

Министерство высшего и среднего специального  
образования РСФСР

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени  
авиационный институт имени ака. эмика С.П. Королева

**В.А.В е р ж а н и н**

**УСТОЙЧИВОСТЬ И УПРАВЛЯЕМОСТЬ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ**

Утверждено  
редакционно-издательским  
советом института  
в качестве  
конспекта лекций

Куйбышев 1985

УДК 629.7.017.2

**В ь в ж а я и н В.А.** Устойчивость и управляемость летательных аппаратов: Конспект лекций. - Куйбышев:КуАИ, 1985. - 40с.

В конспекте лекций дан вывод уравнений возмущенного и невозмущенного движения маломаневренных непилотируемых ЛА, рассматриваемых как твердые тела. Проведен алгоритм линеаризации уравнений движения, позволяющий сохранить случайный характер коэффициентов линеаризованных уравнений. Выполнена линеаризация уравнений движения и приведены линейные уравнения автоматов стабилизации.

Книга предназначена для студентов старших курсов авиационных специальностей, изучающих предмет "Динамика полета ЛА".

Ил. 6, библиогр. - 5 назв.

Рецензенты: Кафедра теоретической механики Куйбышевского политехнического института, В.В.Д м и т р и е в

© Куйбышевский авиационный институт, 1985

Св. план 1985, поз. 909

Вичеслав Аркадьевич Вьжжанин

**УСТОЙЧИВОСТЬ И УПРАВЛЯЕМОСТЬ  
ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ**

Редактор **Е.Д.А н т о н о в а**

Техн.редактор **Н.М.К а л е н ю к**

Корректор **Н.С.К у п р и я н о в а**

Подписано в печать 6.08.1985 г. Ю 00434.

Формат 60x84 1/16. Бумага оберточная белая.

Печать оперативная. Усл.п.л. 2,3. Уч.-изд.л. 2,5.

Т. 500 экз. Заказ 4633 Цена 10 к.

Куйбышевский ордена Трудового Красного Знамени авиационный институт имени академика С.П.Королева, г. Куйбышев, ул. Молодогвардейская, 151.

Обл.тип.им.В.П.Мяги, г.Куйбышев, ул.Венцека, 60.

## П р е д и с л о в и е

Предлагаемый конспект лекций написан по второй части курса "Динамика полета", называемой "Устойчивость и управляемость летательных аппаратов", и посвящен сравнительно узкому классу маломаневренных непилотируемых летательных аппаратов (ЛА).

Курс "Динамика полета ЛА" традиционно делится на две части. В первой части курса ЛА рассматривается как материальная точка, в предположении детерминированного характера всех действующих сил проводятся расчеты траекторий и осуществляется баллистическое проектирование.

Вторая часть курса посвящена вопросам исследования и обеспечения управляемости и устойчивости полета ЛА по программной траектории. Здесь учитываются реально действующие силы как детерминированные, так и случайные. Последние являются возмущающими и стремятся увести ЛА с программной траектории. Чтобы обеспечить устойчивый полет, т.е. полет вблизи программной траектории, их надо скомпенсировать. Задачу эту выполняет система управления и стабилизации (автомат стабилизации), установленная на борту ЛА.

Какие задачи рассматриваются во второй части динамики полета ЛА? На первом этапе проектирования ЛА рассматривается как твердое тело (корпус абсолютно жесткий, жидкость в баках заморожена). В такой постановке решаются вопросы о рациональной весовой и аэродинамической компоновке ЛА, выборе потребной эффективности управляющих органов, устойчивости движения и выборе основных проектных параметров автомата стабилизации.

На следующих этапах проектирования составляются уравнения возмущенного движения и рассчитываются частотные характеристики ЛА как объекта регулирования с учетом упругости конструкции и подвижности жидкости в баках. С учетом вероятностного характера коэффициентов уравнений возмущенного движения, случайного характера возмущений окончательно решается задача выбора эффективности управляющих орга-

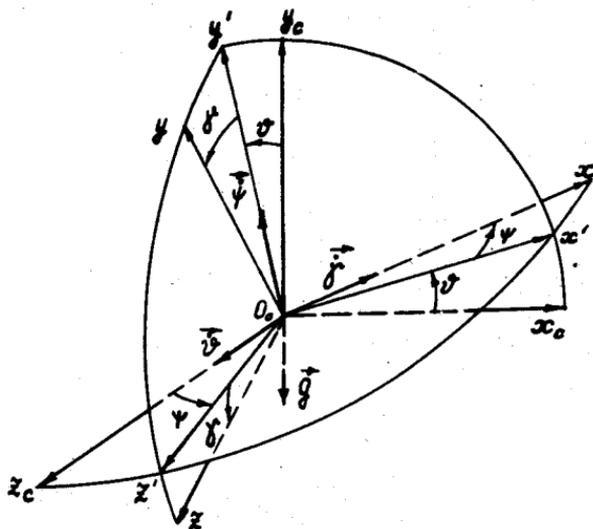
нов и обеспечения устойчивости полета. При этом предлагаются и исследуются необходимые конструктивные мероприятия на проектируемом ЛА. Вероятностный подход к решению перечисленных задач позволяет обеспечить требуемую параметрическую надежность полета ЛА.

В данном конспекте лекций изложен первый раздел второй части курса "Динамика полета ЛА" - "Уравнения возмущенного движения ЛА как твердого тела". Дан вывод уравнений и выполнена их линеаризация по методике, позволяющей сохранить случайный характер коэффициентов дифференциальных уравнений, что является существенным отличием от работ [1], [2] и [3].

**1. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ И ОСНОВНЫЕ КИНЕМАТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ  
ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ЛА.  
УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В ОБЩЕМ ВИДЕ**

При исследовании вопросов устойчивости и управляемости ЛА применяется связанная система координат. В ней записываются уравнения возмущенного движения, на основе которых проводится анализ устойчивости и управляемости ЛА. Связанная система координат ориентирована относительно стартовой тремя углами Эйлера (рис.1).

Оси стартовой системы координат неподвижно связаны с Землей. Начало координат  $O_0$  совмещается с точкой старта, ось  $O_0 Y_c$  направлена вверх по местной вертикали, ось  $O_0 X_c$  направлена на цель и лежит в плоскости стрельбы. Ось  $O_0 Z_c$  образует с осями  $O_0 X_c$  и  $O_0 Y_c$  правую прямоугольную систему координат.



Р и с. 1. Стартовая и связанная системы координат

Оси связанной системы координат фиксированы относительно корпуса ЛА. Начало координат  $O$  совпадает с центром масс ЛА. Продольная ось  $Ox$  направлена вдоль оси симметрии ЛА к его носу. Нормальная ось  $Oy$  расположена так, что в момент старта совпадает с осью  $O_0 X_c$ . Поперечная ось соответственно образует правую систему координат.

Углы Эйлера, ориентирующие связанную систему координат относительно стартовой (кривизной Земли принебрегаем), можно ввести различными способами. Это определяет большую или меньшую сложность уравнений возмущенного движения. Как известно, углы Эйлера определяются последовательностью поворота связанной системы координат относительно стартовой из положения полного совмещения в любое произвольное. В такой ситуации уравнения движения проще, если первый поворот осуществить относительно оси, вокруг которой в процессе полета ЛА разворачивается больше всего. Для рассматриваемого класса ЛА (плоская траектория) такой будет ось  $O_0 Z_0$ .

Таким образом, угол тангажа  $\vartheta$  (см. рис. I) есть угол между проекцией продольной оси ЛА на плоскость стрельбы и горизонтальной плоскостью; угол рыскания  $\psi$  - угол между продольной осью ЛА и плоскостью стрельбы; угол крена  $\gamma$  - угол между осью  $OY$  и линией пересечения плоскости стрельбы  $O_0 X_C Y_C$  и плоскости крена  $OYZ$ . Плоскость стрельбы в дальнейшем будем называть плоскостью тангажа, а плоскость  $O_0 X Z_0$  - плоскостью рыскания.

Введенные выше определения углов Эйлера отличаются от стандартных, поэтому их следует именовать баллистическими углами тангажа, рыскания и крена.

Во время полета ЛА, а вместе с ней и оси связанной системы координат непрерывно поворачиваются относительно стартовой с некоторой угловой скоростью  $\vec{\omega}$ . Изменяются и углы тангажа, рыскания и крена соответственно со скоростями  $\vec{\vartheta}$ ,  $\vec{\psi}$ ,  $\vec{\gamma}$ . Эти векторы изображены на рис. I согласно принятому порядку поворота связанной системы координат относительно стартовой.

Выразим угловую скорость вращения ЛА через скорости изменения углов Эйлера:

$$\vec{\omega} = \vec{\vartheta} + \vec{\psi} + \vec{\gamma}. \quad (I)$$

Спроектируем векторное равенство (I) на оси связанной системы координат, для чего вычислим направляющие косинусы:

$$\text{вектора } \vec{\vartheta} : -\sin \psi, \cos \psi \sin \gamma, \cos \psi \cos \gamma;$$

$$\text{вектора } \vec{\psi} : 0, \cos \gamma, -\sin \gamma;$$

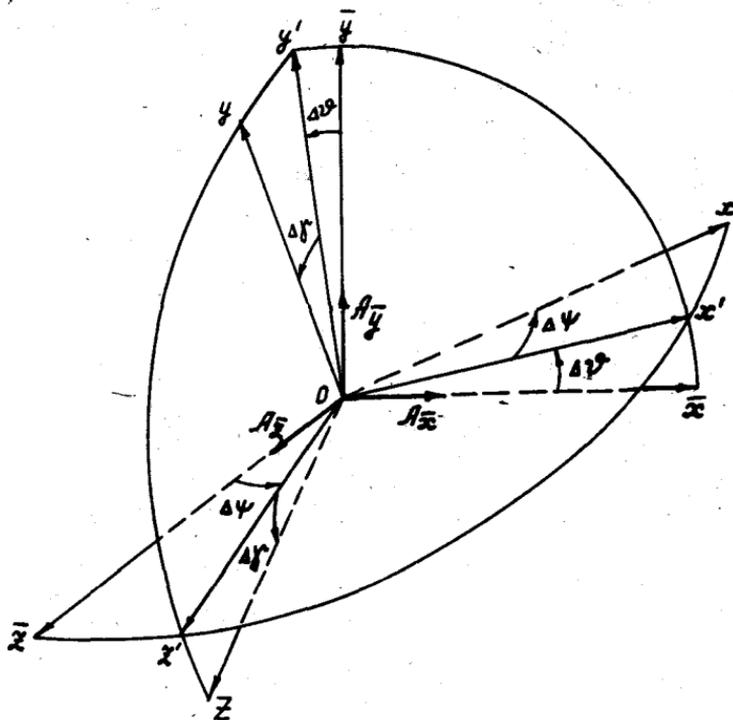
$$\text{вектора } \vec{\gamma} : -1, 0, 0.$$

В результате получим следующие основные кинематические соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \dot{\gamma} - \dot{\psi} \sin \psi; \\ \omega_y &= \dot{\psi} \cos \psi \sin \gamma + \dot{\gamma} \cos \psi; \\ \omega_z &= \dot{\psi} \cos \psi \cos \gamma - \dot{\gamma} \sin \psi. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Далее рассмотрим две связанные системы координат, начала которых совпадают, а углы Эйлера различаются на некоторые малые величины (несколько градусов). Одну систему координат ( $OXYZ$ ) назовем возмущенной, а другую ( $O\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$ ) - невозмущенной (рис. 2). Тогда можно записать  $\psi = \bar{\psi} + \Delta\psi$ ,  $\varphi = \bar{\varphi} + \Delta\varphi$ ,  $\gamma = \bar{\gamma} + \Delta\gamma$ ,

- где  $\psi, \varphi, \gamma$  - возмущенные углы тангажа, рыскания, крена;  
 $\bar{\psi}, \bar{\varphi}, \bar{\gamma}$  - соответствующие невозмущенные углы;  
 $\Delta\psi, \Delta\varphi, \Delta\gamma$  - возмущения, или вариации углов тангажа, рыскания, крена.



