МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»
(Самарский университет)

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВРЕМЕНИ БЕЗОТКАЗНОЙ РАБОТЫ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ОПРЕДЕЛИТЕЛЬНЫХ ИСПЫТАНИЙ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве методических указаний для студентов Самарского университета, обучающихся по программам высшего образования по направлению подготовки 24.03.01 Ракетные комплексы и космонавтика и специальности 24.05.07 Самолето- и вертолетостроение

Составители: В.И. Богданович,
М.Г. Гиорбелидзе

САМАРА
Издательство Самарского университета
2017

УДК 629.7.01(075)
ББК 39.53я7

Составители: ***В.И. Богданович, М.Г. Гиорбелидзе***

Рецензент д-р техн. наук, проф. А. Н. К о п т е в

Статистическая оценка закона распределения времени безотказной работы по результатам определительных испытаний: метод. указания к практической работе / *В.И. Богданович, М.Г. Гиорбелидзе*. – Самара: Изд-во Самарского университета, 2017. – 28 с.

Изложены теоретические основы, порядок выполнения и 20 вариантов заданий на проведение статистической оценки закона распределения времени безотказной работы технического изделия по результатам определительных испытаний. В результате выполнения работы студенты осваивают методику обработки статистического материала и построение гистограмм распределения отказов изделия, методику анализа гистограмм и выдвижение гипотезы о их выравнивании одним из теоретических распределений, методику проверки гипотезы по критерию Пирсона и расчет гамма-процентной наработки изделия с целью назначения обоснованного ресурса его эксплуатации.

Предназначены для студентов, обучающихся по направлению подготовки 24.03.01 Ракетные комплексы и космонавтика и специальности 24.05.07 Самолето- и вертолетостроение.

Подготовлено на кафедре производства летательных аппаратов и управления качеством в машиностроении.

УДК 629.7.01(075)
ББК 39.53я7

Цель работы: изучение методики обработки экспериментальных данных и выравнивания эмпирических распределений, статистической оценки правдоподобия гипотез и оценки технического совершенства изделия с позиции показателей надежности.

Введение

Возникающие отказы технических объектов и отклонения параметров качества при их изготовлении определяются случайными неблагоприятными сочетаниями многих факторов. Случайность заключается в том, что невозможно точно указать момент возникновения события или получаемое значение параметра.

Например, рассеяние ресурсов по критерию усталости, оцениваемое отношением наибольшего ресурса к наименьшему достигает 40. Значительным является рассеяние ресурсов по износу и коррозии. При выполнении любой технологической операции также возникает рассеяние параметров качества изделий.

Поэтому в расчетах на надежность многие параметры рассматриваются как случайные величины. Они могут быть как непрерывного, так и дискретного типа.

В математической теории надежности решаются в основном две задачи. Первая – *вероятностная*, заключающаяся в том, чтобы по известным функциям распределения вероятности наступления событий вычислить нужные показатели надежности и дать прогноз выполнения задания. Вторая задача называется *статистической* и заключается в том, что по результатам функционирования технических систем проводится оценка показателей надежности.

При решении второй задачи надежности, в зависимости от конкретных технических систем и целей, используются следующие методы: расчетный; опытно-статистический; регистрационный; экспертный. В настоящей работе рассмотрен опытно-статистический метод обработки экспериментальных данных и выравнивания эмпирических распределений, статистической оценки правдоподобия гипотез и оценки технического совершенства изделия с позиции показателей надежности.

1 Теоретические основы

Пусть технический объект начинает работу в момент времени $t=0$, а в момент времени $t=T$ происходит его отказ.

Отказ – это случайное событие, поэтому при испытании различных однотипных систем время наступления отказа $t=T$ будет различным.

Следовательно, время T – *наработка до отказа* является случайной величиной.

Множество возможных значений наработок до отказа T, называемое *генеральной совокупностью*, совпадает с множеством действительных чисел $[0;\infty)$.

При проведении испытаний мы можем испытать только некоторое конечное число объектов N. При этом получается конечный набор чисел $T_1 \ldots T_N$. Этот конечный набор называется *выборкой* из генеральной совокупности, а число N – объемом выборки. Очевидно, что если мы возьмем N других элементов и опять проведем испытания, то получим выборку, состоящую из других значений T_i.

Поэтому все числовые характеристики, полученные из выборки, также являются случайными. Они называются статистическими оценками числовых характеристик.

Рассмотрим методику обработки статистических данных для определения закона распределения наработки до отказа.

Возьмем выборку из N невосстанавливаемых объектов. Запустим их в работу. Пусть за время $t_{\max}$ отказали все объекты. В результате мы получим набор чисел $T_1, T_2 \ldots T_N$. Проводим упорядочение этого набора, то есть все значения T_i располагаем в порядке их возрастания. Полученный упорядоченный ряд носит название *вариационного ряда*.

Этот вариационный ряд описывает *полную группу событий* (отказов) поставленных на испытание изделий. В связи с тем, что из опытных данных, а также из чисто интуитивных соображений, все значения T_i различны, поэтому можно считать, что любые два или более событий не могут появиться одновременно. Такие события называются *несовместимыми*. По условиям симметрии испытаний у нас нет оснований считать, что какое-то из этих событий является более возможным, чем любое другое. Такие события называются *равновозможными*.

При независимых испытаниях вероятность некоторого события A для случая, когда события составляют полную группу, являются несовместимыми и равновозможными, оценивается как отношение числа случаев, благоприятных появлению данного события, к общему числу случаев, то есть дается соотношением

$$\hat{P}\{A\} = n/N , \tag{1}$$

где n – число случаев, благоприятных событию A, N – общее число случаев.

