approx 0{,}17547$$

$$p_5 = P(X=5) = \frac{625}{24}\, e^{-5} \cdot \frac{5}{5} = \frac{625}{24}\, e^{-5} \approx 0{,}17547$$

$$p_6 = P(X=6) = \frac{625}{24}\, e^{-5} \cdot \frac{5}{6} = \frac{3125}{144}\, e^{-5} \approx 0{,}14622$$

$$p_7 = P(X=7) = \frac{3125}{144}\, e^{-5} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15625}{1008}\, e^{-5} \approx 0{,}10444$$

$$p_8 = P(X=8) = \frac{15625}{1008}\, e^{-5} \cdot \frac{5}{8} = \frac{78125}{8064}\, e^{-5} \approx 0{,}06528$$

Занесем полученные значения в таблицу и получим ряд распределения случайной величины X — число аварий такси за год:

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,00674	0,03369	0,08422	0,14037	0,17547

x_i	5	6	7	8	...
p_i	0,17547	0,14622	0,10444	0,06528	...

Замечание. Если быть точным, то распределение Пуассона имеет дискретная случайная величина X, множество значений которой $X=\{0,1,2,3,\ldots\}$ счетно, а вероятности вычисляются по формуле

$$p_m = P(X=m) = \frac{a^m}{m!}\,e^{-a}.$$

Записывая ряд распределения такой случайной величины, имеем в верхней строке таблицы бесконечно много значений. С учетом этого проверим условие нормировки

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!}\,e^{-a} = e^{-a}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a^m}{m!}.$$

В правой части равенства сумма ряда — разложение функции $f(a)=e^a$ в ряд Маклорена. Поэтому

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_m = e^{-a}\cdot e^{a} = 1,$$

т.е. условие нормировки для ряда распределения случайной величины выполняется.

Используя результаты построенного в пункте 1) ряда распределения, ответим на второй вопрос задачи.

2) а) $P(X=8)\approx 0{,}06528.$

б) $P(X\geqslant 1) = 1 - P(X<1) = 1 - P(X=0) \approx 1 - 0{,}00674 = 0{,}99326.$

в) $$\begin{aligned} P(X\geqslant 8) &= 1 - P(X<8) = \\ &= 1 - P(X=0) - P(X=1) - P(X=2) - P(X=3) - \\ &\quad - P(X=4) - P(X=5) - P(X=6) - P(X=7) \approx \\ &\approx 1 - 0{,}00674 - 0{,}03369 - 0{,}08422 - 0{,}14037 - \\ &\quad - 0{,}17547 - 0{,}17547 - 0{,}14622 - 0{,}10444 = \\ &= 0{,}13338. \end{aligned}$$

г) $$\begin{aligned} P(X>8) &= 1 - P(X\leqslant 8) = 1 - P(X<8) - P(X=8) \approx \\ &\approx 0{,}13338 - 0{,}06528 = 0{,}06810. \end{aligned}$$

3) $M[X] = D[X] = a = 5.$

Встречаются задачи на схему испытаний Бернулли, в которых не указано ни число n проведенных опытов, ни вероятности p успеха в каждом опыте. Но сразу дается среднее значение случайной величины, т.е. значение a параметра распределения пуассоновского потока. Рассмотрим такую задачу.

Пример 6.2. В среднем на диспетчерский пункт поступает в минуту 2 вызова такси. Найти вероятность того, что в течении 4-х минут поступит:
а) ровно 3 вызова;
б) менее 3-х вызовов;
в) более 3-х вызовов;
г) хотя бы один вызов.

Решение. Так как в минуту в среднем поступает 2 вызова, то в течение 4-х минут в среднем поступит $2 \cdot 4 = 8$ вызовов. Т.е. в нашем случае параметр распределения $a = 8$. И мы имеем:

а) $P(X=3) = \dfrac{8^3}{3!}\, e^{-8} = \dfrac{256}{3}\, e^{-8} \approx 0{,}02863.$

б) $$P(X<3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = \\ = \frac{8^0}{0!}\, e^{-8} + \frac{8^1}{1!}\, e^{-8} + \frac{8^2}{2!}\, e^{-8} = (1+8+32)\, e^{-8} = 41 e^{-8} \approx \\ \approx 0{,}01375.$$

в) $$P(X>3) = 1 - P(X \leqslant 3) = 1 - P(X<3) - P(X=3) = \\ = 1 - 41 e^{-8} - \frac{256}{3}\, e^{-8} = 1 - \frac{379}{3}\, e^{-8} \approx 0{,}95762.$$

г) $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X=0) = 1 - e^{-8} \approx 0{,}99966.$

7. Непрерывная случайная величина

Если дискретная случайная величина имеет очень много значений, то скачки невелики, и их будет много. Идеализацией такого случая будет непрерывная функция распределения.