Р и с. 2. Возмущенная и невозмущенная связанные системы координат

Выразим проекции произвольного вектора  $\vec{A}$  на оси возмущенной системы координат через проекции на невозмущенные оси. В общем виде имеем:

$$\left. \begin{aligned} A_x &= A_{\bar{x}} \cos(x, \bar{x}) + A_{\bar{y}} \cos(x, \bar{y}) + A_{\bar{z}} \cos(x, \bar{z}); \\ A_y &= A_{\bar{x}} \cos(y, \bar{x}) + A_{\bar{y}} \cos(y, \bar{y}) + A_{\bar{z}} \cos(y, \bar{z}); \\ A_z &= A_{\bar{x}} \cos(z, \bar{x}) + A_{\bar{y}} \cos(z, \bar{y}) + A_{\bar{z}} \cos(z, \bar{z}). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Если отбросить члены с произведениями типа  $\sin \Delta \gamma \sin \Delta \psi$ , то матрица  $M$  направляющих косинусов может быть получена согласно рис. 2 [I]:

$$M = \begin{bmatrix} \cos \Delta \nu \cos \Delta \psi, & \sin \Delta \nu \cos \Delta \psi, & -\sin \Delta \psi \\ -\sin \Delta \nu \cos \Delta \gamma, & \cos \Delta \nu \cos \Delta \gamma, & \cos \Delta \psi \sin \Delta \gamma \\ \sin \Delta \psi \cos \Delta \gamma \cos \Delta \nu, & -\cos \Delta \nu \sin \Delta \gamma, & \cos \Delta \psi \cos \Delta \gamma \end{bmatrix} \quad (4)$$

Выражения (4) являются вспомогательными соотношениями при преобразовании и упрощении уравнений движения ЛА. Из курса теоретической механики известны следующие векторные уравнения движения твердого тела:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\vec{H}}{dt} &= \vec{R} + m\vec{g}; \\ \frac{d\vec{L}}{dt} &= \vec{M}_R, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

- где  $\vec{H}$  - вектор количества движения;  
 $\vec{L}$  - вектор кинетического момента;  
 $\vec{R}$  - главный вектор системы сил, действующих на ЛА в полете;  
 $\vec{M}_R$  - главный момент этих сил;  
 $\vec{g}$  - вектор ускорения свободного падения;  
 $m$  - масса ЛА.

В проекциях на оси связанной системы координат уравнения движения примут следующий вид [I]:

$$\begin{aligned}
 m(\dot{V}_{Kx} + \omega_y V_{Kz} - \omega_z V_{Ky}) &= R_x + mg_x; \\
 m(\dot{V}_{Ky} + \omega_z V_{Kx} - \omega_x V_{Kz}) &= R_y + mg_y; \\
 m(\dot{V}_{Kz} + \omega_x V_{Ky} - \omega_y V_{Kx}) &= R_z + mg_z; \\
 J_x \dot{\omega}_x + (J_z - J_y) \omega_y \omega_z &= M_{Rx}; \\
 J_y \dot{\omega}_y + (J_x - J_z) \omega_z \omega_x &= M_{Ry}; \\
 J_z \dot{\omega}_z + (J_y - J_x) \omega_x \omega_y &= M_{Rz},
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

где  $J_x, J_y, J_z$  - главные моменты инерции ЛА;  
 $\vec{V}_K$  - земная скорость ЛА (скорость центра масс).

Далее подробно рассмотрим правые части уравнений (6).

## 2. СИЛЫ И МОМЕНТЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ЛА В ПОЛЕТЕ

На ЛА в полете вблизи Земли действуют: сила тяжести, сила тяги двигательной установки (ДУ), управляющие (стабилизирующие) силы, аэродинамические силы и силы Кориолиса. Найдем проекции этих сил и соответствующих моментов на оси связанной системы координат.

### 2.1. С и л а т я ж е с т и и с и л а т я г и

Сила тяжести и сила тяги являются основными силами, действующими на ЛА на активном участке полета.

Сила тяжести выражается известной формулой

$$\vec{G} = m\vec{g}, \tag{7}$$

или в проекциях на связанные оси координат (см. рис. I.I)

$$\left. \begin{aligned} G_x &= mg_x = -mg \sin \nu \cos \psi; \\ G_y &= mg_y = -mg \cos \nu \cos \gamma; \\ G_z &= mg_z = mg(\cos \nu \sin \gamma - \sin \nu \sin \psi \cos \gamma). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

В целях общности будем считать, что двигательная установка состоит из нескольких отдельных двигателей. Последние, являясь маршевыми двигателями, в то же время могут использоваться для создания управляющих сил и моментов путем поворота. В данный момент будем считать, что все двигатели находятся в нейтральном положении. Итак, сила тяги ДУ равна:

$$\vec{P} = \sum_i \vec{P}_i. \quad (9)$$

Ввиду погрешностей, возникающих из-за установки двигателей на ЛА в процессе сборки вектор тяги  $\vec{P}$  может не проходить через центр масс ЛА и иметь некоторый перекосяк и эксцентриситет, поэтому

$$\left. \begin{aligned} P_x &= \sum_i P_{ix} \approx \sum_i P_i = P; \\ P_y &= \sum_i P_{iy} \quad (\neq 0); \\ P_z &= \sum_i P_{iz} \quad (\neq 0). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Соответственно появятся отличные от нуля моменты тяги ДУ:

$$\left. \begin{aligned} M_{Px} &= \sum_i M_{P_{ix}} \\ M_{Py} &= \sum_i M_{P_{iy}} \\ M_{Pz} &= \sum_i M_{P_{iz}} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Зная допуски на сборку ДУ, можно оценить максимальные значения выражений (10) и (11).

## 2.2. Управляющие силы и моменты

Для обеспечения полета ЛА по заданной программе необходимо изменять угловое положение и скорость центра масс ЛА. Эта задача решается системой управления (СУ) и ее исполнительными органами. При отклонении органов управления (ОУ) возникают необходимые для управления силы и моменты.

В полете на ЛА, кроме программных сил, действуют различного рода возмущающие силы, стремящиеся увести аппарат с программной траектории, поэтому на борту ЛА необходимо создавать противостоящие им стабилизирующие силы и моменты. Эту задачу решает автомат стабилизации (АС). На осесимметричных маломаневренных ЛА обе системы - СУ и АС - объединены в одном комплексе с одними и теми же исполнительными органами. Этот единый автоматический комплекс принято называть автоматом стабилизации или системой управления в зависимости от рассматриваемой задачи.

По выполняемым функциям различают четыре группы органов управления: величиной скорости центра масс ЛА, вращением ЛА вокруг продольной оси; вращением ЛА вокруг поперечной оси, вращением ЛА вокруг нормальной оси.

Управление величиной скорости центра масс ЛА. Изменение величины скорости полета ЛА достигается путем уменьшения или увеличения тяги ДУ. Обозначим вектор управляющих сил через  $\vec{F}$ , тогда

$$F_x = \Delta P, \quad (12)$$

где  $\Delta P$  - величина изменения тяги ДУ.

Управляющую силу представим как

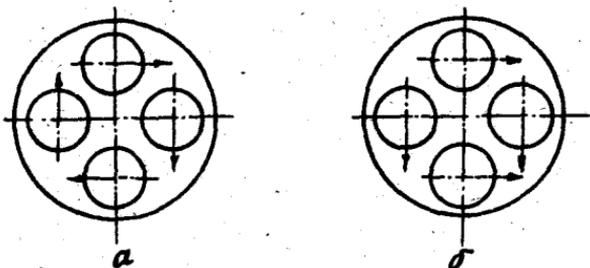
$$F_x = F_x^\sigma \sigma_x, \quad (13)$$

где  $F_x^\sigma = P$  - коэффициент пропорциональности;

$\sigma_x = \frac{\Delta P}{P}$  - величина, характеризующая относительное изменение тяги.

Управление вращением ЛА вокруг продольной оси. Этот канал управления называется каналом управления креном, или каналом стабилизации ЛА по крену. Управляющие моменты создаются с помощью поворота отдельных маршевых двигателей или специальных управляющих движков (двигателей малой тяги). На более ранних схемах ЛА для этих целей применялись газовые или воздушные рули.

Не нарушая общности рассуждений, рассмотрим управление креном с помощью поворота маршевых двигателей четырехкамерной ДУ. На рис. 3, а стрелками показано положительное отклонение отдельных двигателей, при



Р и с. 3. Положительные отклонения ОУ по: а - крену; б - тангажу и рысканию

котором возникает отрицательный управляющий момент

$$M_{F_x} = -4P_1 z_p \sin \delta_y, \quad (12)$$

где  $\delta_y$  - угол поворота ОУ по крену;

$P_1$  - тяга одиночного двигателя;

$z_p$  - плечо тяги одиночного двигателя.

Считая, ввиду малости углов,  $\sin \delta_y = \delta_y$ , перепишем выражение (12) в следующем виде:

$$M_{F_x} = M_{F_x}^\sigma \delta_y, \quad (13)$$

где  $M_{F_x}^\sigma = -P_1 z_p$  - производная управляющего момента крена по углу отклонения ОУ; всегда  $M_{F_x}^\sigma < 0$ .

Если двигательная установка однокамерная, то для управления и стабилизации ЛА по крену необходима установка специальных управляющих движков.

Управление вращением ЛА вокруг поперечной оси. Данный канал управления называется каналом управления и стабилизации ЛА по тангажу.

На современном ЛА управляющие моменты создаются поворотом маршевых двигателей всех одновременно или части. В многокамерных ДУ, как правило, часть двигателей управляет тангажом ЛА, а другая часть - рысканием.

Рассмотрим управление тангажом на примере четырехкамерной ДУ.

На рис. 3,6 сплошными стрелками показано положительное отклонение управляющих двигателей. При этом возникают управляющая сила и момент:

$$\left. \begin{aligned} F_y &= 2P_1 \sin \delta_{\gamma} = P_{\sigma} \sin \delta_{\gamma}; \\ M_{Fz} &= 2P_1 x_p \sin \delta_{\gamma} = P_{\sigma} x_p \sin \delta_{\gamma}, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

где  $P_{\sigma} = 2P_1$  - тяга управляющих двигателей,

здесь  $\delta_{\gamma}$  - угол поворота  $OY$  по тангажу;

$x_p$  - координата приложения тяги  $DY$  ( $x_p < 0$ ).

Считая  $\sin \delta_{\gamma} \approx \delta_{\gamma}$ , перепишем систему (14) в виде

$$\left. \begin{aligned} F_y &= F_y^{\sigma} \delta_{\gamma}, \\ M_{Fz} &= M_{Fz}^{\sigma} \delta_{\gamma}, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

где  $F_y^{\sigma} = P_{\sigma}$  - производная управляющей силы по углу отклонения  $OY$ ;

$M_{Fz}^{\sigma} = P_{\sigma} x_p$  - производная управляющего момента тангажа по углу отклонения  $OY$ .

Всегда  $M_{Fz}^{\sigma} < 0$ , так как за положительный угол отклонения  $OY$  принимается такой, при котором создается отрицательный управляющий момент.