В нашем примере эмпирическая (или статистическая) оценка вероятности (1) (также называемая частотой или частотностью наступления события) будет для всех событий наступления отказов в моменты времени T_i одинакова и равна

$$\hat{P}\{T_i\} = 1/N , \tag{2}$$

так как число случаев, благоприятных отказу, в момент T_i равно одному.

Таким образом, нашему испытанию N объектов можно поставить в соответствие формализованное математическое описание, заключающееся в представлении результатов испытания рядом распределения случайной величины T в виде табл. 1.

Таблица 1. *Ряд распределения*

T	T_1	T_2	$\dots$	T_N
$\hat{P}\{T_i\}$	$1/N$	$1/N$	$\dots$	$1/N$

В верхней строке табл. 1 перечислены в порядке возрастания все возможные значения случайной величины T, а в нижней – статистические вероятности наступления этих событий.

В теории вероятности для описания случайных величин, множество возможных реализаций которых может принимать дискретное или непрерывное число значений на конечном или бесконечном интервале, вводится понятие *функции распределения вероятностей (ФРВ)* случайной величины.

По определению ФРВ некоторой случайной величины ξ, имеющей область возможных значений реализации детерминированный интервал $\alpha_н \le \xi \le \alpha_в$, называется функция $F(x)$, значения которой равны вероятности того, что случайная величина ξ принимает значение меньшее, чем значение детерминированной величины x, то есть:

$$F(x) = P\{\alpha_н \le \xi \le \alpha_в\} = P\{\xi < x\}. \tag{3}$$

В рассматриваемом случае, когда случайная величина ξ является наработкой до отказа T, а область возможных реализаций представлена (в общем случае) бесконечным временным интервалом $0 \le t < \infty$, соотношение (3) для ФРВ наработок до отказа (ФРВ отказов) должно быть записано в виде

$$F(t) = P\{T < t\}. \tag{4}$$

Из определения ФРВ следует: она является неубывающей функцией, равной нулю на нижней границе интервала и равной единице на его верхней границе. Следовательно, для табл. 1 эмпирическая (или статистическая) ФРВ отказов принимает значения

$$\hat{F}\{T_i\} = i/N. \tag{5}$$

Поэтому эмпирическая ФРВ отказов в нашем случае представляет собой ступенчатую функцию (рис. 1), равную нулю при $t \le T_1$ и единице $t \ge T_N$.

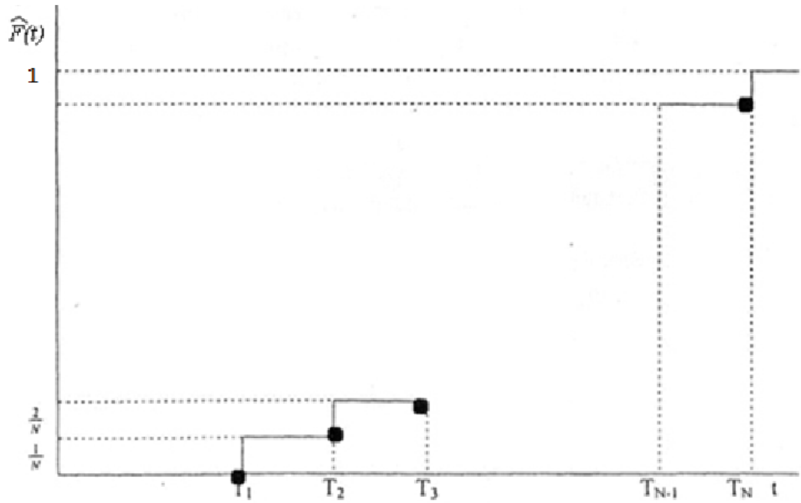

Рис. 1. Функция распределения вероятностей для табл. 1

Внутри этого интервала ФРВ непрерывна слева в точках $t = T_i$, а справа в этой точке претерпевает скачок величиной $1/N$ и имеет N скачков на этом интервале.

При неограниченном увеличении N скачки $\hat{F}\{T_i\}$ станут все более мелкими, а сама она будет приближаться (сходиться по вероятности) к непрерывной функции распределения $F(t)$ случайной величины T.

Для практического использования более удобными являются *группированный статистический ряд* и *гистограмма*.

Для построения группированного статистического ряда и гистограммы отрезок $[T_1; T_N]$ разбивается на k участков или разрядов и подсчитывается число реализаций отказов n_i (табл. 2, строка 2) на каждом временном интервале $\Delta t = (T_N - T_1)/k$ (табл. 2, строка 1).

Частоты или статистические вероятности для каждого интервала определяем в соответствии с (1) по соотношению

$$\hat{P}_i = n_i / N . \qquad (6)$$

Причем при этом естественно будет выполняться условие нормировки статистических вероятностей

$$\sum_{i=1}^{k} \hat{P}_i = 1 . \qquad (7)$$

Статистические вероятности для каждого интервала записываем в третьей строке табл. 2.

Полученная часть табл. 2, состоящая из трех рассмотренных строк, носит название *группированного статистического ряда*. Разделив каждое значение $\hat{P}_i$ на длину интервала $\Delta t = t_{i+1} - t_i$, получим значения *плотностей распределения* статистической вероятности на каждом интервале:

$$\hat{f}_i = \hat{P}_i / \Delta t . \qquad (8)$$

Эти значения записываем в четвертой строке табл. 2. Откладывая по оси абсцисс значения полученных интервалов и строя на каждом интервале как на основании прямоугольник площадью $\hat{P}_i$ или высотой $\hat{f}_i$, получим *гистограмму* плотности распределения эмпирического числа отказов (рис. 2).