Определение 7.1. Случайная величина X называется ***непрерывной,*** если ее функция распределения $F(x)$ непрерывна и дифференцируема всюду, за исключением, быть может, конечного числа точек.

Определение 7.2. ***Плотностью*** $f(x)$ распределения (или плотностью вероятностей) непрерывной случайной величины X в точке x называется производная функции распределения $F(x)$ в этой точке, т.е.

$$f(x) = F'(x).$$

Плотность распределения — одна из форм закона распределения, однако, в отличие от функции распределения, она определена только для непрерывной случайной величины.

Свойства функции распределения

1) $P(a < X < b) = \int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$ Отметим, что:

$$P(a < X < b) = P(a \leqslant X < b) = P(a < X \leqslant b) = P(a \leqslant X \leqslant b).$$

2) $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)\,dx.$

3) $f(x) \geqslant 0, \ \forall x.$

4) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$ — условие нормировки.

Числовые характеристики

$$M[X] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\,dx,$$

$$D[X] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x - m_X)^2 f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx - m_X^2,$$

при условии, что эти несобственные интегралы сходятся абсолютно.

$\sigma[X] = \sqrt{D[X]}\,.$

Пример 7.1. Задана функция распределения случайной величины X

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\,e^{-|x+3|} & , \quad x \leqslant -3 \\ 1 - \frac{1}{2}\,e^{-|x+3|}, & \quad x > -3. \end{cases}$$

1) Найдите плотность вероятностей $f(x)$, числовые характеристики $M[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$.
2) Постройте графики функций $f(x)$, $F(x)$.
3) Вычислите $P(X<2)$.

Решение.

1) Плотность вероятностей найдем по формуле $f(x)=F'(x)$, для чего сначала раскроем модуль с учетом принимаемых значений x.

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\,e^{x+3} & , \quad x \leqslant -3 \\ 1 - \frac{1}{2}\,e^{-x-3}, & \quad x > -3. \end{cases}$$

Тогда

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\,e^{x+3} & , \quad x \leqslant -3 \\ \frac{1}{2}\,e^{-x-3}, & \quad x > -3. \end{cases}$$

$$M[X] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{-3} x\,e^{x+3}\,dx + \frac{1}{2}\int\limits_{-3}^{+\infty} x\,e^{-x-3}\,dx =$$

$$= \begin{bmatrix} \text{применяем формулу} \\ \text{интегрирования по частям} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\,x\,e^{x+3}\Big|_{-\infty}^{-3} - \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{-3} e^{x+3}\,dx - \frac{1}{2}\,x\,e^{-x-3}\Big|_{-3}^{+\infty} + \frac{1}{2}\int\limits_{-3}^{+\infty} e^{-x-3}\,dx.$$

При вычислении интегралов будет учтено, что

$\lim\limits_{x\to-\infty} x\,e^{x+3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{e^{-x-3}} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = 0,$ так как показательная функция растет быстрее любой степенной. И аналогично

$\lim\limits_{x\to+\infty} x\,e^{-x-3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^{x+3}} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = 0.$

Тогда

$$M[X] = -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\,e^{x+3}\Big|_{-\infty}^{-3} - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\,e^{-x-3}\Big|_{-3}^{+\infty} =$$

$$= -\frac{3}{2} - \frac{1}{2} + 0 - \frac{3}{2} - 0 + \frac{1}{2} = -3.$$

$$D[X] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx - m_X^2 = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{-3} x^2 e^{x+3}dx + \frac{1}{2}\int\limits_{-3}^{+\infty} x^2 e^{-x-3}dx - 9 =$$

$$= \begin{bmatrix}\text{применяем формулу}\\ \text{интегрирования по частям}\end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 e^{x+3}\Big|_{-\infty}^{-3} - \int\limits_{-\infty}^{-3} x\,e^{x+3}dx - \frac{1}{2}x^2 e^{-x-3}\Big|_{-3}^{+\infty} + \int\limits_{-3}^{+\infty} x\,e^{-x-3}dx - 9 =$$

$$= 3 + e^{x+3}\Big|_{-\infty}^{-3} - 3 - e^{-x-3}\Big|_{-3}^{+\infty} = 1 - 0 - 0 + 1 = 2.$$