Управление вращением ЛА вокруг нормальной оси. Этот канал управления называется каналом управления (или стабилизации) ЛА по рысканию. На рис. 3,6 пунктиром показаны положительные отклонения управляющих двигателей. При этом создаются следующие силы и моменты:

$$\left. \begin{aligned} F_x &= F_z^{\sigma} \delta_{\psi}, \\ M_{Fy} &= M_{Fy}^{\sigma} \delta_{\psi}, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

где  $\delta_{\psi}$  - угол поворота  $OY$  по рысканию,

$$F_z^{\sigma} = -P_{\sigma} = -F_y^{\sigma};$$

$$M_{Fy}^{\sigma} = P_{\sigma} x_p = M_{Fz}^{\sigma}.$$

Ввиду осевой симметрии ЛА и принятого направления положительных поворотов  $OY$  при отклонении по тангажу или рысканию возникает продольная управляющая сила, который будем в дальнейшем пренебрегать ввиду ее крайней малости по отношению к тяге  $P$ .

### 2.3. Аэродинамические силы и моменты, зависящие от пространственного угла атаки

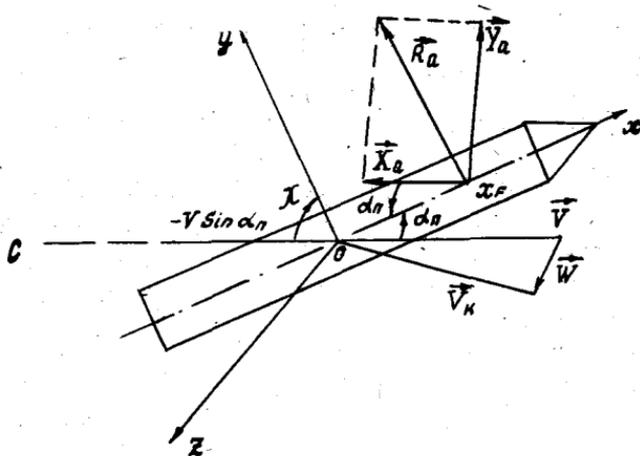
Рассмотрим случай полета ЛА без вращения, т.е. при  $\bar{\omega} = 0$ . Выведем выражения для аэродинамических сил и моментов в связанной системе координат при следующих допущениях:

аэродинамические силы квазистационарны и зависят только от местного угла атаки;

поверхность ЛА осесимметрична относительно продольной оси;

углы атаки малы (порядка  $5 \dots 7^\circ$ ), т.е. являются малыми первого порядка по отношению к  $\alpha$ .

Ввиду осевой симметрии ЛА вектор полной аэродинамической силы  $\vec{R}$  проходит через продольную ось, приложен в аэродинамическом фокусе ЛА по углу атаки и лежит в плоскости  $VOX$  (рис. 4). Величина вектора  $\vec{R}$  определяется пространственным углом атаки, причем подъемная сила про-



Р и с. 4. Схема аэродинамических сил

порциональна этому углу, а сила лобового сопротивления не зависит от угла атаки ввиду его малости. Таким образом имеем [2]

$$\left. \begin{aligned} X_a &= C_{xa} q S_m \approx C_{x0} q S_m, \\ Y_a &= C_{ya} q S_m = C_y^\alpha \alpha_n q S_m, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

где  $C_{xa}$  - коэффициент силы лобового сопротивления;  
 $C_{x0}$  - то же при нулевом угле атаки;  
 $C_{ya}^{\alpha_n}$  - производная коэффициента подъемной силы по углу атаки;  
 $\alpha_n$  - пространственный угол атаки (угол между вектором воздушной скорости и продольной осью ЛА);  
 $S_M$  - характерная площадь ЛА (обычно площадь миделя).  
 Коростной напор вычисляем по известной формуле

$$q = \frac{1}{2} \rho V^2 = \frac{1}{2} \rho (V_k - W)^2 \quad (18)$$

где  $\rho$  - плотность воздуха;  
 $\vec{V} = \vec{V}_k - \vec{W}$  - воздушная скорость ЛА;  
 $\vec{W}$  - скорость ветра относительно стартовой системы координат.

Найдем проекции аэродинамической силы на оси связанной системы координат. Для определенности будем считать, что вектор  $\vec{V}$  направлен за плоскость рисунка (см. рис. 4). Введем вспомогательную ось  $OY'$ , которая совпадает с проекцией вектора  $\vec{V}$ , а следовательно, и векторов  $X_a$ ,  $Y_a$ , на плоскость  $YOZ$ . Спроектировав  $X_a$  и  $Y_a$  на ось  $OY'$ , далее на оси  $OY$  и  $OZ$  получим:

$$\left. \begin{aligned} X &= -X_a \cos \alpha_n + Y_a \sin \alpha_n; \\ Y &= (X_a \sin \alpha_n + Y_a \cos \alpha_n) \cos \chi; \\ Z &= (X_a \sin \alpha_n + Y_a \cos \alpha_n) \sin \chi, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

где  $X$  - аэродинамическая продольная сила;  
 $Y$  - аэродинамическая нормальная сила;  
 $Z$  - аэродинамическая поперечная сила.

Исключим из формул (19) углы  $\chi$  на основе очевидных равенств:

$$\left. \begin{aligned} V_y &= -V \sin \alpha_n \cos \chi; \\ V_z &= -V \sin \alpha_n \sin \chi. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Откуда

$$\cos \chi = -\frac{V_y}{V \sin \alpha_n} \quad \text{и} \quad \sin \chi = -\frac{V_z}{V \sin \alpha_n} \quad (21)$$

Будем считать также, что с точностью до малых второго порядка (погрешность менее 2%)

$$\sin \alpha_n \approx \alpha_n \quad \text{и} \quad \cos \alpha_n \approx 1. \quad (22)$$

Тогда  $V_x = V \cos \alpha_n \approx V$ .

Подставив выражения (17), (18), (21) и (22) в равенства (19), получим для проекций аэродинамических сил на оси связанной системы координат:

$$\left. \begin{aligned} X &= -\frac{1}{2} C_{x0} \rho S_M (V_{Kx} - W_x)^2; \\ Y &= -\frac{1}{2} C_y^\alpha \rho S_M (V_{Kx} - W_x)(V_{Ky} - W_y); \\ Z &= -\frac{1}{2} C_z^\alpha \rho S_M (V_{Kx} - W_x)(V_{Kz} - W_z). \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

В первом равенстве (1.23) отброшено слагаемое  $C_{ya}^\alpha \alpha_n^2$  ввиду его малости. Во втором и третьем равенствах  $C_y^\alpha = C_{ya}^\alpha + C_{x0}$  - производная коэффициента нормальной силы по углу атаки.

Моменты аэродинамических сил вычислим из очевидных соотношений:

$$\left. \begin{aligned} M_y &= -x_F Z = \frac{1}{2} C_y^\alpha \rho S_M x_F (V_{Kx} - W_x)(V_{Kx} - W_z); \\ M_z &= x_F Y = -\frac{1}{2} C_z^\alpha \rho S_M x_F (V_{Kx} - W_x)(V_{Ky} - W_y). \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

где  $M_y$  - аэродинамический момент рыскания;

$M_z$  - аэродинамический момент тангажа.

Ввиду принятой осевой симметрии ЛА аэродинамический момент крена  $M_x = 0$ . Однако из-за погрешностей сборки в общем случае  $M_x \neq 0$ . Его максимальное значение может быть оценено на основе известных допусков на сборку.

#### 2.4. Силы и моменты, зависящие от угловых скоростей вращения ЛА

При вращении ЛА с некоторой угловой скоростью  $\vec{\omega}$  возникают дополнительные аэродинамические силы и моменты. В работе [2] показано, что при малых  $\omega$  проекции этих сил и моментов пропорциональны проекциям угловой скорости на соответствующие оси координат, т.е.

$$\Delta X = 0$$

(из-за осевой симметрии),

$$\left. \begin{aligned} \Delta Y &= Y^{\omega_x} \omega_x, \quad \Delta Z = Z^{\omega_y} \omega_y; \\ \Delta M_x &= M_x^{\omega_x} \omega_x, \quad \Delta M_y = M_y^{\omega_y} \omega_y, \quad \Delta M_z = M_z^{\omega_z} \omega_z, \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

где  $Y^{\omega_x}$ ,  $M_x^{\omega_x}$  и т.п. - коэффициенты пропорциональности.

Если точка приложения равнодействующей аэродинамических сил, вызванных вращением ЛА, расположена впереди центра масс, то  $Y^{\omega_x} < 0$ ,  $Z^{\omega_y} > 0$ , если ниже, то  $Y^{\omega_x} > 0$ ,  $Z^{\omega_y} < 0$ . Во всех случаях каждая из величин  $M_x^{\omega_x}$ ,  $M_y^{\omega_y}$ ,  $M_z^{\omega_z}$  меньше нуля. Этот факт является следствием физической стороны дела: аэродинамический момент, пропорциональный угловой скорости вращения, всегда направлен против вращения - поэтому данные моменты называют демпфирующими.

Аэродинамические силы  $\Delta Y$  и  $\Delta Z$ , зависящие от  $\omega$ , являются малыми величинами по сравнению с  $Y$  и  $Z$ , определяемыми углом атаки. Поэтому в уравнениях движения этими силами можно пренебречь. Демпфирующие моменты играют положительную, хотя и не существенную при наличии АС на борту ЛА, роль в обеспечении устойчивого полета. Их можно вычислить на основе соотношений и алгоритмов, приведенных в литературе [2]. Ввиду осевой симметрии ЛА,

$$\begin{aligned} M_y^{\omega_y} &= M_z^{\omega_z} = m_z^{\bar{\omega}_z} q S_M l_\phi \frac{l_\phi}{V} = \\ &= \frac{1}{2} m_z^{\bar{\omega}_z} \rho S_M l_\phi^2 (V_{Kx} - W_x), \end{aligned} \quad (26)$$

где  $l_\phi$  - длина ЛА (фюзеляжа);

$m_z^{\bar{\omega}_z}$  - частная производная коэффициента момента тангажа по безразмерной угловой скорости вращения  $\bar{\omega}_z = \frac{\omega_z l_\phi}{V}$ .

Величина  $m_z^{\bar{\omega}_z}$  безразмерная и меньше нуля.

Аналогично определяем коэффициенты пропорциональности демпфирующего момента крена:

$$M_x^{\omega_x} = \frac{1}{2} m_x^{\bar{\omega}_x} \rho S_M l_{cr}^2 (V_{Kx} - W_x), \quad (27)$$

где  $l_{cr}$  - размах стабилизаторов (или боковых блоков);

$m_x^{\bar{\omega}_x}$  - частная производная коэффициента момента крена по безразмерной угловой скорости вращения;

$\bar{\omega}_x = \frac{\omega_x l_{cr}}{V}$  - величина безразмерная и меньше нуля.

При отсутствии стабилизаторов или боковых блоков  $M_x^{\omega_x} = 0$ .

При вращении жидкостных ДА возникают кориолисовы силы и моменты, также пропорциональные угловым скоростям вращения. Их возникновение обусловлено движением топлива и газов в камере сгорания относительно корпуса ДА. Из курса теоретической механики известно, что эти силы и моменты определяют по формулам

$$\vec{K} = \int_{\Omega} \vec{\omega} \vec{w}_K dm, \quad (28)$$

$$\vec{M}_K = - \int_{\Omega} \vec{r} \vec{\omega} \vec{w}_K dm,$$

где  $\Omega$  - объем движущихся частиц;

$\vec{r}$  - радиус - вектор движущихся частиц относительно начала связанной системы координат.

Кориолисово ускорение

$$\vec{w}_K = 2 \vec{\omega} \times \vec{v}_E, \quad (29)$$

где  $\vec{v}_E$  - скорость частицы массой  $dm$  относительно начала связанной системы координат.

