МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

КУЙБЫШЕВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ имени академика С. П. КОРОЛЕВА

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

Утверждено
редакционно-издательским
советом института
в качестве
методических указаний
для студентов

КУЙБЫШЕВ 1984

УДК 517.1(075)

В методических указаниях содержится разбор решения типовых задач по всем разделам курса высшей математики, изучаемым в первом семестре на вечернем отделении, а именно: функции, пределы, непрерывность, комплексные числа. По каждой теме предлагается большое количество задач для самостоятельного решения, а также вопросы для самоконтроля по теоретическому материалу; даются варианты типовой расчетно-графической работы и индивидуальных домашних заданий.

Методические указания рассчитаны на студентов вечернего отделения КуАИ.

Составители: П.И.Антимонов, О.М.Карпилова

Рецензенты: Г.П.Федорченко, Г.Н.Гутман

Утверждено редакционным советом института в качестве методических указаний

I. МНОЖЕСТВА. ФУНКЦИИ. ГРАФИКИ ФУНКЦИЙ

Вопросы для самоконтроля

I. Как можно задавать множества?

2. Что называется числовой функцией? Приведите пример какой-либо числовой функции.

3. Что такое область определения функции?

4. Приведите пример функции, областью определения которой является: а) вся числовая ось; б) все положительные числа; в) отрезок $[2\ ;\ 5]$.

5. Что такое график функции?

6. Что такое обратная функция?

7. Как расположены относительно друг друга графики прямой и обратной функций?

8. Что такое сложная функция?

9. Для следующих функций укажите область определения и постройте их графики:

а) $y=x^a$ (рассмотрите случаи $a=2$, $a=3$, $a=1/2$, $a=1/3$). Как называется эта функция?

б) $y=a^x$ ($a>0$; $a\neq 1$). (Рассмотрите 2 случая). Как называется эта функция?

в) $y=\log_a x$ ($a>0$; $a\neq 1$). Рассмотрите 2 случая. Как называется эта функция? Как эта функция связана с показательной функцией?

г) $y=\sin x$; $y=\cos x$; $y=\operatorname{tg} x$; $y=\operatorname{ctg} x$.
Как называются эти функции?

д) $y=\arcsin x$; $y=\arccos x$; $y=\operatorname{arctg} x$.
Как называются эти функции? Как они связаны с тригонометрическими функциями?

I0. Дан график функции $y=f(x)$. Как построить графики функций: а) $y=Kf(x)$, б) $y=f(ax)$, в) $y=f(x)+b$, г) $y=f(x+c)$, д) $y=-f(x)$, е) $y=f(-x)$, ж) $y=|f(x)|$, з) $y=f(|x|)$?

Примеры

1) Перечислить элементы множества

$$A=\{x\in Z \mid (x-3)(x^2-1)=0 \text{ и } x\geqslant 0\}.$$

Решение. Уравнение $(x-3)(x^2-1)=0$ имеет три корня $x_1=-1$; $x_2=1$; $x_3=3$, из которых условию $x\geqslant 0$ удовлетворяют только x_2 = I и x_3 = 3. Ответ: $A=\{1;3\}$.

2) Построить множества

$$X=\{x\in R \mid x^2\leqslant 4\}.$$

Решение. Элементами множества X являются те числа, которые удовлетворяют неравенству $x^2\leqslant 4$. Решая неравенство, получаем $|x|\leqslant 2$ или, учитывая, что $|x|=\begin{cases} x, & \text{при } x\geqslant 0 \\ -x, & \text{при } x<0, \end{cases}$ $-2\leqslant x\leqslant 2$.

Таким образом, множество X можно изобразить на числовой прямой (рис.I) отрезком $[-2;\ 2]$.

Р и с. I.

3) Дана цепочка функций

$$y=\ln u;\quad u=v^2;\quad v=\operatorname{tg}\frac{x}{2},$$

определяющая некоторую сложную функцию. Записать эту функцию в виде одного равенства.

Решение. $y=\ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^2$.