Таблица 2. *Таблица группированного статистического ряда, статистической плотности распределения, функции распределения вероятностей и интенсивности отказов*

1	Интервал разбиения	1 $t_1 \div t_2$	2 $t_2 \div t_3$	…	i $t_i \div t_{i+1}$	…	k $t_k \div t_{k+1}$
2	n_i	n_1	n_2	…	n_i	…	n_k
3	$\hat{P}_i$	$\hat{P}_1$	$\hat{P}_2$	…	$\hat{P}_i$	…	$\hat{P}_k$
4	$\hat{f}_i$	$\hat{f}_1$	$\hat{f}_2$	…	$\hat{f}_i$	…	$\hat{f}_k$
5	$\hat{F}_i$	$\hat{F}_1$	$\hat{F}_2$	…	$\hat{F}_i$	…	$\hat{F}_k$
6	$\hat{\lambda}_i$	$\hat{\lambda}_1$	$\hat{\lambda}_2$	…	$\hat{\lambda}_i$	…	$\hat{\lambda}_k$

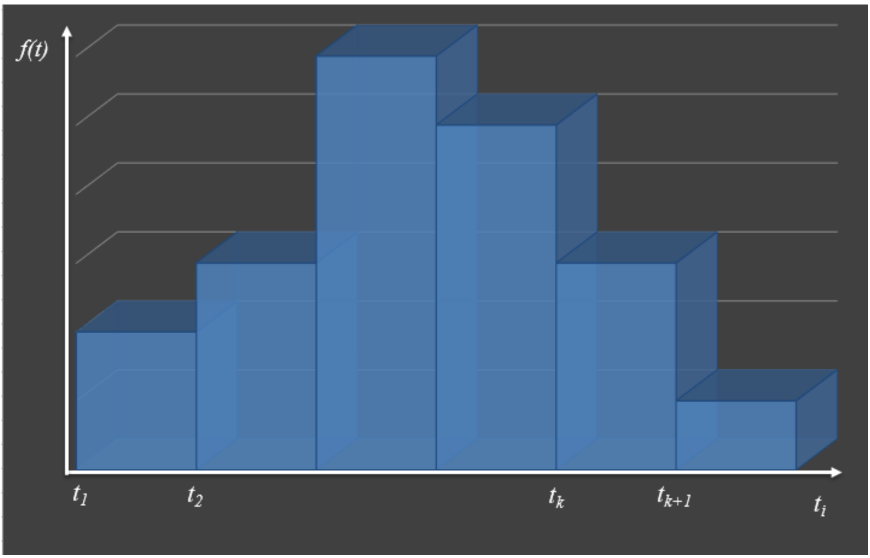

Рис. 2. Гистограмма плотности распределения вероятности наработок до отказа

Имея в своем распоряжении данные табл. 2, строим статистическую функцию распределения вероятности отказов, значения которой на интервалах разбиения в соответствии с (4) рассчитываются по соотношению

$$\hat{F}_i = \sum_{j=1}^{i} \hat{P}_j \, . \tag{9}$$

Значения $\hat{F}_i$ приводим в пятой строке табл. 2. При построении гистограммы $\hat{F}_i$ учитываем, что $\hat{F}_i$ при значениях $t < T_1$ равна нулю, а при значениях $t > T_N$ равна единице.

В шестой строке табл. 2 приводим значения *интенсивности отказов* для каждого интервала разбиения, значения которых определяем по соотношению

$$\hat{\lambda}_i = \hat{f}_i \Big/ \left(1 - \hat{F}_i\right). \tag{10}$$

Интенсивность отказов $\lambda(t)$ определяется как условная плотность ФРВ отказов невосстанавливаемого изделия, определяемая для рассматриваемого момента времени при условии, что до этого момента отказ не наступил. Следовательно интенсивность отказов так же, как и плотность распределения $f(t)$, является дифференциальной характеристикой распределения, учитывающей только возможность возникновения отказа в рассматриваемый момент времени без учета предыстории функционирования изделия в том смысле, что не учитывает отказы, которые могли бы произойти в предыдущие моменты времени.

Гистограмма является важным наглядным вспомогательным средством при принятии гипотезы о виде функции распределения вероятности. Поэтому важно построить ее так, чтобы извлечь из нее максимум полезной информации. Дело в том, что форма гистограммы зависит от объема выборки и величины интервалов разбиения. Действительно, при слишком малом числе интервалов плохо выявляются характерные особенности распределения. С ростом числа интервалов характерные особенности выявляются все лучше, но лишь до определенного предела. При слишком большом числе интервалов гистограмма снова теряет характерные особенности распределения, превращаясь в пределе (когда в каждом интервале не более одного отказа) в чередование пустых интервалов и одинаковых по высоте прямоугольников.

Установлено, что для определения числа разрядов можно пользоваться приближенной формулой

$$k = 1 + 1{,}43\ln(N).$$

Это соотношение хорошо работает при объемах выборки N, составляющих более сотен реализаций. Для объемов же выборки менее 50, с которыми в основном приходится иметь дело при обработке результатов испытаний на надежность, вид гистограммы слишком чувствителен к числу разрядов и величине интервала $\Delta t = (T_N - T_1)/k$, значения которых в этом случае можно использовать лишь как ориентировочные значения.