Для сил Кориолиса можно записать

$$\left. \begin{aligned} K_x &= 0 \text{ (осевая симметрия);} \\ K_y &= K_y^{\omega_x} \omega_x; \\ K_z &= K_z^{\omega_y} \omega_y. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

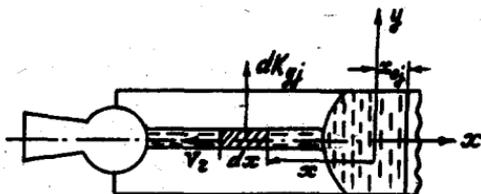
Ввиду малости этих сил в уравнениях движения ДА обычно пренебрегают. Поэтому не будем подробно расписывать выражения для коэффициентов пропорциональности  $K_y^{\omega_x}$  и  $K_z^{\omega_y}$ .

Моменты кориолисовых сил также выразим в виде:

$$M_{Kx} = M_{Kx}^{\omega_x} \omega_x, \quad M_{Ky} = M_{Ky}^{\omega_y} \omega_y, \quad M_{Kz} = M_{Kz}^{\omega_z} \omega_z. \quad (31)$$

В большинстве случаев момент  $M_{Kx}$  пренебрежимо мал, т.е.  $M_{Kx}^{\omega_x} = 0$ . Вследствие осевой симметрии  $M_{Ky}^{\omega_y} = M_{Kz}^{\omega_z}$ . Вычислим эти коэффициенты, для чего рассмотрим рис. 5. На нем  $x_{0j}$  - координата свободной поверхности жидкости в  $j$ -м баке,  $x$  - координата сечения трубопровода,  $dx$  - элементарная длина.

Элементарная масса  $dm = \rho_j S_j dx$ , где  $S_j$  - площадь сечения трубопровода. При угловой скорости вращения  $\omega_E$  и линейной скорости потока  $v_{2axj}$  кориолисово ускорение  $w_{Kxyj} = 2 \omega_E v_{2axj}$ .



Р и с. 5. Схема сил Кориолиса

Элементарная сила и момент соответственно составляют

$$dK_{yj} = -2\rho_j S_j v_{zxj} \omega_z dx = 2\dot{m}_j \omega_z dx, \quad (32)$$

$$dM_{Kzj} = x dK_{yj} = 2\dot{m}_j \omega_z x dx,$$

где  $\dot{m}_j = \rho_j S_j v_{zxj}$  — массовый секундный расход топлива из  $j$ -го бака.

Вычислив интеграл от второго равенства (32) по длине трубопроводов опорожняющихся баков, получим выражение для момента кориолисовых сил относительно оси  $Oz$  [см. также 3].

$$M_{Kz} = -\omega_z \sum_j \dot{m}_j (x_p^2 - x_{0j}^2). \quad (33)$$

Отсюда следует, что

$$M_{Ky} = M_{Kz} = -\sum_j \dot{m}_j (x_p^2 - x_{0j}^2).$$

Кориолисовыми моментами при наличии автомата стабилизации на ДА так же, как и аэродинамическими демпфирующими моментами, в уравнениях возмущенного движения можно пренебрегать ввиду их малости. При нестабилизируемом полете они имеют самостоятельное значение как стабилизирующий фактор.

### 3. ПОНЯТИЕ ВОЗМУЩЕННОГО И НЕВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ. ВОЗМУЩЕНИЯ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА ЛА В ПОЛЕТЕ

Приведенные выше динамические уравнения движения и их правые части получены в самых общих предположениях произвольного положения ЛА в пространстве и произвольного вида действующих на него сил и моментов. Это нелинейные дифференциальные уравнения с переменными по времени и случайными коэффициентами и правыми частями. Для исследования траекторий и баллистического проектирования эти уравнения из-за их сложности и стохастического характера не годятся. Поэтому при определении траекторий центра масс считают, что параметры ЛА и СУ имеют номинальные значения и полет происходит в так называемой "стандартной атмосфере", без ветра. При этом идеально обрабатывается программа полета (или по углу тангажа, или по углу атаки) и траектория остается плоской.

Система уравнений движения при этом существенно упрощается. Вычисленная по этим уравнениям траектория полета называется расчетной (программной) или невозмущенной. Движение ЛА по данной траектории принято называть невозмущенным движением.

В отличие от невозмущенного, движение ЛА, описываемое исходными динамическими уравнениями при действительных значениях параметров ЛА и АС, параметров атмосферы и т.д., называется возмущенным движением. Траектории возмущенного движения называются возмущенными траекториями. Таким образом, движение каждого реального ЛА в реальной атмосфере является возмущенным.

Под возмущениями будем понимать все те факторы, которые не учитывались при расчете траекторий и которые вызывают отклонение действительного движения от программного. Рассмотрим возмущения, действующие на ЛА в полете.

Возмущение параметров ЛА, ДУ и АС. Массовые, геометрические, аэродинамические характеристики ЛА меняются от изделия к изделию и отличаются от номинальных, принятых в расчете программной траектории. Характеристика двигательной установки и параметры автомата стабилизации также различны у каждого экземпляра ЛА. Разбросы эти носят случайный характер и обусловлены как технологическими причинами, так и условиями эксплуатации.

Условимся в дальнейшем под  $a$  понимать реальное (возмущенное) значение некоторого параметра системы, под  $\bar{a}$  - номинальное (невозмущенное) значение,  $\Delta a = a - \bar{a}$  - возмущение (вариация) параметра  $a$ . У реального ЛА, таким образом, масса, моменты инерции и основ-

ные аэродинамические характеристики отличаются от номиналов на некоторые величины

$$\left. \begin{aligned} \Delta m &= m - \bar{m}, \quad \Delta J_{x,y,z} = J_{x,y,z} - \bar{J}_{x,y,z}; \\ \Delta C_{x0} &= C_{x0} - \bar{C}_{x0}, \quad \Delta C_y^\alpha = C_y^\alpha - \bar{C}_y^\alpha \\ \Delta x_F &= x_F - \bar{x}_F, \quad \Delta \bar{m}_z = m_z - \bar{m}_z \text{ и т. д.} \end{aligned} \right\} (34)$$

Возмущения этих параметров приводят к появлению дополнительных по отношению к программным инерционных и аэродинамических сил и моментов, т.е. возмущающих сил и моментов.

Отклонение геометрических характеристик ЛА от номинальных значений и погрешности сборки вызывает появление в полете возмущающих аэродинамических моментов  $\Delta M_x \neq 0$ , а также  $\Delta P_y \neq 0$ ,

$$\Delta P_z \neq 0, \quad \Delta M_{px} \neq 0, \quad \Delta M_{py} \neq 0, \quad \Delta M_{pz} \neq 0.$$

При этом  $\bar{M}_x = \bar{P}_y = \bar{P}_z = \bar{M}_{px} = \bar{M}_{py} = \bar{M}_{pz} = 0$ . Реальная тяга  $\Delta P$  также отличается от номинальной на величину  $\Delta P = P - \bar{P}$ .

Параметры АС из-за технологических разбросов и различных условий функционирования для конкретного ЛА не совпадают с номинальными. По этой причине отклонения ОУ и соответственно управляющие силы и моменты отличаются от потребных в данный момент полета.

Перечисленные выше возмущения параметров носят случайный характер. При этом считается, что математические ожидания вариаций  $M\{\Delta a\} = -\Delta \bar{a} = 0$ , а их предельные значения  $|\Delta a|_{max}$  известны. Таким образом,  $M\{a\} = \bar{a}$  (черта над параметром означает его математическое ожидание). Возмущения  $\Delta a$  являются, как правило, случайными функциями времени, в результате чего и коэффициенты уравнений движения, и правые части уравнений — также случайные функции, а сами уравнения движения — стохастические.

Возмущения атмосферы. Как уже отмечалось выше, при расчете программной траектории ЛА принимается  $\rho = \rho_{CT}(H) = \bar{\rho}(H)$  и  $\bar{W} = 0$ .

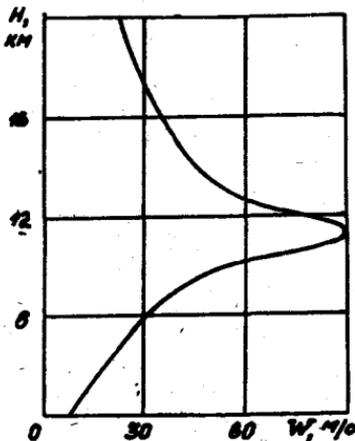
Во время конкретного пуска ЛА плотность воздуха отличается от стандартной на величину  $\Delta \rho = \rho - \bar{\rho}$  и  $\bar{W} \neq 0$ . Эти отклонения приводят к появлению дополнительных аэродинамических сил.

Максимальное отклонение плотности воздуха от стандартного значения может достигать 15...20%, но главным возмущающим фактором в полете является ветер. За ним следует возмущение от перекоса вектора тяги (порядка 20% от ветрового).

В общем случае скорость ветра и его направление имеют случайный характер. Однако некоторые составляющие ветра характеризуются настоя-

ко большими масштабами (протяженностью течения и большой средней скоростью), что можно рассматривать скорость ветра состоящей из двух составляющих  $\vec{W} = \vec{W}_0 + \vec{W}_T$ , где  $\vec{W}_0$  - скорость струйного течения;  $\vec{W}_T$  - скорость турбулентной составляющей ветра. Струйными течениями называются горизонтальные потоки воздуха в верхней тропосфере или в стратосфере, имеющие на определенной высоте четко выраженный максимум скорости и направления (обычно с запада на восток). Длина струйных течений исчисляется тысячами, ширина - сотнями километров, а толщина - 2...5 км. Максимальные значения скорости ветра на оси струйного течения могут колебаться в пределах 30...200 м/с. Известно мощное струйное течение над Японией в сторону Канады со скоростью 180 м/с или 0,6 М.

Турбулентная составляющая ветра - это случайная составляющая по величине и направлению, достигаемая 12...15 м/с (в грозу). На



Р и с. 6. Профиль ветра по высоте

устойчивость полета и управляемость основное влияние оказывает струйное течение. Для динамических расчетов при полете ЛА над территорией СССР принят некоторый стандартизованный профиль струйного течения по высоте (рис.6). Скорость с ростом высоты сначала растет, достигая максимума 90 м/с в районе тропоспаузы (7 ... 12 км); далее падает почти до нуля в районе 25 км, а затем снова увеличивается, достигая второго максимума на высоте 50...60 км [4].

Рассмотренные выше возмущающие факторы приводят к тому, что реальные кинематические параметры движения ЛА отличаются от программных на величину

$$\Delta \vec{V} = \vec{V}_K - \vec{V}_K^*;$$

$$\Delta \vec{\omega} = \vec{\omega} - \vec{\omega}^*;$$

$$\Delta \varphi = \varphi - \varphi^*, \quad \Delta \psi = \psi - \psi^*, \quad \Delta \gamma = \gamma - \gamma^*;$$

$$\Delta \delta_x = \delta_x - \delta_x^*, \quad \Delta \delta_y = \delta_y - \delta_y^*, \quad \Delta \delta_z = \delta_z - \delta_z^*, \quad \Delta \delta_\gamma = \delta_\gamma - \delta_\gamma^*.$$

(36)

В дальнейшем будем считать, что все вариации являются малыми первого порядка (МШ) по отношению к номинальным значениям.