4) Найти область определения функции

$$y=\sqrt{2+x-x^2}+\arccos\frac{x-2}{2}.$$

Решение. Областью определения данной функции являются все действительные числа, удовлетворяющие следующей системе неравенств

$$\begin{cases} 2+x-x^2\geqslant 0 \\ -1\leqslant \frac{x-2}{2}\leqslant 1 \end{cases}$$

Решая эту систему, получим

$$\begin{cases} -(x+1)(x-2)\geqslant 0 \\ -2\leqslant x-2\leqslant 2 \end{cases};\qquad \begin{cases} -1\leqslant x\leqslant 2 \\ 0\leqslant x\leqslant 4, \end{cases}$$

откуда $0\leqslant x\leqslant 2$. Ответ: $x\in[0;2]$.

Задания

I. Построить множества:

I) $X=\{x\in Z \mid |x-2|\le 3\}$; 2) $X=\{x\in Z \mid -9\le 1-2x<5\}$; 3) $X=\{x\in R \mid |x-a|\ge\delta$, где $\delta>0\}$.

2. Вычислить частное значение функции $f(x)=\frac{x+5}{2x+1}$ при $x=0$, $x=-1$; $x=4$; $x=a$; $x=a^2$; $x=1/a$.

3. Данные функции записать в виде цепочки равенств, каждое звено которой содержит основную элементарную функцию:
I) $y=\sin^3 x$; 2) $y=\cos(x^5)$; 3) $y=\ln tg^2\frac{x}{2}$.

4. Сложную функцию, заданную в виде цепочки равенств, записать одной формулой: I) $y=u^2$; $u=ctg x$;

2) $y=arctg u$; $u=\sqrt{v}$; $v=\lg x$.

5. Найти область определения функции и изобразить полученное числовое множество геометрически:

I) $y=\sqrt{x+1}$; 2) $y=\lg\frac{2+x}{2-x}$; 3) $y=\frac{\sqrt{x}}{x^2-4x+3}$;

4) $y=\frac{\sqrt{9-x^2}}{(x+1)^2}$; 5) $y=\frac{\log_2(x^2-1)}{x^2+x+1}$; 6) $y=arctg\frac{1}{x}$;

7) $y=\arccos\frac{2x-3}{5}$; 8) $y=\ln(2x+3)+\sqrt{16-x^2}$

6. Построить путем сдвигов и деформаций графики следующих функций:

I) $y=\frac{1}{2}x^2$; 2) $y=x^2-1$; 3) $y=(x-1)^2$; 4) $y=3\cos(x+\frac{\pi}{4})$;

5) $y=-2\sin(2x-\frac{\pi}{3})+1$.

2. ПОЛЯРНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ

Вопросы для самоконтроля

I. Что такое полярная система координат?

2. Что такое обобщенная полярная система координат?

3. Что представляет собой график функции $\rho=const$ в полярной системе координат?

4. Что представляет собой график функции $\varphi = const$ в полярной системе координат?

5. Дано уравнение кривой в декартовой системе координат. Как записать уравнение этой же кривой в полярной системе координат?

6. Как записать уравнение линии $x^2+2y^2=0$ в полярной системе координат?

7. Дано уравнение кривой в полярной системе координат $\rho = tg\varphi$. Записать его в декартовой системе координат.

8. Сколькими способами можно задать положение точки на плоскости в полярной системе координат?

Пример.

1. Построить график функции $\rho = 3\cos\varphi$ в полярной системе координат.

Решение. Для построения графика заполним таблицу

Таблица

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
ρ	3	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	—	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	3

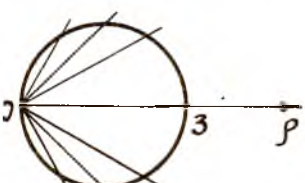


Рис. 2

Так как при $\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{3\pi}{2}$ $\rho = 3\cos\varphi$ принимает отрицательные значения, то промежуток $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ не входит в область определения данной функции. Отметив на чертеже полученные точки и соединив их плавной кривой, получим график функции $\rho = 3\cos\varphi$ (рис. 2).

2. Построить график функции $\rho = 2\cos 2\varphi$ в обобщенной полярной системе координат.

Решение. Заполняем таблицу.

Таблица

φ	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{8}$	π
ρ	2	$\sqrt{2}$	0	$-\sqrt{2}$	-2	$-\sqrt{2}$			
φ	π	$\frac{9\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{13\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{15\pi}{8}$	2π
ρ	2	$\sqrt{2}$	0	$-\sqrt{2}$	-2	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	2

Так как в обобщенной полярной системе координат $\rho \in (-\infty; +\infty)$, то функция $\rho = 2\cos 2\varphi$ определена при любых значениях φ. По данным таблицы строим точки и, соединив их плавной кривой, получаем график заданной функции (рис.3).