При вычислении $D[X]$ было учтено, что

$$\lim_{x\to-\infty} x^2 e^{x+3} = \lim_{x\to-\infty} x\,e^{x+3} = 0,$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-x-3} = \lim_{x\to+\infty} x\,e^{-x-3} = 0.$$

$$\sigma[X] = \sqrt{D[X]} = \sqrt{2}\,.$$

2) Графики функций $f(x)$ и $F(x)$.

При $x \leqslant -3$ построим график функции $y = \frac{1}{2}\,e^{x+3}$. Это положительная монотонная возрастающая функция, следовательно, ее наибольшее значение получаем при $x = -3$. А так как $y'' = \frac{1}{2}\,e^{x+3} > 0$, $\forall x \leqslant -3$, то график функции будет вогнутым, и $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\,e^{x+3}\right) = 0$.

При $x > -3$ строим график функции $y = \frac{1}{2}\,e^{-x-3}$. Это положительная монотонная убывающая функция, и ее наибольшее значение получаем при $x \to -3+0$. Так как $y'' = \frac{1}{2}\,e^{-x-3} > 0$, $\forall x > -3$, то график функции вогнутый, и $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\,e^{-x-3}\right) = 0$. С учетом сказанного изобразим график плотности на рис. 4.

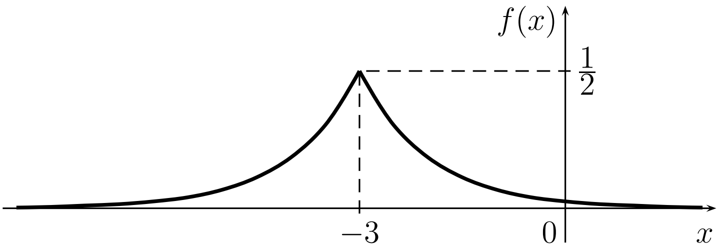


Рис. 4

Построим график функции распределения.

При $x \leqslant -3$ строим график функции $y = \frac{1}{2}\, e^{x+3}$, как это было сделано для плотности $f(x)$.

При $x > -3$ построим график функции $y = 1 - \frac{1}{2}\, e^{-x-3}$. Так как $y' = \frac{1}{2}\, e^{-x-3} > 0$, $\forall x > -3$, то функция возрастает при указанных x. Так как $y'' = -\frac{1}{2}\, e^{-x-3} < 0$, $\forall x > -3$, то график функции выпуклый. Кроме того

$$\lim_{x \to -3+0} \left(1 - \frac{1}{2}\, e^{-x-3}\right) = \frac{1}{2},$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{2}\, e^{-x-3}\right) = 1.$$

Построим график функции распределения на рис. 5.

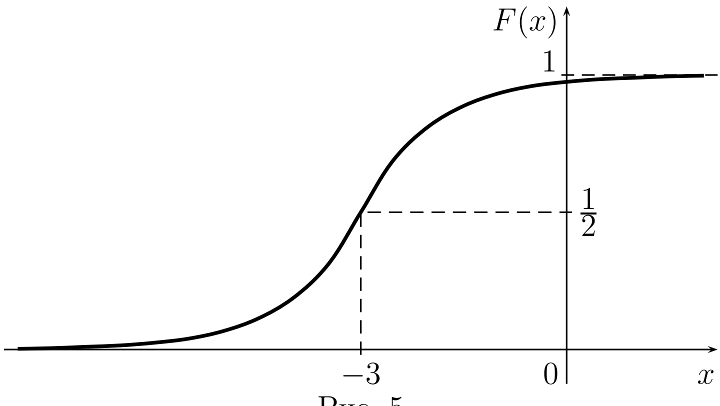


Рис. 5

Замечание. При построении графиков функций $f(x)$ и $F(x)$ можно было использовать метод сдвигов и деформаций.