#### 4. УРАВНЕНИЯ В РАЗВЕРНУТОМ ВИДЕ ВОЗМУЩЕННОГО И НЕВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ ЛА КАК ТВЕРДОГО ТЕЛА

Запишем уравнения возмущенного движения ЛА в проекциях на оси связанной системы координат:

уравнение сил в проекциях на продольную ось

$$m(\dot{V}_{Kx} + \omega_y V_{Kz} - \omega_z V_{Ky}) = P - mg \sin \vartheta \cos \psi - \frac{1}{2} C_{x0} \rho S_M (V_{Kx} - W_x)^2 + F_x^\delta \delta_x; \quad (37)$$

уравнение сил в проекциях на нормальную ось

$$m(\dot{V}_{Ky} + \omega_z V_{Kx} - \omega_x V_{Kz}) = P_y - mg \cos \vartheta \cos \psi - \frac{1}{2} C_y^\alpha \rho S_M (V_{Kx} - W_x)(V_{Ky} - W_y) + F_y^\delta \delta_\psi; \quad (38)$$

уравнение сил в проекциях на поперечную ось

$$m(\dot{V}_{Kz} + \omega_x V_{Ky} - \omega_y V_{Kx}) = P_z + mg(\cos \vartheta \sin \psi - \sin \vartheta \sin \psi \cos \psi) - \frac{1}{2} C_z^\alpha \rho S_M (V_{Kx} - W_x)(V_{Kz} - W_z) + F_z^\delta \delta_\psi; \quad (39)$$

уравнение моментов относительно продольной оси

$$J_x \dot{\omega}_x + (J_z - J_y) \omega_y \omega_z = M_{px} + M_x + \frac{1}{2} m_x \bar{a}_{cx} \rho S_M \ell_{cm}^2 (V_{Kx} - W_x) \omega_x + M_{px}^\delta \delta_\psi; \quad (40)$$

уравнение моментов относительно нормальной оси

$$J_y \dot{\omega}_y + (J_x - J_z) \omega_z \omega_x = M_{py} + \frac{1}{2} C_y^\alpha \rho S_M x_P (V_{Kx} - W_x)(V_{Kz} - W_z) + \frac{1}{2} m_z \bar{a}_{cz} \rho S_M \ell_{cm}^2 (V_{Kx} - W_x) \omega_y - \sum_j m_j (x_{pj}^2 - x_{oj}^2) \omega_y + M_{py}^\delta \delta_\psi; \quad (41)$$

уравнение моментов относительно поперечной оси:

$$\begin{aligned} J_z \dot{\omega}_z + (J_y - J_x) \omega_x \omega_y = M_{pz} - \frac{1}{2} C_y^{\sigma} \rho S_M x_F (V_{kx} - W_x)(W_{ky} - \\ - W_y) + \frac{1}{2} m_B^{\omega} \rho S_M l \rho^2 (V_{kx} - W_x) \omega_x - \sum_j m_j (x_p^2 - x_{y_j}^2) \omega_x + \\ + M_{pz}^{\sigma} \sigma_{\varphi}. \end{aligned} \quad (42)$$

Кинематические соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \dot{\gamma} - \dot{\psi} \sin \psi; \\ \omega_y &= \dot{\psi} \cos \gamma + \dot{\psi} \cos \psi \sin \gamma; \\ \omega_z &= \dot{\psi} \cos \psi \cos \gamma - \dot{\psi} \sin \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

К приведенным выше шести уравнениям движения ЛА необходимо добавить четыре уравнения управления (стабилизации) и три кинематических уравнения. Уравнения управления связывают углы поворота  $\theta$  с входными (стабилизирующими) параметрами соответствующего канала управления (стабилизации):

канал управления величиной скорости ЛА

$$L_x(\sigma_x) = f_x(V_{kx}, \dot{V}_{kx}, \dots); \quad (44)$$

канал управления креном

$$L_{\gamma}(\sigma_{\gamma}) = f_{\gamma}(\gamma, \omega_x, \dots); \quad (45)$$

канал управления рысканием

$$L_{\varphi}(\sigma_{\varphi}) = f_{\varphi}(\varphi, \omega_y, z, V_{kz}, \dots); \quad (46)$$

канал управления тангажом

$$L_{\psi}(\sigma_{\psi}) = f_{\psi}(v, \omega_z, y, V_{ky}, \dots). \quad (47)$$

В выражениях (44) - (47)  $L_x, L_{\gamma}, L_{\varphi}, L_{\psi}$  есть некоторые дифференциальные (в общем случае нелинейные) операторы;  $f_x, f_{\gamma}, f_{\varphi}, f_{\psi}$  - некоторые линейные комбинации входных параметров, перечисленных в скобках.

Уравнение невозмущенного движения можно получить как частный случай из уравнений возмущенного движения. При этом надо учесть, что программное движение - плоское, параметры ЛА, АС, ДУ и атмосферы - номинальные, а связанная система координат - невозмущенная. В плоском движении  $\bar{\psi} = \bar{\gamma} = \bar{V}_{Kz} = \bar{\omega}_y = \bar{\omega}_x = \bar{\sigma}_x = \bar{\sigma}_y = \bar{\sigma}_z = 0$ .

В результате получим следующую систему уравнений невозмущенного движения:

$$\left. \begin{aligned} \bar{m}(\ddot{\bar{V}}_{Kx} - \bar{\omega}_z \bar{V}_{Ky}) &= \bar{p} - \bar{m}g \sin \bar{\psi} - \\ &- \frac{1}{2} \bar{C}_{x0} \bar{\rho} \bar{S}_M \bar{V}_{Kx}^2 + \bar{F}_x^\sigma \bar{\sigma}_x; \\ \bar{m}(\ddot{\bar{V}}_{Ky} + \bar{\omega}_z \bar{V}_{Kx}) &= -\bar{m}g \cos \bar{\psi} - \\ &- \frac{1}{2} \bar{C}_y^\alpha \bar{\rho} - \bar{S}_M \bar{V}_{Kx} \bar{V}_{Ky} + \bar{F}_y^\sigma \bar{\sigma}_y; \\ \bar{J}_z \ddot{\bar{\psi}} &= -\frac{1}{2} \bar{C}_y^\alpha \bar{\rho} \bar{S}_M \bar{x}_F \bar{V}_{Kx} \bar{V}_{Ky} + \frac{1}{2} \bar{m}_z \bar{\omega}_z \bar{\rho} \bar{S}_M \bar{\ell}_\varphi^2 \bar{V}_{Kx} \bar{\psi} - \\ &- \sum_j \bar{m}_j (\bar{x}_p^2 - \bar{x}_{oj}^2) \ddot{\bar{\psi}} + \bar{M}_{Fz}^\sigma \bar{\sigma}_z. \end{aligned} \right\} (48)$$

В третьем уравнении системы (48) сделана замена  $\bar{\omega}_z = \ddot{\bar{\psi}}$  согласно соотношениям (43). При расчете траекторий систему (48) еще упрощают, полагая  $\bar{\psi} = \dot{\bar{\psi}} = \bar{\sigma}_x = 0$ . Тогда из третьего уравнения можно найти программный угол отклонения  $OY$  по тангажу:

$$\bar{\sigma}_z = \sigma_{znp}(t) = -\frac{1}{2} \frac{1}{\bar{M}_{Fz}^\sigma} \bar{C}_y^\alpha \bar{\rho} \bar{S}_M \bar{x}_F \bar{V}_{Kx}^2 \alpha_{np}(t), \quad (49)$$

где  $\alpha_{np}(t) = \bar{\alpha} = -\frac{\bar{V}_{Ky}}{\bar{V}_{Kx}}$  ввиду малости угла атаки.

## 5. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

Уравнения возмущенного движения ЛА как твердого тела (37)-(47) являются нелинейными дифференциальными уравнениями. Исследование динамики ЛА на основе этих уравнений представляет весьма сложную задачу, поэтому в зависимости от целей систему уравнений в той или иной мере упрощают (пример - расчет траекторий). Главное из упрощений при исследовании устойчивости и управляемости ЛА - замена нелинейных уравнений эквивалентной (с некоторой погрешностью) системой линейных диф-

дифференциальных уравнений — достигается операцией линеаризации уравнений возмущенного движения.

### 5.1. Общий принцип линеаризации

Идея линеаризации уравнений возмущенного движения заключается в том, что исходную систему уравнений для возмущенных параметров заменяют системой уравнений для вариаций этих параметров, сохранив лишь линейные комбинации вариаций.

Рассмотрим векторные уравнения движения (5). Уравнения возмущенного движения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\vec{H}}{dt} &= \vec{R} + m\vec{g}; \\ \frac{d\vec{L}}{dt} &= \vec{M}_R. \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Уравнения невозмущенного движения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\vec{H}}{dt} &= \vec{R} + m\vec{g}; \\ \frac{d\vec{L}}{dt} &= \vec{M}_R. \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Вычтем из системы (50) равенства (51), получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Delta\vec{H}}{dt} &= \Delta\vec{R} + m\vec{g}; \\ \frac{d\Delta\vec{L}}{dt} &= \Delta\vec{M}_R, \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

где  $\Delta\vec{H} = \vec{H} - \vec{H}$ ,  $\Delta\vec{L} = \vec{L} - \vec{L}$ ,

$$\Delta\vec{R} = \vec{R} - \vec{R}, \quad \Delta\vec{M}_R = \vec{M}_R - \vec{M}_R.$$

Векторные уравнения (52) называются уравнениями в вариациях. Возникает два вопроса: как найти вариации и на какие оси координат их спроектировать?

Так как исследуется устойчивость невозмущенного движения (программной траектории) и в любой момент времени положение невозмущенной связанной системы координат известно, то естественно векторные уравнения (52) спроектировать на эти оси. Тем более, что чувствительные

элементы АС измеряют отклонение вектора скорости от программного значения в проекции на оси невозмущенной связанной системы координат. Однако уравнения возмущенного движения в проекциях на невозмущенной оси нам неизвестны, поэтому поступим следующим образом. Перед процедурой линеаризации в уравнениях (37)–(42) выразим проекции вектора скорости  $V$  на оси  $OXYZ$  через его проекции на оси  $O\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$  согласно равенствам (3).

Процедура линеаризации уравнений движения ЛА заключается в следующем. Перенесем правые части уравнений (37)–(47) в левые части. Тогда любое из уравнений можно представить в виде суммы некоторых нелинейных функций параметров ЛА и атмосферы, а также фазовых координат:

$$\sum_K \mathcal{Y}_K(A_K, X_K) = 0, \quad (53)$$

где  $A_K = [a_{Ki}]$  – вектор параметров;

$X_K = [x_{Ki}]$  – вектор фазовых координат (кинематические параметры движения и их производные).

Например, момент аэродинамических сил можно представить в виде

$$M_y = \frac{1}{2} C_y^\alpha \rho S_M x_F (V_{Kx} - W_x)(V_{Kz} - W_z) = \mathcal{Y}_K(A_K, x_K), \quad (54)$$

где  $A_K = [a_{K1} = C_y^\alpha, a_{K2} = \rho, a_{K3} = S_M, a_{K4} = x_F,$   
 $a_{K5} = W_x, a_{K6} = W_z];$

$$X_K = [x_{K1} = V_{Kx}, x_{K2} = V_{Kz}].$$

Соответствующее выражению (53) уравнение невозмущенного движения (в проекциях на те же оси) имеет следующий вид:

$$\sum_K \mathcal{Y}_K(\bar{A}_K, \bar{X}_K) = 0. \quad (55)$$

Вариации векторов

$$\Delta A_K = A_K - \bar{A}_K, \quad \Delta X_K = X_K - \bar{X}_K. \quad (56)$$

Чтобы линеаризовать уравнение (53), надо линеаризовать отдельно каждую функцию  $\mathcal{Y}_K(A_K, X_K)$ . Линеаризация нелинейных функций, как

известно, основывается на разложении функций в ряд Тейлора по вариациям аргументов и отбрасывании в разложении нелинейных (по вариациям) членов, т.е. малых второго порядка и выше (МВП).