Задания

I. Построить точки $M_1(\frac{3}{4}\pi; 2)$; $M_2(\frac{7}{5}\pi; 3,5)$.

2. Построить точки $P_1(-\frac{3}{4}\pi; 2)$; $P_2(\frac{7}{5}\pi; -3,5)$.

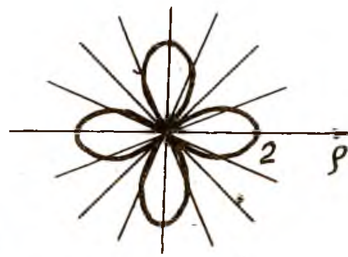
3. Построить графики функций:

а) $\rho = 5$, б) $\rho = 2\varphi$,

в) $\rho = 2\sin\varphi$, г) $\rho = 2\sin(\varphi - \frac{\pi}{4})$,

д) $\rho = 2\sin 2\varphi$, е) $(x^2+y^2)^2 = 4(x^2-y^2)$,

ж) $\rho = 2(1-\cos\varphi)$, з) $\rho = \dfrac{2}{\sin(\varphi - \frac{\pi}{4})}$



Р и с. 3.

3. ПРЕДЕЛЫ

3.I. П о с л е д о в а т е л ь н о с т и

Вопросы для самоконтроля

I. Что такое числовая последовательность?

2. Какая числовая последовательность называется возрастающей?

3. Какая числовая последовательность называется монотонной?

4. Какая числовая последовательность называется ограниченной?

Пример

Развернуть последовательность $\left\{\frac{n}{n+2}\right\}$.

Решение. Подставляя в формулу общего члена $\frac{n}{n+2}$ вместо n последовательно I; 2; 3; 4;..., получим

$$\left\{\frac{n}{n+2}\right\} = \frac{1}{3};\ \frac{2}{4};\ \frac{3}{5};\ \frac{4}{6};\ \ldots;\ \frac{n}{n+2};\ldots$$

Задания

Привести примеры:

1) возрастающей ограниченной последовательности;
2) возрастающей неограниченной последовательности;
3) убывающей ограниченной последовательности;
4) убывающей неограниченной последовательности.

3.2. Предел последовательности

Вопросы для самоконтроля

1. Дать определение предела числовой последовательности.

2. Какая числовая последовательность называется сходящейся?

3. Сколько пределов может иметь числовая последовательность?

4. Что можно сказать о пределе такой числовой последовательности?

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{при } n=2k \\ 1, & \text{при } n=2k-1. \end{cases}$$

5. Какова геометрическая интерпретация понятия предела числовой последовательности?

6. Сформулировать необходимое условие существования предела числовой последовательности.

7. Сколько пределов имеет неограниченная последовательность?

8. Последовательность ограничена. Можно ли утверждать, что она имеет предел?

9. В каком случае можно с уверенностью утверждать, что последовательность имеет предел? (Достаточное условие существования предела последовательности).

10. Можно ли складывать сходящиеся числовые последовательности? Умножать? Делить?

11. Сколько членов бесконечно малой последовательности находятся от 0 на расстоянии большем, чем 0,001? меньшем, чем 0,001?

Примеры

1. Показать, что последовательность с общим членом $x_n = \frac{n}{2n+1}$ имеет предел, равный $\frac{1}{2}$.

Решение. Так как, по определению, число a называется пределом числовой последовательности $\{x_n\}$, если для любого

$\varepsilon > 0$ найдется такой номер N (зависящий от ε), что при всех $n > N$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$, то, чтобы показать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$, надо по произвольному $\varepsilon > 0$ суметь найти такой номер $N = N(\varepsilon)$, чтобы для всех $n > N$ выполнялось бы неравенство

$$\left|\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon. \qquad (\ast)$$

Для отыскания $N = N(\varepsilon)$ преобразуем неравенство ($\ast$)

$$\left|\frac{2n-(2n+1)}{2(2n+1)}\right| < \varepsilon, \qquad \left|\frac{-1}{2(2n+1)}\right| < \varepsilon.$$

Так как n – натуральное число, то $\frac{-1}{2(2n+1)} < 0$, и, следовательно, $\left|\frac{-1}{2(2n+1)}\right| = \frac{1}{2(2n+1)}$.