3) Найдем $P(X<2)$ двумя способами.

$$P(X<2)=P(-\infty<X<2)=F(2)-F(-\infty)=$$
$$=1-\frac{1}{2}e^{-2-3}-0=1-\frac{1}{2}e^{-5}\approx 0{,}99663.$$

$$P(X<2)=\int\limits_{-\infty}^{2}f(x)\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{-3}e^{x+3}\,dx+\frac{1}{2}\int\limits_{-3}^{2}e^{-x-3}\,dx=$$
$$=\frac{1}{2}e^{x+3}\Big|_{-\infty}^{-3}-\frac{1}{2}e^{-x-3}\Big|_{-3}^{2}=\frac{1}{2}-0-\frac{1}{2}e^{-5}+\frac{1}{2}=$$
$$=1-\frac{1}{2}e^{-5}\approx 0{,}99663.$$

Пример 7.2. Случайная величина X имеет плотность вероятностей

$$f(x)=\begin{cases}A\cos^2 x\,, & |x|<\dfrac{\pi}{2}\\ \quad 0 \quad, & |x|\geqslant\dfrac{\pi}{2},\end{cases}\qquad \text{где } A - const.$$

1) Определите значение параметра A, найдите функцию распределения $F(x)$.
2) Постройте графики функций $f(x)$, $F(x)$.
3) Вычислите $P\left(\frac{\pi}{6}<X<\frac{3\pi}{4}\right)$ и числовые характеристики $M[X]$, $D[X]$, $\sigma[X]$.
4) Определите, с какой вероятностью выполняется правило «трех сигм».

Решение.

1) Значение параметра A найдем из условия нормировки

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx=1.$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx=\int\limits_{-\infty}^{-\frac{\pi}{2}}0\,dx+\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}A\cos^2 x\,dx+\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty}0\,dx=A\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{2}\,dx=$$
$$=\frac{A}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}=\frac{A}{2}\left(\frac{\pi}{2}+0+\frac{\pi}{2}-0\right)=\frac{\pi}{2}A.$$

$$\frac{\pi}{2}A=1\ \Rightarrow\ A=\frac{2}{\pi},$$

и плотность вероятностей принимает вид

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\cos^2 x\,, & |x|<\dfrac{\pi}{2}\\ \quad 0 \quad, & |x|\geqslant\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$$

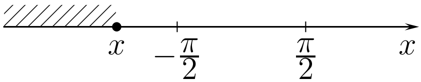
или для удобства вычислений перепишем $f(x)$ в виде:

$$f(x)=\begin{cases}\quad 0 \quad, & x\leqslant-\dfrac{\pi}{2},\\ \dfrac{2}{\pi}\cos^2 x\,, & -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2},\\ \quad 0 \quad, & x\geqslant\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Функцию распределения найдем по формуле

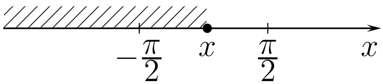
$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)\,dx.$$

а) $x\leqslant-\dfrac{\pi}{2}$



$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} 0\ dx=0.$$

б) $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$



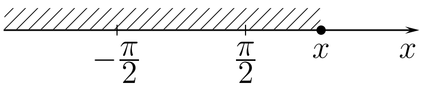
Применяя свойство аддитивности определенного интеграла, получаем

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)\,dx=\int\limits_{-\infty}^{-\frac{\pi}{2}} 0\ dx+\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\frac{2}{\pi}\cos^2 x\,dx=$$

$$=0+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{x}(1+\cos 2x)\,dx=\frac{1}{\pi}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{x}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\pi}{2}-0\right)=\frac{1}{2\pi}\big(2x+\sin 2x+\pi\big).$$

г) $x\geqslant\dfrac{\pi}{2}$



$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{-\frac{\pi}{2}} 0\,dx + \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi}\cos^2 x\,dx + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{x} 0\,dx = 0 + 1 + 0 = 1$$

с учетом условия нормировки.

Объединяя полученные результаты, запишем функцию распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -\frac{\pi}{2}, \\ \frac{1}{2\pi}\big(2x + \sin 2x + \pi\big), & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \\ 1, & x \geqslant \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

2) Построим графики $f(x)$ и $F(x)$.