Итак, выполним линеаризацию по фазовым координатам:

$$y_k(A_k, X_k) \approx y_k(A_k, \bar{X}_k) + \sum_j \left( \frac{\partial y_k}{\partial x_{kj}} \right)_{A_k, \bar{X}_k} \Delta x_{kj} \quad (57)$$

здесь частные производные  $\frac{\partial y_k}{\partial x_{kj}}$  вычисляются при возмущенных значениях вектора  $A_k$  и невозмущенных значениях вектора  $\bar{X}_k$ . Далее линеаризуем функцию  $y_k(A_k, \bar{X}_k)$  по вариациям вектора  $A_k$ :

$$y_k(A_k, \bar{X}_k) \approx y_k(\bar{A}_k, \bar{X}_k) + \sum_i \left( \frac{\partial y_k}{\partial a_{ki}} \right)_{\bar{A}_k, \bar{X}_k} \Delta a_{ki} \quad (58)$$

В этом выражении частные производные определяются по невозмущенным значениям векторов  $A_k$  и  $X_k$ .

Подставив функцию (58) в выражения (57) и (53), получим

$$\sum_k y_k(A_k, X_k) = \sum_k y_k(\bar{A}_k, \bar{X}_k) + \sum_k \sum_j \frac{\partial y_k}{\partial x_{kj}} \Delta x_{kj} + \sum_k \sum_i \frac{\partial y_k}{\partial a_{ki}} \Delta a_{ki} = 0. \quad (59)$$

В уравнении (59) первая сумма в правой части равенства равна нулю в силу равенства (55).

Будем называть в дальнейшем вариацией функции следующее выражение:

$$\Delta y_k(A_k, X_k) = \sum_j \left( \frac{\partial y_k}{\partial x_{kj}} \right)_{A_k, \bar{X}_k} \Delta x_{kj} + \sum_i \left( \frac{\partial y_k}{\partial a_{ki}} \right)_{\bar{A}_k, \bar{X}_k} \Delta a_{ki} \quad (60)$$

Окончательно выражение (59) можно записать в виде

$$\sum_k \Delta y_k(A_k, X_k) = 0$$

или

$$\sum_k \sum_j C_{kj} \Delta x_{kj} = F_{\text{возм}}, \quad (61)$$

где  $C_{kj} = \left( \frac{\partial y_k}{\partial x_{kj}} \right)_{A_k, \bar{X}_k}$  - коэффициенты линеаризованных уравнений движения;

$\Delta x_{kj}$  - вариации фазовых координат;

$F_{возм} = - \sum_K \sum_L \left( \frac{\partial Y_K}{\partial a_{Kl}} \right) \bar{A}_{Kl} \Delta a_{Kl}$  - возмущающая сила (или моменты) в соответствующем уравнении возмущенного движения.

Уравнение (60) является линейным дифференциальным относительно вариаций фазовых координат  $\Delta a$ , записанным в проекции на оси возмущенной связанной системы координат. Как видно из описания алгоритма линеаризации, знание конкретного вида уравнений невозмущенного движения в проекции на возмущенную систему координат не требуется. Сам алгоритм описывается формулами (60) и (61).

## 5.2. Линеаризация кинематических соотношений и левых частей уравнений

Выполним линеаризацию выражений (43). Ввиду малости углов  $\gamma$  и  $\psi$  МВП считаем

$$\sin \gamma \approx \gamma, \sin \psi \approx \psi, \cos \gamma \approx 1, \cos \psi \approx 1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\gamma} - \dot{\psi} \psi, & \omega_y &= \dot{\psi} + \dot{\gamma} \gamma, \\ \omega_z &= \dot{\psi} - \dot{\gamma} \gamma. \end{aligned} \quad (62)$$

Ввиду того, что  $\bar{\psi} = \bar{\gamma} = 0$  и  $\bar{v} = \bar{v} + \Delta v$ ,

$$\gamma = \Delta \gamma, \dot{\gamma} = \Delta \dot{\gamma}, \psi = \Delta \psi, \dot{\psi} = \Delta \dot{\psi}, \Delta \dot{\psi} = \dot{v} (\bar{v} \approx 0)$$

являются малыми первого порядка.

Отбрасывая в формулах (62) малые второго порядка, получаем

$$\omega_x = \Delta \dot{\gamma} - \bar{v} \Delta \psi, \omega_y = \Delta \dot{\psi} + \bar{v} \Delta \gamma, \omega_z = \dot{v} + \Delta \dot{v}. \quad (63)$$

Скорость изменений программного угла тангажа есть МВП по отношению  $\Delta \dot{\gamma}$ ,  $\Delta \dot{\psi}$  и  $\Delta \dot{v}$ , поэтому выражения можно еще упростить и окончательно записать так:

$$\omega_x = \dot{\gamma}, \quad \omega_y = \dot{\psi}, \quad \omega_z = \dot{\nu}. \quad (64)$$

Из соотношений (63) видно, что угловые скорости выражения ЛА есть малые первого порядка.

Матрица перехода (4) с точностью до МВП примет следующий вид:

$$M = \begin{bmatrix} 1, & \Delta \nu, & -\Delta \psi \\ -\Delta \nu, & 1, & \Delta \gamma \\ \Delta \psi, & -\Delta \gamma, & 1 \end{bmatrix}. \quad (65)$$

Используя эту матрицу, будем иметь следующие равенства перепроектирования скоростей (с точностью до МВП):

$$\left. \begin{aligned} V_{Kx} &= V_{K\bar{x}} + V_{K\bar{y}} \Delta \nu - V_{K\bar{z}} \Delta \psi \approx V_{K\bar{x}}; \\ V_{Ky} &= V_{K\bar{y}} + V_{K\bar{z}} \Delta \gamma - V_{K\bar{x}} \Delta \nu \approx V_{K\bar{y}} - V_{K\bar{x}} \Delta \nu; \\ V_{Kz} &= V_{K\bar{z}} + V_{K\bar{x}} \Delta \psi - V_{K\bar{y}} \Delta \gamma \approx V_{K\bar{z}} + V_{K\bar{x}} \Delta \psi. \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

Аналогичные формулы перехода получим для вектора скорости ветра (считаем, что  $W_{\bar{y}} \ll W_{\bar{x}}$ ):

$$\left. \begin{aligned} W_x &\approx W_{\bar{x}}; \\ W_y &\approx W_{\bar{y}} - W_{\bar{x}} \Delta \nu; \\ W_z &\approx W_{\bar{z}} + W_{\bar{x}} \Delta \psi. \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

Запишем равенства для производных скорости по времени

$$\left. \begin{aligned} \dot{V}_{Kx} &\approx \dot{V}_{K\bar{x}}; \\ \dot{V}_{Ky} &\approx \dot{V}_{K\bar{y}} - \dot{V}_{K\bar{x}} \Delta \nu - \Delta \nu \dot{V}_{K\bar{x}}; \\ \dot{V}_{Kz} &\approx \dot{V}_{K\bar{z}} + \dot{V}_{K\bar{x}} \Delta \psi + \Delta \psi \dot{V}_{K\bar{x}}. \end{aligned} \right\} \quad (68)$$

Приступая к линеаризации левых частей уравнений (37)-(42), необходимо подставить в них выражения (66) и (68). В процессе линеаризации в возмущении  $F_{\text{возм}}$  отбросим ввиду малости члены, пропорциональные вариациям массы и моментов инерции.

Итак, отбрасывая МВП, получим следующие линеаризованные выражения (вариации) левых частей уравнений:

$$\left. \begin{aligned}
 \Delta [m(\dot{V}_{Kx} + \dot{\psi} V_{Kz} - \dot{v} V_{Ky})] &= \Delta (m \dot{V}_{K\bar{x}}) = m \Delta \dot{V}_{K\bar{x}}; \\
 \Delta [m(\dot{V}_{Ky} + \dot{v} V_{Kx} - \dot{j} V_{Kz})] &= \Delta [m(\dot{V}_{K\bar{y}} - \dot{V}_{K\bar{x}} \Delta \psi - \\
 - \Delta \dot{v} V_{Kx} + \dot{v} V_{K\bar{x}})] &= \Delta [m(\dot{V}_{K\bar{y}} - \dot{V}_{K\bar{x}} \Delta \psi)] = \\
 = m \Delta \dot{V}_{K\bar{y}} - m \dot{V}_{K\bar{x}} \Delta \psi; \\
 \Delta [m(\dot{V}_{Kz} + \dot{j} V_{Ky} - \dot{\psi} V_{Kx})] &= \Delta [m(\dot{V}_{K\bar{z}} + \dot{V}_{K\bar{x}} \Delta \psi + \\
 + \Delta \dot{\psi} V_{K\bar{x}} - \dot{\psi} V_{K\bar{x}})] &= \Delta [m(\dot{V}_{K\bar{z}} + \dot{V}_{K\bar{x}} \Delta \psi)] = \\
 = m \Delta \dot{V}_{K\bar{z}} + m \dot{V}_{K\bar{x}} \Delta \psi;
 \end{aligned} \right\} (69)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \Delta [J_x \dot{\omega}_x + (J_z - J_y) \omega_y \omega_z] &= \Delta [J_x \ddot{j} + \\
 + (J_z - J_y) \dot{\psi} \dot{v}] &= J_x \Delta \ddot{j}; \\
 \Delta [J_y \dot{\omega}_y + (J_x - J_z) \omega_z \omega_x] &= \Delta [J_y \ddot{\psi} + \\
 + (J_x - J_z) \dot{v} \dot{j}] &= J_y \Delta \ddot{\psi}; \\
 \Delta [J_z \dot{\omega}_z + (J_y - J_x) \omega_x \omega_y] &= \Delta [J_z \ddot{v} + \\
 + (J_y - J_x) \dot{j} \dot{\psi}] &= J_z \Delta \ddot{v}.
 \end{aligned} \right\} (70)$$

### 5.3. Линеаризация правых частей уравнений

При линеаризации правых частей уравнений будем пренебрегать как МВП в выражениях для возмущенных сил и моментов членами, пропорциональными следующим вариациям:

$$\Delta S_M, \Delta \varphi, \Delta \varphi_{ст}, \Delta x_p, \Delta x_{ij}, \Delta F_x^\sigma, \Delta F_y^\sigma; \Delta F_z^\sigma, \Delta m_x^{\bar{\omega}_x}, \Delta m_z^{\bar{\omega}_z}, \Delta \dot{m}_j, \Delta M_{Fx}^\sigma, \Delta M_{Fy}^\sigma, \Delta M_{Fz}^\sigma.$$

Проекции векторов  $\vec{V}_K$  и  $\vec{W}$  выразим согласно равенствам (66) и (67), а  $\vec{\omega}$  - согласно равенству (64). Также учтем, что  $\Delta \vec{v} = \Delta \vec{\psi} = \Delta \vec{r} = 0$ .

Итак, найдем вариации правых частей уравнений возмущенного движения.