Таким образом, получим неравенство $\frac{1}{2(2n+1)} < \varepsilon$, откуда

$$2n+1 > \frac{1}{2\varepsilon};$$

$$2n > \frac{1}{2\varepsilon} - 1;$$

$$n > \frac{1}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}.$$

Следовательно, если положить $N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}\right]$, то при всех $n > N$ неравенство ($\ast$) будет выполняться. Таким образом, по произвольно заданному числу $\varepsilon > 0$ мы можем найти такой номер $N = N(\varepsilon)$ (а именно, $N = \left[\frac{1}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}\right]$), что при всех $n > N$ будет выполняться неравенство

$$\left|\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon;$$

следовательно, по определению предела последовательности

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2},$$

что и требовалось доказать.

2. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2-3}$.

Решение. Преобразуем выражение, стоящее под знаком предела так, чтобы можно было применять теоремы о действиях над сходящимися последовательностями. (Почему нельзя было сразу применять эти теоремы?)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2-3}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2}\cdot\frac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{3}{n^2}}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{3}{n^2}}.$$

Учитывая, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$; $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}=0$

и $$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{1-\frac{3}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}1-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}}=\frac{1}{1}=1,$$

получим окончательно

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2+3}=0\cdot1=0.$$

3. Найти $$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}}.$$

Решение. Здесь в числителе и в знаменателе количество слагаемых с изменением n меняется, поэтому прежде, чем вычислять предел, необходимо преобразовать эти выражения.

Легко заметить, что $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}$ – это сумма n членов геометрической прогрессии с первым членом $\frac{1}{2}$ и знаменателем $\frac{1}{2}$. По формуле суммы геометрической прогрессии

$$S_n=\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$$

имеем $$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Аналогично, $$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}=\frac{\frac{1}{3}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right).$$

Тогда $$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}=$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}=2,$$

так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$; $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0.$

О т в е т: 2.

Задания

1. Доказать, что последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ имеет предел, равный 0.

2. Доказать, что последовательность $\left\{\frac{3n}{4n+5}\right\}$ имеет предел, равный $\frac{3}{4}$.

3. Доказать: а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{3n+1}=\frac{1}{3}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^n-1}{e^n}=1$.

4. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+5n+4}{n^2+3}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n^2-4n+3}{2n^3+3n+4}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2n+3}-\sqrt{2n-1})$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^3+3n-7}{4n^2+n+8}$;

6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}$;

7) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-n)$;

8) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{\sqrt{3n^2+1}}$;

9) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+7^{n+2}}{3-7^n}$.

Ответы: 1) 3; 2) 0; 3) 0; 4) $\frac{1}{2}$; 5) ∞; 6) $\frac{1}{2}$; 7) 0; 8) $\sqrt{3}$; 9) -49.

3.3. Предел функции

Вопросы для самоконтроля

1. Когда число b является пределом функции $y=f(x)$ при $x\to a$?

2. Как может выглядеть график функции $y=f(x)$ в окрестности точки $x=2$, если известно, что при $x\neq 2$

$f(x)>5$; $f(2)=1$; $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=5$?

3. Дать определение предела функции $y=f(x)$ при $x\to\infty$.

4. Пусть $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$. Что можно сказать о:

а) $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+10]$; б) $\lim\limits_{x\to a}7f(x)$; в) $\lim\limits_{x\to a}[-f(x)]$?

5. Пусть $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -1$. Чему равен $\lim\limits_{x\to 2} |f(x)|$?

6. Пусть $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -3$. Чему равен $\lim\limits_{x\to -2} f(|x|)$?

7. Дать определение бесконечно большой функции при $x \to a$.

8. Какая функция называется бесконечно малой?

9. Можно ли утверждать, что $g(x) \to 0$ при $x \to \infty$, если $\frac{1}{g(x)}$ бесконечно большая функция при $x \to \infty$?

10. Пусть $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ и $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = \infty$. Чему равен $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$?

Примеры

1) Доказать, что $\lim\limits_{x\to 1}(3x-8) = -5$. Указать множество значений независимой переменной x, при которых значения функции будут отличаться от предела (-5) менее, чем на 0,03. Проиллюстрировать геометрически.