График функции $y = \frac{2}{\pi}\cos^2 x = \frac{1}{\pi}(1 + \cos 2x)$ при $|x| < \frac{\pi}{2}$ построим методом сдвигов и деформаций, используя последовательность действий:

а) $y = \cos x$ (рис. 6),
б) $y = \cos 2x$ (рис. 7),
в) $y = 1 + \cos 2x$ (рис. 8),
г) $y = \frac{1}{\pi}(1 + \cos 2x)$ (рис. 9).

а) Построим график функции $y = \cos x$ на отрезке $[-\pi; \pi]$, так как следующий график б) на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ получим сжатием графика а) в два раза к оси Oy

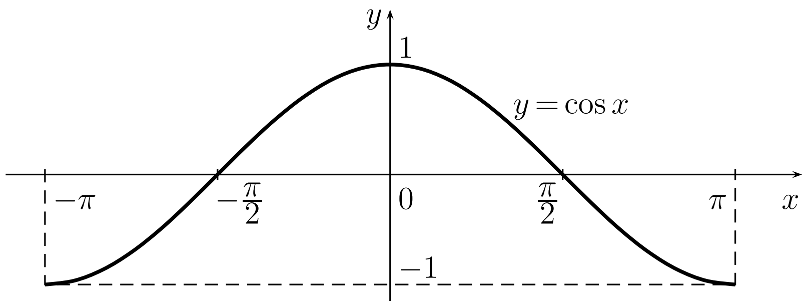


Рис. 6

б) График функции $y=\cos 2x$ получается из графика а) функции $y=\cos x$ сжатием последнего в 2 раза к оси Oy.

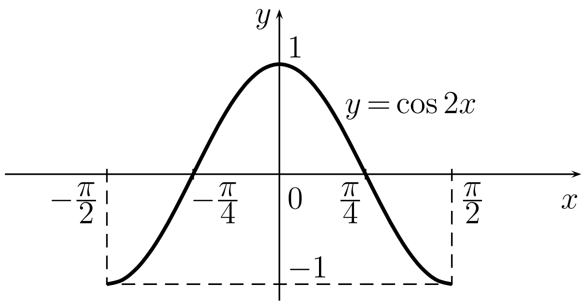


Рис. 7

в) График функции $y=1+\cos 2x$ получается сдвигом графика б) функции $y=\cos 2x$ на 1 единицу вверх вдоль оси Oy.

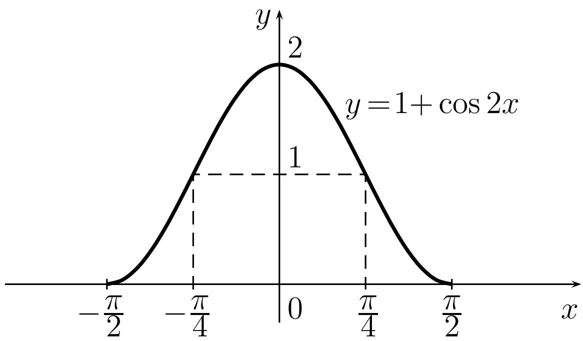


Рис. 8

г) График функции $y=\frac{1}{\pi}\big(1+\cos 2x\big)$ получается из графика в) функции $y=1+\cos 2x$ сжатием последнего в π раз к оси Ox.

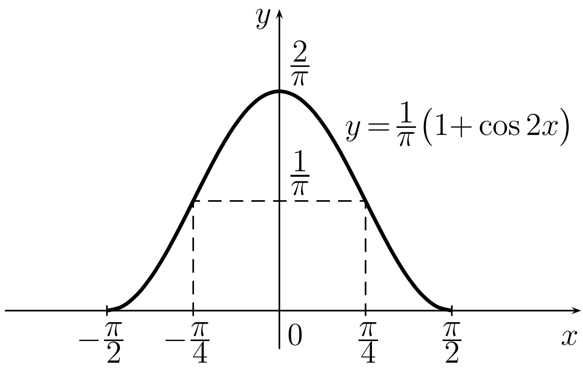


Рис. 9

Теперь можем построить график $f(x)$ плотности вероятностей случайной величины X (рис. 10).