Вариация правой части уравнения (37) будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} & \Delta \left[ \rho - mg \sin \vartheta \cos \psi - \frac{1}{2} C_{x0} \rho S_M (V_{Kx} - W_x)^2 + F_x^\sigma \sigma_x \right] = \\ & = \Delta \rho - mg \cos \vartheta \Delta \vartheta - \frac{1}{2} S_M \Delta \left[ C_{x0} \rho (V_{Kx} - W_x)^2 \right] + F_x^\sigma \Delta \sigma_x = \\ & = \Delta \rho - mg \cos \vartheta \Delta \vartheta - \frac{1}{2} \bar{S}_M \bar{\rho} \bar{V}_{Kx}^2 \Delta C_{x0} - \frac{1}{2} \bar{S}_M \bar{C}_{x0} \bar{V}_{Kx}^2 \Delta \rho + \\ & + \bar{S}_M \bar{C}_{x0} \bar{\rho} \bar{V}_{Kx} W_x - S_M C_{x0} \rho (V_{Kx} - W_x) \Delta V_{Kx} + F_x^\sigma \Delta \sigma_x. \end{aligned} \quad (71)$$

Вариация правой части уравнения (38) получится следующего вида:

$$\begin{aligned} & \Delta \left[ P_y - mg \cos \vartheta \cos \gamma - \frac{1}{2} C_y^\alpha \rho S_M (V_{Ky} - W_y) + \right. \\ & \left. + F_y^\sigma \sigma_y \right] = \Delta P_y + mg \sin \vartheta \Delta \vartheta - \frac{1}{2} S_M \Delta \left\{ \rho C_y^\alpha (V_{Ky} - W_y) [(V_{Ky} - W_y) - (V_{Kx} - W_x) \Delta \vartheta] \right\} + F_y^\sigma \Delta \sigma_y = \\ & = P_y + mg \sin \vartheta \Delta \vartheta - \frac{1}{2} \bar{S}_M \bar{C}_y^\alpha \bar{V}_{Kx} \bar{V}_{Ky} \Delta \rho - \frac{1}{2} \bar{S}_M \bar{\rho} \bar{V}_{Kx} \bar{V}_{Ky} \Delta C_y^\alpha + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \bar{S}_M \bar{\rho} \bar{C}_y^\alpha \bar{V}_{Ky} W_x + \frac{1}{2} \bar{S}_M \bar{\rho} \bar{C}_y^\alpha \bar{V}_{Kx} W_y - \frac{1}{2} S_M \rho C_y^\alpha (\bar{V}_{Ky} - \\
& - \bar{W}_y) \Delta V_{Kx} - \frac{1}{2} S_M \rho C_y^\alpha (\bar{V}_{Kx} - W_x) \Delta V_{Ky} + \frac{1}{2} S_M \rho C_y^\alpha (\bar{V}_{Kx} - \\
& - W_x)^2 \Delta \psi + F_y^\sigma \Delta \sigma_\psi = P_y + [mg \sin \bar{\psi} + \frac{1}{2} S_M \rho C_y^\alpha (\bar{V}_{Kx} - \\
& - W_x)^2 \Delta \psi + \frac{1}{2} \bar{S}_M \bar{\rho} \bar{C}_y^\alpha \bar{V}_{Kx} W_y - \frac{1}{2} S_M \rho C_y^\alpha (\bar{V}_{Kx} - \\
& - W_x) \Delta V_{Ky} - \frac{1}{2} S_M \rho C_y^\alpha (\bar{V}_{Ky} - W_y) \Delta V_{Kx} + \\
& + F_y^\sigma \Delta \sigma_\psi.
\end{aligned} \tag{72}$$

В окончательной записи выражения (72) в возмущающей силе отброшены МВ. Аналогичные члены будем опускать при линеаризации правых частей других уравнений.

Вычисляем вариацию правой части уравнения (39).

При линеаризации выражения для аэродинамической силы воспользуемся полученным в уравнении (72) окончательным значением, заменив  $(V_{Ky} - W_y)$  на  $(V_{Kz} - W_z)$  :

$$\begin{aligned}
& \Delta [P_z + mg(\cos \psi \sin \gamma - \sin \psi \sin \varphi \cos \gamma) - \\
& - \frac{1}{2} C_y^\alpha \rho S_M (V_{Kx} - W_x)(V_{Kz} - W_z) + F_z^\sigma \delta_\psi] = \\
& = P_z - mg \cos \bar{\psi} \Delta \gamma - [mg \sin \bar{\psi} + \frac{1}{2} S_M \rho C_y^\alpha (\bar{V}_{Kx} - \\
& - W_x)^2] \Delta \psi + \frac{1}{2} \bar{S}_M \bar{\rho} \bar{C}_y^\alpha \bar{V}_{Kx} W_z - \frac{1}{2} S_M \rho C_y^\alpha (\bar{V}_{Kx} - \\
& - W_x) \Delta V_{Kz} + \frac{1}{2} S_M \rho C_y^\alpha W_z \Delta V_{Kx} + F_z^\sigma \Delta \delta_\psi.
\end{aligned} \tag{73}$$

Вычислим вариацию правой части уравнения (40)

$$\begin{aligned} & \Delta \left[ M_{px} + M_x + \frac{1}{2} m_x \bar{\omega}_x \rho S_M l_{CT}^2 (V_{Kx} - W_x) \omega_x + M_{Fx}^\sigma \delta_{\gamma'} \right] = \\ & = \Delta M_{px} + \Delta M_x + \frac{1}{2} m_x \bar{\omega}_x S_M l_{CT}^2 \Delta \left[ \rho (V_{Kx} - W_x) \Delta j' \right] + \\ & + M_{Fx}^\sigma \Delta \delta_{\gamma'} = M_{p\bar{x}} + \Delta M_{\bar{x}} + \frac{1}{2} m_x \bar{\omega}_x S_M l_{CT}^2 \rho (\bar{V}_{K\bar{x}} - \\ & - W_{\bar{x}}) \Delta j' + M_{F\bar{x}}^\sigma \Delta \delta_{\gamma'}. \end{aligned} \quad (74)$$

Найдем вариацию правой части уравнения (41). При линеаризации выражения для аэродинамического момента, зависящего от угла атаки, воспользуемся соотношением для аэродинамической силы, содержащимся в (73), учитывая множитель  $x_F$  и обратный знак:

$$\begin{aligned} & \Delta \left\{ M_{py} + \frac{1}{2} C_y^\alpha \rho S_M x_F (V_{Kx} - W_x) (V_{Kz} - W_z) + \right. \\ & \left. + \left[ \frac{1}{2} m_z \bar{\omega}_z \rho S_M l_\varphi^2 (V_{Kx} - W_x) - \sum_j \dot{m}_j (x_p^2 - x_{oj}^2) \right] \omega_y + \right. \\ & \left. + M_{Fy}^\sigma \delta_\psi \right\} = \bar{M}_{p\bar{y}} + \frac{1}{2} S_M \rho C_y^\alpha x_F (\bar{V}_{K\bar{x}} - W_{\bar{x}})^2 \Delta \psi - \\ & - \frac{1}{2} S_M \rho C_y^\alpha x_F \bar{V}_{K\bar{x}} W_z + \frac{1}{2} S_M \rho C_y^\alpha x_F (\bar{V}_{K\bar{x}} - W_{\bar{x}}) \Delta V_{Kz} - \\ & - \frac{1}{2} S_M \rho C_y^\alpha x_F W_z \Delta V_{Kx} + \left[ \frac{1}{2} m_z \bar{\omega}_z \rho S_M l_\varphi^2 (\bar{V}_{K\bar{x}} - W_{\bar{x}}) - \right. \\ & \left. - \sum_j \dot{m}_j (x_p^2 - x_{oj}^2) \right] \Delta \psi + M_{Fy}^\sigma \Delta \delta_\psi. \end{aligned} \quad (75)$$

Вариация правой части уравнения (42) с точностью до индексов и знаков аналогична выражению (75):

$$\begin{aligned} & \Delta \left\{ M_{pz} - \frac{1}{2} C_y^\alpha \rho S_M x_F (V_{Kx} - W_x) (V_{Ky} - W_y) + \right. \\ & \left. + \left[ \frac{1}{2} m_z \bar{\omega}_z \rho S_M l_\varphi^2 (V_{Kx} - W_x) - \sum_j \dot{m}_j (x_p^2 - x_{oj}^2) \right] \omega_z + \right. \\ & \left. + M_{Fz}^\sigma \delta_\psi \right\} = M_{p\bar{z}} + \frac{1}{2} S_M \rho C_y^\alpha x_F (\bar{V}_{K\bar{x}} - W_{\bar{x}})^2 \Delta \psi + \\ & + \frac{1}{2} C_y^\alpha \rho S_M x_F \bar{V}_{K\bar{x}} W_y - \frac{1}{2} C_y^\alpha \rho S_M x_F (\bar{V}_{K\bar{x}} - W_{\bar{x}}) \Delta V_{Ky} - \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2} C_y^\alpha \rho S_M x_F (\bar{V}_{Ky} - W_y) \Delta V_{Kx} + \left[ \frac{1}{2} m_z \bar{\omega}_z \rho S_M l_\varphi^2 (\bar{V}_{Kx} - W_x) - \sum_j \dot{m}_j (x_p^2 - x_{oj}^2) \right] \Delta \psi + M_{Fz}^\sigma \Delta \delta_\psi.$$

6. РАЗДЕЛЕНИЕ ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ  
ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ ЛА  
ПО КАНАЛАМ СТАБИЛИЗАЦИИ.  
УРАВНЕНИЯ АВТОМАТОВ СТАБИЛИЗАЦИИ

Чтобы получить полную систему линеаризованных уравнений возмущенного движения ЛА как твердого тела, необходимо объединить вариации левых и правых частей уравнений. При этом следует слагаемые, пропорциональные вариациям неизвестных фазовых координат и отклонениям органов управления, перенести в левые части равенств. Тогда в правых частях уравнений останутся возмущающие силы и моменты, независимые от вариаций фазовых координат. При этом в уравнениях сил в проекциях на нормальную и поперечную ось встретится соотношение такого вида:

$$\left[ m \dot{\bar{V}}_{Kx} + mg \sin \bar{\psi} + \frac{1}{2} S_M \rho C_y^\alpha (\bar{V}_{Kx} - W_x)^2 \right] x \left\{ \Delta \psi \right\}. \quad (77)$$

Заменим в соотношении (77) выражение в квадратной скобке, используя первое из равенств (48). При этом пренебрегаем произведением

$\bar{\omega}_z \bar{V}_{Ky}$  как МВП и считаем, что управляющая сила учтена в  $\rho$ . Тогда, так как  $m \approx \bar{m}$ ,

$$m \dot{\bar{V}}_{Kx} + mg \sin \bar{\psi} + \frac{1}{2} S_M \rho C_y^\alpha (\bar{V}_{Kx} - W_x)^2 = \rho - \frac{1}{2} C_{x0} \bar{\rho} S_M \bar{V}_{Kx}^2 + + \frac{1}{2} (C_{ya}^\alpha + C_{x0}) \rho S_M (\bar{V}_{Kx} - W_x)^2 \approx \rho + \frac{1}{2} C_{ya}^\alpha \rho S_M (\bar{V}_{Kx} - W_x)^2,$$

(78)

так как

$$C_{x0} \ll C_{ya}^\alpha.$$

Таким образом сохраняется случайный характер значений квадратной скобки в соотношении (77) и, следовательно, соответствующих коэффициентов уравнений возмущенного движения.

Сделаем еще одно упрощение. Как видно из равенств (72) - (76), в уравнения движения, кроме выражения (74), войдут члены, пропорциональные вариации скорости  $\Delta V_{kx}$ . Однако эти слагаемые имеют место лишь при наличии скоростей ветра  $W_y \neq 0$  и  $W_x \neq 0$ . Ввиду малости скоростей ветра по отношению  $\bar{V}_{kx}$  указанными слагаемыми в дальнейшем будем пренебрегать как МВН по сравнению с другими членами.

Теперь запишем полную систему линеаризованных уравнений возмущенного движения ЛА как твердого тела в виде равенств линейных и угловых ускорений соответственно. При этом черточки над координатными осями будем опускать, так как в дальнейшем они уже теряют свой смысл.