Такая возможность возникает потому, что рассматриваемый конкретный набор реализаций отказов является случайной выборкой. При испытании другой партии этого же изделия мы получим другие значения наработок до отказа $T_1, T_2 \ldots T_N$, а следовательно другое значение величины интервала. Поэтому, если мы для конкретного набора реализаций изменим в определенной, пусть и не очень большой степени, величину интервала или сделаем их неодинаковыми по величине, или изменим начало их отсчета, или изменим число разрядов, то каждый раз будем получать разный вид гистограмм и различную меру ее расхождения, например, по критерию Пирсона с предполагаемым теоретическим распределением. Из всего набора таких гистограмм естественно считать лучшей ту, у которой количество инверсий, изменение знака приращений высот прямоугольника гистограммы наименьшее. *Поэтому при построении гистограммы необходимо предварительно построить несколько гистограмм для различных вариантов изменения величины интервала, особенно в начале и конце всего интервала реализаций, начала отсчета разрядов и числа интервалов разбиения с учетом их не слишком большого отличия от установленных ориентировочных значений.* А из этих гистограмм для дальнейшей обработки выбрать одну с наименьшим числом инверсий. При этом величину Δt или границы интервалов удобно брать в виде «круглых» чисел. При этом, если значение случайной величины попало в точности на границу интервала, то его делят поровну между этими соседними интервалами, прибавляя по $1/2$ к числам n_i для обоих соседних интервалов.

Следующим этапом исследования является *выравнивание статистического распределения*. Во всяком статистическом распределении присутствуют элементы случайности, обусловленные ограниченностью числа опытов. Задача выравнивания заключается в выборе аналитической формулы, отражающей лишь существенные, наиболее характерные черты статистического материала.

Задача оптимального выбора выравнивающей кривой является в значительной мере неопределенной и не имеет строгого математического решения. Здесь приходится руководствоваться соображениями физики решаемой задачи, характером эмпирической зависимости, оценкой степени точности результатов наблюдений и так далее. Например, гистограмма, показанная на рис. 2 и имеющая колоколообразный симметричный вид, явно наводит на мысль о нормальном распределении. Монотонное же убывание $f(t)$ свидетельствовало бы о показательном распределении как наиболее вероятном. Однако в этом случае следует построить гистограмму интенсивности отказов и, если она примерно постоянна на всем интервале реализаций, то это является подтверждением показательного закона распределения. Если же гистограмма $f(t)$ имеет несимметричный колоколообразный вид, то это соответствует распределению Вейбулла, а заключение о величине параметра формы этого распределения можно дать из рассмотрения гистограммы интенсивности отказов.

В любом случае наше суждение о законе распределения в принципе является предположением – *гипотезой*. Для ответа на вопрос о совместимости между выдвигаемой гипотезой и результатами наблюдений используются *критерии согласия*, наиболее употребительным среди которых является критерий χ^2 (хи-квадрат) Пирсона (К.Э. Пирсон – английский статистик).

В качестве *меры расхождения* между гипотетическим и эмпирическим распределениями используется величина

$R = N\sum_{i=1}^{k}\frac{(\overline{p}_i - p_i)^2}{p_i}$, где p_i – эмпирические вероятности (частоты), а p_i – гипотетические вероятности попадания случайной величины T в i-й интервал.

Величина R представляет собой взвешенную сумму квадратов разностей между гипотетическими и наблюденными частностями попадания случайной величины в i-й интервал:

$$R = \sum_{i=1}^{k}\frac{(n_i - Np_i)^2}{Np_i}. \quad (11)$$

Как доказал Пирсон, величина R с возрастанием N стремится к табличному распределению $\chi_r^{\ 2}$ с числом степеней свободы r. Число *степеней свободы* связано с числом разрядов соотношением $r = k - m$, где m – число связей, наложенных на p_i, $i = 1,2,\ldots k$ (обычно $m = 1 \div 3$). Число связей, наложенных на величину p_i, обычно равно трем, и этими связями являются условия нормировки вероятности на единицу и равенство математического ожидания, дисперсии теоретического распределения величине средней наработки до отказа и квадрату среднеквадратического отклонения эмпирического распределения.

Алгоритм оценки правдоподобия гипотезы по критерию $\chi_r^{\ 2}$ сводится к следующему. В дополнение к группированному ряду по гипотетической плотности распределения вычисляются гипотетические интервальные вероятности:

$$p_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)dt = F(t_{i+1}) - F(t_i). \quad (12)$$

Вычисляется мера расхождения $R = N\sum_{i=1}^{k}\frac{(\overline{p}_i - p_i)^2}{p_i}$.

По таблице распределения $\chi_r^{\ 2}$ (Приложение Б) для заданного числа степеней свободы r находится вероятность (в верхней строке таблицы) того, что величина $\chi_r^{\ 2}$ превзойдет полученное значение меры расхождения (11) (Приложение Б).

Если найденная вероятность достаточно мала (меньше 0,1), то выдвинутую гипотезу следует отвергнуть как малоправдоподобную. В противном случае принять как не опровергаемую результатами наблюдений.

2 Порядок выполнения работы

Порядок выполнения работы рассмотрим на примере обработки результатов определительных испытаний топливного насоса авиационного двигателя.

На испытания были поставлены 20 устройств ($N = 20$) и зафиксированы следующие моменты отказов (в часах).

t_i: 943; 7400; 10640; 8850; 12780; 7190; 11600; 8640; 5904; 5996; 16820; 6900; 2900; 10240; 10770; 7100; 9630; 5260; 12350; 10150.

2.1 Строим вариационный ряд, располагая значения T_i в порядке возрастания, а результаты заносим в табл. 3.