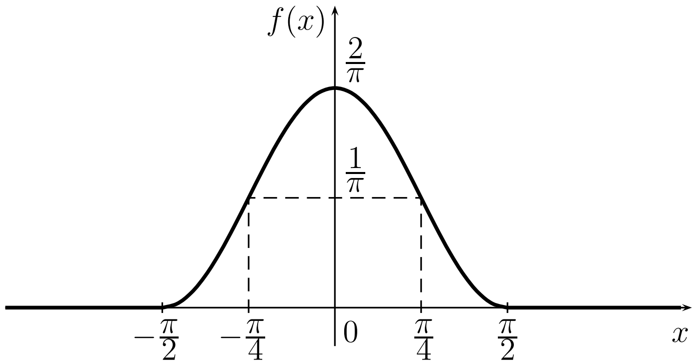


Рис. 10

Часть графика функции распределения, а именно, график функции $y=\dfrac{1}{2\pi}\left(2x+\sin 2x+\pi\right)$, $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ построим методом дифференциального исчисления.

Так как $y'=\dfrac{1}{\pi}(1+\cos 2x)\geqslant 0$, $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, то функция монотонно возрастает при указанных x.

Найдем $y''=-\dfrac{2}{\pi}\sin 2x$. Критическими точками функции $y=\sin 2x$ на промежутке $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ будут $x_1=0$, $x_2=\dfrac{\pi}{2}$.

Поэтому $y'' > 0$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ и $y'' < 0$ при $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Следовательно, график функции $y = \frac{1}{2\pi}\left(2x + \sin 2x + \pi\right)$ на интервале $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ будет вогнутым, а на интервале $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ — выпуклым.

Кроме того,

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}+0} \frac{1}{2\pi}\left(2x + \sin 2x + \pi\right) = 0,$$

$$F(0) = \frac{1}{2}, \quad F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Используя результаты исследований, получаем график функции распределения $F(x)$ (рис. 11).

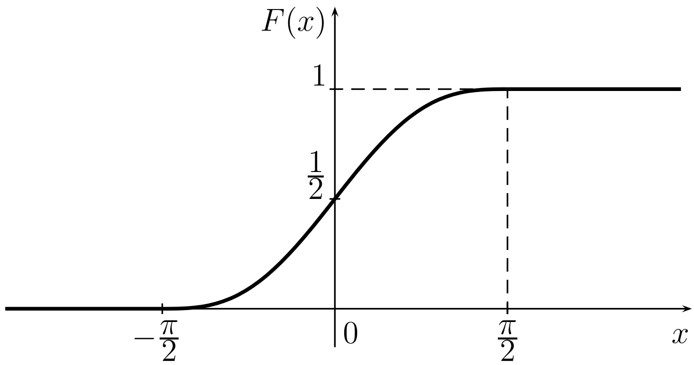


Рис. 11

3) Вероятность $P\left(\frac{\pi}{6} < X < \frac{3\pi}{4}\right)$ вычислим двумя способами.

$$P\left(\frac{\pi}{6} < X < \frac{3\pi}{4}\right) = F\left(\frac{3\pi}{4}\right) - F\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 - \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3} + \pi\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \approx 0{,}19550.$$

$$P\left(\frac{\pi}{6} < X < \frac{3\pi}{4}\right) = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x)\,dx = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi}\cos^2 x\,dx + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} 0\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\bigl(1+\cos 2x\bigr)\,dx = \frac{1}{\pi}\Bigl(x+\frac{1}{2}\sin 2x\Bigr)\Bigr|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\Bigl(\frac{\pi}{2}+0-\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\Bigr) = \frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4\pi} =$$

$$= \frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4\pi} \approx 0{,}19550.$$

Найдем числовые характеристики X.

$$m_X = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{-\frac{\pi}{2}} x\cdot 0\;dx + \frac{2}{\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\cos^2 x\,dx + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} x\cdot 0\;dx =$$

$= 0+0+0 = 0,$ так как второй интеграл с симметричными пределами интегрирования от нечетной функции.

$$D_X = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2\,f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{-\frac{\pi}{2}} x^2\cdot 0\;dx + \frac{2}{\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^2 x\,dx + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} x^2\cdot 0\;dx =$$

$$= \begin{bmatrix}\text{второй интеграл с сим-}\\ \text{метричными пределами}\\ \text{интегрирования от чет-}\\ \text{ной функции}\end{bmatrix} = 0 + \frac{4}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^2 x\,dx + 0 =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x^2(1+\cos 2x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\,dx + \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos 2x\,dx =$$

$$= \frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{\pi}\,x^2\sin 2x\Bigr|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2x\,dx =$$

$$= \frac{\pi^2}{12} + 0 - 0 + \frac{1}{\pi}\,x\cos 2x\Bigr|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\,dx =$$

$$= \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi}\sin 2x\Bigr|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2} - 0 + 0 = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2} = \frac{\pi^2-6}{12}.$$

$$\sigma_X = \sqrt{D_X} = \sqrt{\frac{\pi^2-6}{12}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi^2-6}{3}}.$$