Система уравнений движения в вариациях разделяется на две независимые подсистемы, описывающие продольное и боковое возмущенное движение ЛА.

А. Уравнения продольного движения:

$$\Delta \dot{V}_{kx} + C_{xx} \dot{x} \Delta V_{kx} + C_{xv} \Delta v + C_{x\sigma} \sigma \Delta \delta_x = \frac{\Delta F_{x\delta}}{m}; \quad (79)$$

$$\Delta \dot{V}_{ky} + C_{yy} \dot{y} \Delta V_{ky} + C_{yv} \Delta v + C_{y\sigma} \sigma \Delta \delta_y = \frac{\Delta F_{y\delta}}{m}; \quad (80)$$

$$\Delta \dot{v} + C_{vv} \dot{v} \Delta v + C_{v\sigma} \sigma \Delta \delta_x + C_{v\sigma} \sigma \Delta \delta_y = \frac{\Delta M_{x\delta}}{J_z}, \quad (81)$$

где

$$\left. \begin{aligned} C_{xx} \dot{x} &= \frac{1}{m} C_{x0} \rho S_M (\bar{V}_{kx} - W_x)^2; \\ C_{xv} &= g \cos \bar{v}; \quad C_{x\sigma} = \frac{\rho}{m}; \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

$$\Delta F_{x\delta} = \Delta P + \bar{C}_{x0} \bar{\rho} \bar{S}_M \bar{V}_{kx} W_x - \frac{1}{2} \bar{C}_{x0} \bar{\rho} \bar{S}_M \bar{V}_{kx}^2 \left( \frac{\Delta \rho}{\rho} + \frac{\Delta C_{x0}}{C_{x0}} \right);$$

$$\left. \begin{aligned} C_{yy} \dot{y} &= \frac{1}{2m} C_y^\alpha \rho S_M (\bar{V}_{kx} - W_x); \quad C_{y\sigma} = -\frac{\rho \delta}{m}; \\ C_{yv} &= -\frac{1}{m} \left[ \rho + \frac{1}{2} C_y^\alpha \rho S_M (\bar{V}_{kx} - W_x)^2 \right]; \end{aligned} \right\} \quad (83)$$

$$\Delta F_{y\delta} = P_y + \frac{1}{2} \bar{C}_y^\alpha \bar{\rho} \bar{S}_M \bar{V}_{kx} W_y;$$

$$\left. \begin{aligned}
 C_{xix} &= \frac{1}{J_z} \left[ \sum_j \dot{m}_j (x_p^2 - x_{oj}^2) - \frac{1}{2} m_z \bar{\omega}_z \rho S_M \bar{v}_p^2 \right. \\
 &\times (\bar{V}_{Kx} - W_x) \Big]; \\
 C_{xix} &= -\frac{1}{2J_z} C_y^\alpha \rho S_M x_F (\bar{V}_{Kx} - W_x)^2; \\
 C_{xij} &= \frac{1}{2J_z} C_y^\alpha \rho S_M x_F (\bar{V}_{Kx} - W_x); \\
 C_{xio} &= \frac{\rho \sigma |x_F|}{J_z} \\
 \Delta M_{z\delta} &= M_{pz} + \frac{1}{2} \bar{C}_y^\alpha \bar{\rho} \bar{S}_M \bar{x}_F \bar{V}_{Kx} W_y.
 \end{aligned} \right\} (84)$$

В уравнениях продольного движения неизвестными кинематическими параметрами являются  $\Delta V_{Kx}$ ,  $\Delta V_{Ky}$ ,  $\Delta \psi$ , а также отклонения  $OY$   $\Delta \delta_x$  и  $\Delta \delta_y$ . Чтобы подсистема стала замкнутой и имела единственное решение при заданных возмущениях, коэффициентах и начальных условиях, необходимо дописать два уравнения управления (уравнения АС).

Уравнения (80) и (81) можно исследовать независимо от (79). Эти два уравнения описывают движение ДА в плоскости тангажа. Линеаризованное уравнение АС, учитывающее его инерционные свойства, обычно записывается в виде [5]

$$\begin{aligned}
 \tau_2 \Delta \ddot{\delta}_y + \tau_1 \Delta \dot{\delta}_y + \Delta \delta_y &= a_0 \Delta \psi + a_1 \Delta \dot{\psi} + a_2 \Delta \psi + \\
 + a_3 \Delta V_{Ky}, &
 \end{aligned} \quad (85)$$

где  $\tau_2$ ,  $\tau_1$ ,  $a_i$  ( $i = 0, 3$ ) — некоторые коэффициенты, выбранные из условия обеспечения устойчивости полета и требуемого качества регулирования. Правая часть уравнения (85) представляет собой входной сигнал АС в плоскости тангажа и является линейной комбинацией фазовых координат данного движения.

Полученные в результате исследования уравнений (80), (81) и (85) значения  $\Delta \psi$  как дополнительное возмущение могут быть подставлены в уравнение (79). В результате этого уравнение (79) может интегрироваться отдельно от уравнений (80), (81), но в совокупности с уравнением системы регулирования кажущейся скорости (РКС), имеющим вид  $\Delta \delta_x = b_1 \Delta V_{Kx} + b_2 \Delta \dot{V}_{Kx}$ .

Б. Уравнения бокового движения:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{V}_{Kz} + C_{z\dot{z}} \Delta V_{Kz} + C_{z\psi} \Delta \psi + C_{z\gamma} \Delta \gamma + \\ + C_{z\sigma} \Delta \sigma = \frac{\Delta F_{z\delta}}{m}; \end{aligned} \quad (86)$$

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\psi} + C_{\psi\dot{\psi}} \Delta \dot{\psi} + C_{\psi\psi} \Delta \psi + C_{\psi\dot{z}} \Delta V_{Kz} + \\ + C_{\psi\sigma} \Delta \sigma = \frac{\Delta M_{y\delta}}{J_y}; \end{aligned} \quad (87)$$

$$\Delta \ddot{\gamma} + C_{\gamma\dot{\gamma}} \Delta \dot{\gamma} + C_{\gamma\sigma} \Delta \sigma = \frac{\Delta M_{x\delta}}{J_x}, \quad (88)$$

где ввиду осевой симметрии ( $J_y = J_z$ ) имеем:

$$\left. \begin{aligned} C_{z\dot{z}} = C_{y\dot{y}}; \quad C_{z\psi} = -C_{y\psi}; \quad C_{z\sigma} = -C_{y\sigma}; \\ C_{z\gamma} = g \cos \bar{\psi}; \quad \Delta F_{z\delta} = P_z + \frac{1}{2} \bar{c}_y^\alpha \bar{\rho} \bar{S}_M \bar{V}_{Kx} \bar{W}_z; \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

$$\left. \begin{aligned} C_{\psi\dot{\psi}} = C_{\psi\dot{z}}; \quad C_{\psi\psi} = C_{\psi\dot{z}}; \quad C_{\psi\dot{z}} = -C_{\psi\dot{y}}; \\ C_{\psi\sigma} = C_{\psi\dot{z}}; \quad \Delta M_{y\delta} = M_{py} - \frac{1}{2} \bar{c}_y^\alpha \bar{\rho} \bar{S}_M \bar{x}_F \bar{V}_{Kx} \bar{W}_z; \end{aligned} \right\} \quad (90)$$

$$\left. \begin{aligned} C_{\gamma\dot{\gamma}} = -\frac{1}{2J_x} m_x \bar{\rho} S_H \ell_{OT}^2 (\bar{V}_{Kx} - W_x); \\ C_{\gamma\sigma} = \frac{\rho z p}{J_x}; \\ \Delta M_{x\delta} = M_{px} + \Delta M_x. \end{aligned} \right\} \quad (91)$$

В уравнениях (86) - (87) неизвестными кинематическими параметрами являются  $\Delta V_{KZ}$ ,  $\Delta\psi$ ,  $\Delta\gamma$ , а также  $\Delta\dot{\psi}$  и  $\Delta\dot{\gamma}$ . Уравнение (88) может быть проинтегрировано отдельно от других. Оно описывает возмущенное движение ЛА по крену. Одним из возможных вариантов линейного уравнения АС по крену является выражение

$$\tau_1 \Delta \dot{\delta}_\gamma + \Delta \delta_\gamma = a_\gamma \Delta \gamma + a_j \Delta \dot{\gamma}. \quad (92)$$

Входным сигналом также является линейная комбинация фазовых координат. Коэффициенты уравнения АС подбираются из условия обеспечения устойчивости полета.

Определив из уравнения (88) и подставив в выражение (86) параметр  $\Delta\gamma$ , допустимо далее воспринимать его как возмущающий фактор. Поэтому исследовать уравнения (86) и (87) на устойчивость решений можно без учета (88), но с уравнением АС в плоскости рыскания, которое ввиду осевой симметрии ЛА аналогично уравнению (85):

$$\begin{aligned} \tau_2 \Delta \ddot{\delta}_\psi + \tau_1 \Delta \dot{\delta}_\psi + \Delta \delta_\psi = a_0 \Delta \psi + a_1 \Delta \dot{\psi} + \\ + a_2' \Delta z + a_3' \Delta V_{KZ}, \end{aligned} \quad (93)$$

где  $a_2' = -a_2$  и  $a_3' = -a_3$ .

На основе полученных выше линеаризованных уравнений возмущенного движения ЛА и автоматов стабилизации проводится исследование устойчивости и управляемости ЛА. Эти же уравнения могут быть использованы при расчете динамических нагрузок, действующих на ЛА в полете в турбулентной атмосфере. Уравнения полностью сохраняют случайный характер коэффициентов, а вариации линейных и угловых скоростей выражены через их проекции на оси невозмущенной связанной системы координат.

Вопросы исследования устойчивости и управляемости ЛА как твердого тела являются содержанием второго раздела темы "Устойчивость и управляемость ЛА", в данном пособии не рассматриваемом.

#### Библиографический список

И. А б г а р я н К.А., Р а п о п о р т И.М. Динамика ракет. М.: Машиностроение, 1969.

2. Лебедев А.А., Чернобровкия Л.С. Динамика полета. М.: Машиностроение, 1973.
3. Колесников К.С. Динамика ракет. М.: Машиностроение, 1980.
4. Пярус Н.В., Шметтер С.М. Аэрология. Л.: Гидрометеоздат, 1965.
5. Кузовков Н.Т. Системы стабилизации летательных аппаратов (баллистических и зенитных ракет). М.: Высшая школа, 1976.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	3
1. Системы координат и основные кинематические соотношения при исследовании устойчивости движения ЛА. Уравнения движения в общем виде . . . . .	5
2. Силы и моменты, действующие на ЛА в полете . . . . .	9
2.1. Сила тяжести и сила тяги . . . . .	9
2.2. Управляющие силы и моменты . . . . .	11
2.3. Аэродинамические силы и моменты, зависящие от пространственного угла атаки . . . . .	14
2.4. Силы и моменты, зависящие от угловых скоростей вращения ЛА . . . . .	16
3. Понятие возмущенного и невозмущенного движения. Возмущения, действующие на ЛА в полете . . . . .	20
4. Уравнения в развернутом виде возмущенного и невозмущенного движения ЛА как твердого тела . . . . .	23
5. Линеаризация уравнений возмущенного движения . . . . .	25
5.1. Общий принцип линеаризации . . . . .	26
5.2. Линеаризация кинематических соотношений и левых частей уравнений . . . . .	29
5.3. Линеаризация правых частей уравнений . . . . .	32
6. Разделение линеаризованных уравнений возмущенного движения ЛА по каналам стабилизации. Уравнения автоматов стабилизации . . . . .	35
Библиографический список . . . . .	39