Таблица 3. *Упорядоченный вариационный ряд*

i	$T_i \times 10^3$	$(T_i - \overline{m}_t)^2 \times 10^6$	i	$T_i \times 10^3$	$(T_i - \overline{m}_t)^2 \times 10^6$
1	0,943	58,68	11	8,850	0,06
2	2,900	32,52	12	9,630	1,06
3	5,260	11,16	13	10,150	2,40
4	5,904	7,29	14	10,240	2,69
5	5,996	6,78	15	10,640	4,16
6	6,900	2,89	16	10,770	4,71
7	7,100	2,25	17	11,600	9,00
8	7,190	1,99	18	12,350	14,06
9	7,400	1,44	19	12,780	17,47
10	8,640	0,00	20	16,820	67,57

2.2 Вычисляем среднее значение наработки до отказа $\overline{m}_t$ по формуле:

$$\overline{m}_t = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} T_i = 8{,}603 \text{ тыс. ч.} \tag{13}$$

2.3 Заполняем последний столбец табл. 3 и вычисляем величину квадрата среднеквадратичного отклонения наработок до отказа (оценка дисперсии) $\overline{\sigma}_t^{\,2}$ и, извлекая из полученного значения корень квадратный, получаем величину статистической оценки стандартного отклонения:

$$\overline{\sigma}_t^{\,2} = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(T_i - \overline{m}_t\right)^2 = 13{,}06; \quad \overline{\sigma}_t = 3{,}61 \text{ тыс. ч.} \tag{14}$$

2.4 Построение гистограммы.

2.4.1 Определяем количество разрядов по формуле $k = 1 + 1{,}43\ln(N) \approx 5$ и определяем величину интервала времени для выбранного числа разрядов $\Delta t = \left(T_N - T_1\right)/k = \left(16820 - 943\right)/5 = 3170$ ч. Для удобства дальнейших вычислений в качестве значения Δt выбираем его округленное значение $\Delta t = 3000$ ч, а начало первого разряда выбираем не при значении 943 ч, а в начальный момент времени. При этом величина интервала времени для 1 – 4-го разрядов будет 3000 ч, а для последнего 5-го разряда этот интервал надо увеличить до 5000 ч, чтобы он включал все экспериментальные данные (табл. 4).

2.4.2 Заполняем табл. 4, которая соответствует ранее рассмотренной табл. 2 с другим расположением строк и столбцов.

Таблица 4. *Экспериментальные данные для построения группированного статистического ряда и гистограмм плотности распределения вероятности, функции распределения вероятности и интенсивности отказов*

i	$t_i \div t_{i+1}$, 10^3 ч	n_i	$\overline{p}_i$	$\overline{f}_i$, 10^{-3} ч	$\overline{F}_i$	$\overline{\lambda}_i$, 10^{-3} ч
1	0÷3	2	0,100	0,033	0,100	0,037
2	3÷6	3	0,150	0,050	0,250	0,067
3	6÷9	6	0,300	0,100	0,550	0,220
4	9÷12	6	0,300	0,100	0,850	0,667
5	12÷17	3	0,150	0,030	1,0	-

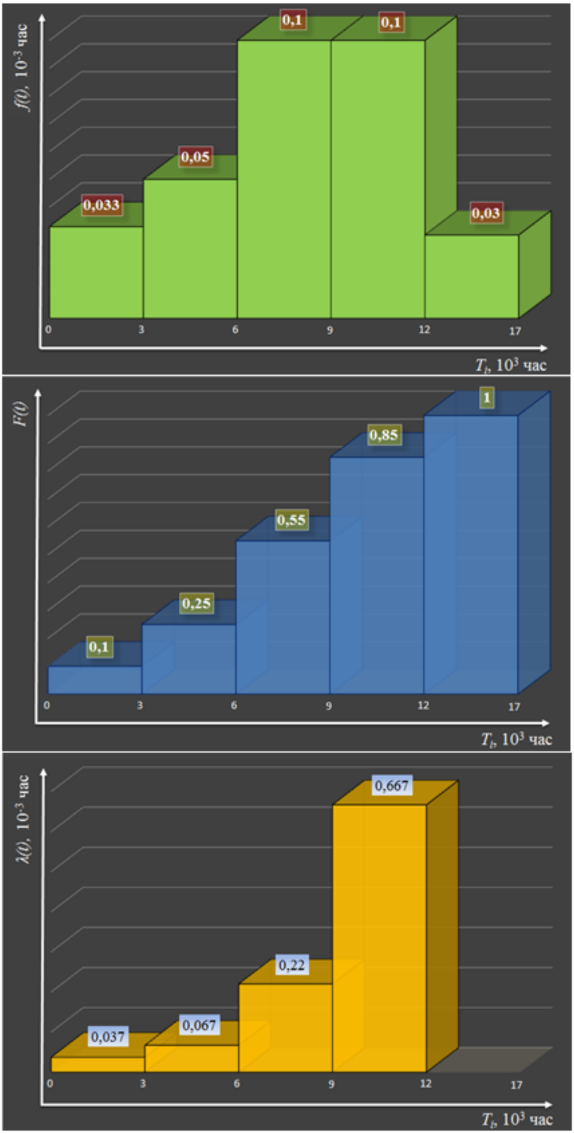

Рис. 3. Гистограммы плотности распределения наработок до отказа, функции распределения вероятности отказов и интенсивности отказов

2.4.3 Построение гипотетического закона распределения.