4) Зная числовые характеристики m_X и σ_X, можно получить приближенное представление о диапазоне возможных значений случайной величины. А именно, значения случайной величины X с большой долей вероятности лежат в интервале $\big(m_X-3\sigma_X; m_X+3\sigma_X\big)$. Это правило называется ***правилом «трех сигм»***. Найдем вероятность попадания значений случайной величины X в этот интервал.

$$P\big(m_X-3\sigma_X<X<m_X+3\sigma_X\big)=$$
$$=P\left(-\frac{\sqrt{3(\pi^2-6)}}{2}<X<\frac{\sqrt{3(\pi^2-6)}}{2}\right)=$$
$$=F\left(\frac{\sqrt{3(\pi^2-6)}}{2}\right)-F\left(-\frac{\sqrt{3(\pi^2-6)}}{2}\right).$$

Сравним значения $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\sqrt{3(\pi^2-6)}}{2}$, или π и $\sqrt{3(\pi^2-6)}$. Найдем квадраты этих чисел π^2 и $3(\pi^2-6)$. И так как $\pi^2-3(\pi^2-6)=18-2\pi^2<0$, то $\pi^2<3(\pi^2-6)$, а значит, $\frac{\sqrt{3(\pi^2-6)}}{2}>\frac{\pi}{2}$ и $F\left(\frac{\sqrt{3(\pi^2-6)}}{2}\right)=1$. Аналогично, $-\frac{\sqrt{3(\pi^2-6)}}{2}<-\frac{\pi}{2}$ и $F\left(\frac{\sqrt{3(\pi^2-6)}}{2}\right)=0$. Следовательно, $P\big(m_X-3\sigma_X<X<m_X+3\sigma_X\big)=1-0=1$, т.е. правило «трех сигм» для данной случайной величины выполняется всегда.

Список литературы

[1] *Вентцель Е. С.* Теория вероятностей [Текст] : [учеб. для втузов] / Е. С. Вентцель. - 11-е изд., стер. - М.: КНОРУС, 2010. - 658 с. - (Technology).

[2] *Вентцель Е. С.* Задачи и упражнения по теории вероятностей [Текст] : [учеб. пособие для втузов] / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. - 8 -е изд., стер. - М.: КНОРУС, 2010. - 493 с. - (Mathematics).

[3] *Ефимов Е. А.* Теория вероятностей [Электронный ресурс] : типовые расчеты : учеб. пособие / Е. А. Ефимов, О. С. Иванова, Л. В. Коломиец ; М-во образования Рос. Федерации, Самар. гос. аэрокосм. ун-т им. С. П. Королева. - Самара, 2003. - on-line. - ISBN = 5-7883-0262-5

[4] *Кнут Д. Э.* Всё про TEX: Пер. с англ. — Протвино: АО RDTEX, 2003.— 592 с.

[5] *Львовский С. М.* Набор и верстка в системе LATEX. — 3-е изд., испр. и доп. — М.: МЦНМО, 2003. — 448 с.

[6] *Тарасевич Ю. Ю.* LATEX 2_ε. Система подготовки математической и естественнонаучной документации.— Электронное учеб. пособие. — Астраханский гос. пед. унив., 2002. — 33 с.

Методические материалы

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Методические указания

Составители ***Бушков Станислав Владимирович***
Ефимов Евгений Александрович

Компьютерный набор и верстка в LaTeX Е. А. Ефимов

Редакционно-издательская обработка
издательства Самарского университета

Подписано в печать 20.04.2023. Формат 64x84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Печ.л. 3,0 .
Тираж 27 экз. Заказ . Арт. - 3 (Р1МУ)/2023.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С. П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)
443086, САМАРА, МОСКОВСКОЕ ШОССЕ, 34.

Издательство Самарского университета.
443086, Самара, Московское шоссе, 34.