Решение. Область определения функции $y = 3x - 8$ - вся числовая ось: $D = (-\infty;\ \infty)$.
В соответствии с определением конечного предела A функции $f(x)$ при $x \to a$, возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Если мы найдем такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - a| < \delta$, где a = 1, будет справедливо неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, где $f(x) = 3x - 8$ и $A = -5$, то утверждение $\lim\limits_{x\to 1}(3x-8) = -5$ будет доказано.

Итак, считая неравенство $|(3x-8)-(-5)| < \varepsilon$ (1)
верным, преобразуем его. Имеем

$$|3x - 8 + 5| = |3x - 3| = 3|x - 1| < \varepsilon.$$

Отсюда $|x - 1| < \frac{\varepsilon}{3}$ (2)

Если положить $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ и потребовать выполнения неравенства

$$0 < |x - 1| < \delta, \qquad (3)$$

то неравенство (2), а вместе с ним и неравенство (1) будут справедливы. Итак, все условия определения предела выполнены, следовательно число - 5 является пределом данной функции (рис.4).

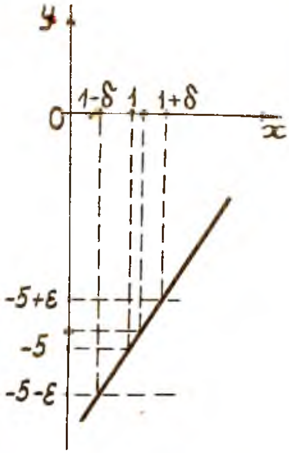
Если в частном случае положить ε = 0,03, то получим $\delta = \frac{0{,}03}{3} = 0{,}01$.

Таким образом, при всех $1 - 0{,}01 < x < 1 + 0{,}01$, т.е. $x \in (0{,}99;\ 1{,}01)$ значения функции $y = 3x - 8$ будут отличаться от предела (-5) меньше, чем на 0,03.

Геометрически неравенству $0 < |x - 1| < \delta$ соответствует окрестность точки a = 1 радиуса $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ на оси Ox, а неравенству

$|(3x-8)-(-5)|<\varepsilon$ окрестность радиуса ε точки $A = -5$ на оси Oy.

По определению предела функции, если точка x принадлежит δ - окрестности точки $a = 1$, то соответствующая точка графика функции $y=3x-8$ будет находиться в полосе между прямыми $y=-5-\varepsilon$ и $y=-5+\varepsilon$.



Р и с. 4.

2) Доказать, что $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}=\infty$. Дать геометрическую иллюстрацию.

Решение. В соответствии с определением бесконечно большой функции (бесконечного предела) при $x\to a$ возьмем произвольное число $M>0$. Если найдем такое число $\delta=\delta(M)>0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0<|x-a|<\delta$, где $a = 1$, будет справедливо неравенство $|f(x)|>M$, где $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$, то утверждение $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}=\infty$ будет доказано.

Итак, считая неравенство

$$\left|\frac{1}{(x-1)^2}\right|>M \qquad (4)$$

верным, преобразуем его. Имеем

$$\frac{1}{(x-1)^2}>M;\quad (x-1)^2<\frac{1}{M};\quad |x-1|<\frac{1}{\sqrt{M}} \qquad (5)$$

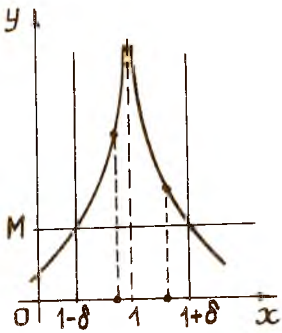
Если положить $\delta=\frac{1}{\sqrt{M}}$ и потребовать выполнения неравенства

$$0<|x-1|<\delta, \qquad (6)$$

то неравенство (5), а следовательно, и неравенство (4) будут справедливы. Таким образом, все условия определения выполнены, и утверждение $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{(x-1)^2}=\infty$ доказано.

Геометрически это означает (рис.5), что для всех $x\in(1-\delta;1+\delta)$ и $x\neq 1$ соответствующие точки графика функции $y=\frac{1}{(x-1)^2}$ будут находиться выше прямой $y=M$, т.е. будут находиться в бесконечной полуполосе, ограниченной прямыми $x=1-\delta$, $x=1+\delta$ и $y=M$, причем $y>M$.