Исходя из вида полученной гистограммы для $\bar{f}_i$, можно предположить, что распределение вероятности наработок до отказа подчиняется нормальному закону (усеченное на интервале $[0;\ \infty)$) распределения с параметрами $\overline{m}_t$; $\bar{\sigma}_t^{\ 2}$:

$$f(t)=\frac{C}{\bar{\sigma}_t\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{\left(t-\overline{m}_t\right)^2}{2\bar{\sigma}_t^{\ 2}}\right], \qquad (15)$$

где C – нормировочный множитель; $\Phi(z)$ – табличная функция Лапласа (Приложение А), определяемые соотношениями:

$$C=\frac{1}{\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{\overline{m}_t}{\bar{\sigma}_t}\right)}, \qquad (16)$$

$$\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^z \exp\left(-x^2/2\right)dx\,. \qquad (17)$$

Вычисляем $\dfrac{\overline{m}_t}{\bar{\sigma}_t}\approx 2{,}38$ и по таблице функции Лапласа (Приложение А) находим $\Phi(2{,}38)=0{,}491$. Далее вычисляем $C=1{,}009$. Следовательно без потери точности с погрешностью менее 1 % можно пользоваться стандартным нормальным законом, положив в (16) $C=1$:

$$f(t)=\frac{C}{\bar{\sigma}_t\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{\left(t-\overline{m}_t\right)^2}{2\bar{\sigma}_t^{\ 2}}\right]; \qquad (18)$$

$$F(t)=0{,}5+\Phi\left(\frac{t-\overline{m}_t}{\bar{\sigma}_t}\right); \qquad (19)$$

$$P_H(t)=0{,}5-\Phi\left(\frac{t-\overline{m}_t}{\bar{\sigma}_t}\right), \qquad (20)$$

где $P_H(t)$ – функция распределения вероятности безотказной работы (функция надежности), дающая величины безотказной работы в период заданной наработки. Отметим, что в зависимости от варианта выполняемого расчета величину C не обязательно можно принять равной единице, и в этом случае надо пользоваться соотношением (15) и соотношениями (16), (19а)–(20а) в виде:

$$F(t) = C\left[\Phi\left(\frac{t-\overline{m}_t}{\overline{\sigma}_t}\right) + \Phi\left(\frac{\overline{m}_t}{\overline{\sigma}_t}\right)\right]; \tag{19а}$$

$$P_H(t) = 1 - C\left[\Phi\left(\frac{t-\overline{m}_t}{\overline{\sigma}_t}\right) + \Phi\left(\frac{\overline{m}_t}{\overline{\sigma}_t}\right)\right]. \tag{20а}$$

2.4.4 Для проверки этой гипотезы заполняем табл. 5, в которую переносим часть данных из табл. 4.

Гипотетические вероятности $\overline{p}_i$ вычисляем по формуле

$$p_i = F(t_{i+1}) - F(t_i) = C\left[\Phi\left(\frac{t_{i+1}-\overline{m}_t}{\overline{\sigma}_t}\right) - \Phi\left(\frac{t_i-\overline{m}_t}{\overline{\sigma}_t}\right)\right], \tag{21}$$

учитывая, что $\Phi(-z) = -\Phi(z)$. Значения $\Phi(z)$ указаны в таблице Приложения А.

Заполняем столбцы $\overline{p}_i$ и $\dfrac{(\overline{p}_i - p_i)^2}{p_i}$ табл. 5.

Таблица 5. *Исходные данные для определения величины критерия согласия Пирсона*

i	$t_i \div t_{i+1}$	n_i	$\overline{p}_i$	p_i	$\dfrac{(\overline{p}_i - p_i)^2}{p_i}$
1	0÷3	2	0,100	0,052	0,044
2	3÷6	3	0,150	0,175	0,004
3	6÷9	6	0,300	0,308	0,000
4	9÷12	6	0,300	0,283	0,001
5	12÷17	3	0,150	0,169	0,002

2.4.5 Вычисляем меру расхождения Пирсона между гипотетическим и эмпирическим распределениями по формуле:

$$R = N\sum_{i=1}^{k}\frac{(\overline{p}_i - p_i)^2}{p_i} = 1{,}02\,.$$

2.4.6 Находим число степеней свободы распределения $\chi_r^{\ 2}$ по формуле $r = k - 3 = 5 - 3 = 2$, где $k = 5$ – число разрядов гистограммы, 3 – число связей, наложенных на величины p_i.

2.4.7 По таблице распределения $\chi_r^{\ 2}$ (Приложение Б) для $r = 2$ и $\chi_r^{\ 2} = 1{,}02$ находим, что $\alpha \approx 0{,}6$.

Вывод: вычисленное значение вероятности α нельзя считать пренебрежимо малой величиной, следовательно выдвинутую гипотезу о нормальности распределения времени наработки до отказа можно принять как не противоречащую результатам наблюдений и можно считать , что функция распределения вероятности наработок до отказа топливных насосов авиационных двигателей описывается нормальным законом $P_H(t) = 0{,}5 - \Phi\left(\dfrac{t - \overline{m}_t}{\overline{\sigma}_t}\right)$ с величиной средней наработки до отказа $\overline{m}_t = 8{,}603$ тыс. ч и стандартным отклонением $\overline{\sigma}_t = 3{,}61$ тыс. ч.

2.5 Оценим техническое совершенство исследованного насоса с позиций показателей надежности. Найдем какую величину ресурса можно назначить этому изделию, чтобы обеспечить его вероятность безотказной работы $\gamma = 0{,}99$.

Используем соотношение (20) и получим:

$$\gamma = 0{,}99 = P_H(T_\gamma) = 0{,}5 - \Phi\left(\frac{T_\gamma - \overline{m}_t}{\overline{\sigma}_t}\right).$$

Откуда $\Phi\left(\dfrac{T_\gamma - \overline{m}_t}{\overline{\sigma}_t}\right) = -0{,}49$. По таблице Лапласа (Приложение А) находим $\dfrac{T_\gamma - \overline{m}_t}{\overline{\sigma}_t} = -2{,}33$ или $T_\gamma = \overline{m}_t - 2{,}33\overline{\sigma}_t = 0{,}191$ тыс. ч. Поэтому можно назначить ресурс насоса $T_{рес} = 190$ ч с вероятностью безотказной работы не менее 0,99, но не более 0,991.

Отметим, что в зависимости от варианта расчета Вам, возможно, придется использовать не соотношение (20), а соотношение (20а). В таком случае получим:

$$\gamma = 0{,}99 = P_H\,(T_\gamma) = 1 - C\left[\Phi\left(\frac{t - \overline{m}_t}{\overline{\sigma}_t}\right) + \Phi\left(\frac{\overline{m}_t}{\overline{\sigma}_t}\right)\right].$$

Откуда $\Phi\left(\frac{T_\gamma - \overline{m}_t}{\overline{\sigma}_t}\right) = \frac{0{,}01}{C} - \Phi\left(\frac{\overline{m}_t}{\overline{\sigma}_t}\right)$. Далее вычисляем правую часть этого уравнения и по таблице Лапласа находим значение аргумента для $\frac{T_\gamma - \overline{m}_t}{\overline{\sigma}_t}$. После этого, как и в предыдущем случае, рассчитываем ресурс насоса с вероятностью безотказной работы не менее 0,99.

3 Контрольные вопросы

1. Почему возникают отказы технических объектов?

2. Что такое случайная выборка из генеральной совокупности значений случайной величины?

3. Дайте определение понятий: средняя наработка до отказа, математическое ожидание, дисперсия, стандартное отклонение и коэффициент вариации.

4. Дайте определение понятий функции распределения вероятности случайной величины и интенсивность отказов.

5. Приведите соотношение для расчета статистических величин: вероятности, плотности распределения вероятности, функции распределения вероятности и интенсивности отказов случайной величины.

6. Как строится функция распределения вероятностей случайной величины?

7. Какую характеристику случайной величины отражает гистограмма?

8. Плотность распределения вероятности наработок до отказа имеет максимум при $t = \overline{m}_t = 8625$ ч (рис. 3). Означает ли это, что при наработке $t > 8625$ ч изделия отказывают реже?

9. В чем заключается геометрический смысл меры отклонения между гипотетическим и эмпирическим законами распределения, определяемой по критерию $\chi_r{}^2$ Пирсона?

10. Каков вероятностный смысл уровня значимости статистического критерия оценки правдоподобия гипотез?

11. Приведите выражение для плотности распределения вероятности, функции распределения вероятности наработок до отказа и функции распределения вероятности безотказной работы для нормального закона распределения вероятности.

4 Контрольные задания

	Вариант №				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
T_i	806	1781	4243	513	3940
	990	3859	6520	1091	6564
	2786	4911	7432	2972	6607
	3340	6230	8248	3947	7025
	3872	6932	9442	4046	7342
	4069	6961	9669	4731	7357
	5455	7126	9787	5093	7443
	6158	7381	10010	5201	7648
	6598	7434	10130	5502	7833
	6730	7570	10550	5731	7925
	7350	8444	11420	5928	8190
	7430	9939	11770	6923	8482
	7994	10550	11860	7314	8486
	8148	10750	11920	7575	8657
	8897	11510	12920	7619	8977
	8914	11880	12980	7822	8992
	9475	12040	13070	7887	9136
	10900	12710	13070	8332	9233
	11610	12770	14920	8675	10060
	12370	15500	16360	8889	11590

	Вариант №				
	6	**7**	**8**	**9**	**10**
T_i	2972	3081	909	638	332
	3947	3840	1434	944	1472
	5130	4144	2056	2984	1621
	5502	4416	2593	3217	2038
	5731	4814	2734	4624	2193
	5928	4890	2773	5033	2333
	6046	4929	2861	5607	2458
	6093	5002	3196	6272	2557
	6201	5043	3235	7218	2772
	6731	5125	3541	7373	2826
	6923	5183	3651	7493	2963
	7314	5474	3779	8644	3096
	7375	5589	3954	9085	3224
	7619	5619	4406	9926	3288
	7822	5641	4514	9993	3628
	7887	5973	4681	10000	3848
	8332	5992	5864	10770	4734
	8675	6023	5903	11250	4880
	8889	6638	5973	11490	4936
	10910	7119	6000	12320	5000

	Вариант №				
	11	**12**	**13**	**14**	**15**
T_i	5602	1328	7858	4615	5266
	5947	2536	8272	4640	5357
	6046	3706	8455	4767	5497
	6319	4878	8464	4863	6396
	6405	5156	8914	4921	6504
	6765	5439	9065	4928	6534
	6881	5969	9105	4937	6803
	6932	6574	9162	5071	6872
	7017	6981	9286	5096	6998
	7107	7024	9299	5103	7109
	7128	7459	9324	5122	7320
	7272	8945	9472	5157	7496
	7293	9468	9590	5168	7661
	7384	9494	9650	5201	7702
	7409	9551	9712	5251	7765
	7537	9616	9911	5336	8235
	7902	9683	10140	5372	8318
	8235	10400	10670	5465	8650
	8610	10470	10680	5582	8840
	8967	12380	10760	5598	9004

	Вариант №				
	16	**17**	**18**	**19**	**20**
T_i	3821	909	426	7543	753
	3829	1055	2148	7705	1139
	4186	2108	2525	8047	2540
	4216	3470	3244	8214	4369
	4374	4284	4153	8433	4383
	4583	4600	4189	8556	5463
	4674	5332	4874	8591	5498
	4908	5643	5308	8660	6684
	4950	6033	6252	8782	6706
	5121	6522	6895	8883	6825
	5291	6543	7007	8921	6878
	5468	7398	7153	8998	7023
	5559	8098	7777	9323	7174
	5593	8897	7997	9323	7843
	5712	8909	8429	9398	8028
	5722	9081	10160	9427	8531
	5727	10710	10370	9493	9093
	5881	10880	11120	9661	9121
	6234	11970	12510	9689	9321
	6908	12360	12670	9775	11604

Приложение А

Значения функции Лапласа $\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^z \exp\left(-x^2/2\right)dx$