3) Доказать, что при $x\to 0$ функция $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ предела не имеет.



Р и с. 5.

Решение. При $x \to 0$ аргумент синуса $\frac{1}{x} \to \infty$. Положим $\frac{1}{x} = t \to \infty$. Функция $\sin t$ периодическая с периодом $T = 2\pi$, следовательно при неограниченном возрастании аргумента t данная функция периодически пробегает все свои значения $\sin t \in [-1; 1]$. Но это означает, что при возрастании t, т.е. при $x \to 0$ значения функции не могут отличаться от любого постоянного числа все менее и менее. Эти рассуждения дают возможность предположить, что в самом деле при $x \to 0$ функция $\sin\frac{1}{x}$ предела не имеет.

Теперь проведем строгое доказательство. Из определения конечного предела A функции $f(x)$ при $x \to a$ вытекает, что если функция имеет конечный предел при $x \to a$, то этот предел один. Следовательно, если взять последовательность точек x_n, сходящуюся (бесконечно приближающуюся) к точке a, соответствующая последовательность значений функции $f(x_n)$ должна иметь предел, равный A.

Возьмем две последовательности точек x_n, сходящихся к 0, и найдем пределы соответствующих значений функции $\sin\frac{1}{x_n}$. Имеем:

I) $x_1 = \frac{2}{\pi}$; $x_2 = \frac{2}{5\pi}$; $x_3 = \frac{2}{9\pi}$; ...; $x_n = \frac{2}{(4n-3)\pi}$; ... $\to$ 0.

$$\sin\left(\frac{1}{x_1}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1;\ \sin\left(\frac{1}{x_2}\right) = \sin\frac{5\pi}{2} = 1; \ldots;\ \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = \sin\frac{(4n-3)\pi}{2} = 1; \ldots$$

Последовательность I, I, I,...,I,... имеет предел, равный I.

2) $x_1 = \frac{1}{2\pi}$; $x_2 = \frac{1}{4\pi}$; $x_3 = \frac{1}{6\pi}$; ...; $x_n = \frac{1}{2n\pi}$; ... $\to 0$

$$\sin\left(\frac{1}{x_1}\right) = \sin 2\pi = 0;\ \sin\left(\frac{1}{x_2}\right) = \sin 4\pi = 0; \ldots;\ \sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = \sin 2n\pi = 0; \ldots$$

Последовательность 0, 0, 0,..., 0,... имеет предел, равный 0.

Выделенные последовательности значений функции $\sin\frac{1}{x}$ при $x \to 0$ имеют различные пределы, следовательно, данная функция при $x \to 0$ предела не имеет.

4) Найти $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3 - 4}{5x - 2}$

Решение. Применяя теоремы о пределах, имеем

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-4}{5x-2}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^3-4)}{\lim\limits_{x\to 2}(5x-2)}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^3)-\lim\limits_{x\to 2}4}{\lim\limits_{x\to 2}(5x)-\lim\limits_{x\to 2}2}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 2}x\cdot\lim\limits_{x\to 2}x\,\lim\limits_{x\to 2}x-4}{5\lim\limits_{x\to 2}x-2}=\frac{2\cdot 2\cdot 2-4}{5\cdot 2-2}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}.$$

5) Найти $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+5x-24}{x^2-4x+3}$.

Решение. $(x^2+5x-24)\to 0$ и $(x^2-4x+3)\to 0$ при $x\to 3$, следовательно, нельзя применить теорему о пределе частного.

Для вычисления предела преобразуем тождественно данную функцию в окрестности точки $a=3$ ($x\neq 3$)

$$\frac{x^2+5x-24}{x^2-4x+3}=\frac{\cancel{(x-3)}(x+8)}{\cancel{(x-3)}(x-1)}=\frac{x+8}{x-1}.$$

Следовательно

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+5x-24}{x^2-4x+3}=\lim_{x\to 3}\frac{x+8}{x-1}=\frac{11}{2}=5{,}5.$$

6) Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x}}{2\sqrt[4]{x^2+1}+\sqrt{x}}$.