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0040	0080	0120	0160	0199	0239	0279	0319	0359
0,1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0753
0,2	0793	0832	0871	0910	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0,3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0,4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0,5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0,6	2257	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2517	2549
0,7	2580	2611	2642	2673	2703	2734	2764	2794	2823	2852
0,8	2881	2910	2939	2967	2995	3023	3051	3078	3106	3133
0,9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1,0	3413	3437	3461	3485	3508	3531	3554	3577	3599	3621
1,1	3643	3665	3686	3708	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1,2	3849	3869	3888	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1,3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1,4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1,5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4429	4441
1,6	4452	4463	4474	4484	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1,7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1,8	4641	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4693	4699	4706
1,9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4756	4761	4767
2,0	47725	47778	47831	47882	47932	47981	48030	48077	48124	48169
2,1	48214	48257	48300	48341	48382	48422	48461	48500	48537	48574
2,2	48610	48645	48679	48713	48746	48778	48809	48840	48870	48899
2,3	48928	48956	48983	49010	49036	49061	49086	49111	49135	49158
2,4	49180	49202	49224	49245	49266	49286	49305	49324	49343	49361
2,5	49379	49396	49413	49430	49446	49461	49477	49492	49506	49520
2,6	49534	49547	49560	49573	49585	49597	49609	49621	49632	49643
2,7	49653	49664	49674	49683	49693	49702	49711	49720	49728	49736
2,8	49744	49752	49760	49767	49774	49781	49788	49795	49801	49807
2,9	49813	49819	49825	49831	49836	49841	49846	49851	49856	49861
3	0,49865	49903	49931	49952	49966	49977	49984	49989	49993	49995
4,0	0,499968									
4,5	0,499997									
5,0	0,49999997									

Приложение Б

Значение χ_r^{2} в зависимости от r и α

r	α				
	0,95	**0,90**	**0,80**	**0,70**	**0,50**
1	0,004	0,016	0,064	0,148	0,435
2	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386
3	0.352	0,584	1,005	1,424	2,37
4	0,711	1,064	1,649	2,20	3,36
5	1,145	1,610	2,34	3,00	4,35
6	1,635	2,20	3,07	3,83	5,35
7	2,17	2,83	3,82	4,67	6,35
8	2,73	3,49	4,59	5,53	7,34
9	3,32	4,17	5,38	6,39	8,34
10	3,94	4,86	6,18	7,27	9,34
11	4,58	5,58	6,99	8,15	10,34
12	5 ,23	6,30	7,81	9,03	11,34
13	5,23	7,04	8,63	9,93	12,34
14	6,57	7,79	9,47	10,82	13,34
15	7,26	8,55	10,31	11,72	14,34
16	7,96	9,31	11,15	12,62	15,34
17	8,67	10,08	12,00	13,53	16,34
18	9,39	10,86	12,86	14,44	17,34
19	10,11	11,65	13,72	15,35	18,34
20	10,85	12,44	14,58	16,27	19,34
21	11,59	13,24	15,44	17,18	20,3
22	12,34	14,04	16,31	18,10	21,3
23	13,09	14,85	17,19	19,02	22,3
24	13,85	15,66	18,06	19,94	23,3
25	14,61	16,47	18,94	20,9	24,3
26	15,38	17,29	19,82	21,8	25,3
27	16,15	18,11	20,7	22,7	26,3
28	16,93	18,94	21,6	23,6	27,3
29	17,71	19,77	22,5	24,6	28,3
30	18,49	20,6	23,4	25,5	29,3

Окончание табл.

r	α			
	0,30	**0,20**	**0,10**	**0,05**
1	1,074	1,642	2,71	6,84
2	2,41	3,22	4,60	5,99
3	3,66	4,64	6,25	7,82
4	4,88	5,99	7,78	9,49
5	6,06	7,29	9,24	11,07
6	7,23	8,56	10,64	12,59
7	8,38	9,80	12,02	14,07
8	9,52	11,03	13,36	15,51
9	10,66	12,24	14,68	16,92
10	11,78	13,44	15,99	18,31
11	12,90	14,63	17,28	19,68
12	14,01	15,81	18,55	21,0
13	15,12	16,98	19,81	22,4
14	16,22	18,15	21,1	23,7
15	17,32	19,31	22,3	25,0
16	18,42	20,5	23,5	26,3
17	19,51	21,6	24,8	27,6
18	20,6	22,8	26,0	28,9
19	21,7	23,9	27,2	30,1
20	22,8	25,0	28,4	31,4
21	23,9	26,2	29,6	32,7
22	24,9	27,3	30,8	33,9
23	26,0	28,4	32,0	35,2
24	27,1	29,6	33,2	36,4
25	28,2	30,7	34,4	37,7
26	29,2	31,8	35,6	38,9
27	30,3	32,9	36,7	40,1
28	31,4	34,0	37,9	41,3
29	32,5	35,1	39,1	42,6
30	33,5	36,2	40,3	43,8

Учебное издание

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВРЕМЕНИ БЕЗОТКАЗНОЙ РАБОТЫ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ОПРЕДЕЛИТЕЛЬНЫХ ИСПЫТАНИЙ

Методические указания

Составители: ***Богданович Валерий Иосифович,***
Гиорбелидзе Михаил Георгиевич

Редактор Н.С. Куприянова
Доверстка А.В. Ярославцева

Подписано в печать 25.12.2017. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Печ. л. 1,75.
Тираж 25 экз. Заказ . Арт. 63/2017.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ имени академика С. П. КОРОЛЕВА»
(Самарский университет)
443086, Самара, Московское шоссе, 34.

Изд-во Самарского университета. 443086, Самара, Московское шоссе, 34.