Решение. Так как при $x\to+\infty$ $(\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x})\to\infty$ и $(2\sqrt[4]{x^2+1}+\sqrt{x})\to\infty$, то применять теорему о пределе частного нельзя. Преобразуем дробь, вынося в числителе и знаменателе за скобки высшую степень переменной (здесь $\sqrt{x}$) и производя сокращение

$$\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x}}{2\sqrt[4]{x^2+1}+\sqrt{x}}=\frac{\cancel{\sqrt{x}}\left(\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}\right)}{\cancel{\sqrt{x}}\left(\frac{2\sqrt[4]{x^2+1}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)}=\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt[4]{\frac{1}{x}}}{2\sqrt[4]{1+\frac{1}{x^2}}+1}.$$

Учитывая, что при $x\to\infty$ $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{x^2}$ – бесконечно малые величины и применяя теоремы о пределах, получим

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt[4]{x}}{2\sqrt[4]{x^2+1}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt[4]{\frac{1}{x}}}{2\sqrt[4]{1+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}.$$

7) Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{x}$.

Решение. При $x\to 0$ числитель и знаменатель дроби бесконечно малы. Чтобы вычислить предел, необходимо тождественно преобразовать дробь в окрестности 0, полагая при этом $x\neq 0$. Умножим числитель и знаменатель на выражение $\sqrt{4+x}+2$. Получим

$$\frac{\sqrt{4+x}-2}{x}=\frac{(\sqrt{4+x}-2)(\sqrt{4+x}+2)}{x(\sqrt{4+x}+2)}=\frac{4+x-4}{x(\sqrt{4+x}+2)}=\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{4+x}+2)}=\frac{1}{\sqrt{4+x}+2}.$$

К полученной дроби уже можно применять теоремы о пределах. Окончательно:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{4+x}+2}=\frac{1}{4}.$$

8) Найти $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\sin\frac{1}{x}$

Решение. Так как $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ не существует (см.пример 3), то теорему о пределе произведения двух функций применять нельзя. Однако, $\sin\frac{1}{x}$ является ограниченной функцией $|\sin\frac{1}{x}|\le 1$, а так как $x\to 0$, то, применив теорему о том, что произведение бесконечно малой функции на ограниченную функцию является бесконечно малой функцией, получаем $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\sin\frac{1}{x}=0$.

Задания

Вычислить пределы

1) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{4x^5+9x+7}{3x^6+x^3+1}$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\left[5(x+1)-\frac{x}{x+7}\right]$;

3) $\lim\limits_{x\to +2}\frac{x^2-5x+6}{x^2+5x-14}$;

4) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3-x^2-6x}{x^2+7x+10}$;

5) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2+3x-4}$;

6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^2+3x^3+4x^4}{3x^2+x^4+x^6}$;

7) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{x^2}{1-x}\right)$;

8) $\lim\limits_{x\to +\infty}(x^2-x)$;

9) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{2x^2+5x-3}{5x^2-7x-1}$;

10) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{3x^3-2x^2+1}{2x^2+7}$;

11) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{4x+5}{5x^2-8}$;

12) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$;

13) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}-\sqrt{x}}$;

14) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{1}{x}\sin x\right)$;

15) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$;

16) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$;

17) $\lim\limits_{x\to 7}\frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$;

18) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{2-\sqrt{3x+1}}$;

19) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x}-2}{3-\sqrt{4x+1}}$.

Ответы: 1) 4; 2) $9\frac{7}{8}$; 3) $-\frac{1}{9}$; 4) $\frac{10}{3}$; 5) $\frac{3}{5}$; 6) $\frac{2}{3}$;
7) 2; 8) ∞; 9) $\frac{2}{5}$; 10) ∞; 11) 0; 12) 0;
13) 0; 14) 0; 15) $\frac{1}{2}$; 16) $\frac{2}{3}\sqrt{2}$ 17) $-\frac{1}{56}$; 18) $-\frac{4}{3}$;
19) $-\frac{3}{4}$.

3.4. Замечательные пределы

А. Первый замечательный предел

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1$$

Примеры

1) Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(\sqrt{3}x)}{x}$.

Решение. Применяя первый замечательный предел при $\alpha=\sqrt{3}x$, имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sqrt{3}x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}x)}{\sqrt{3}x}=\sqrt{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sqrt{3}x)}{\sqrt{3}x}=\sqrt{3}\cdot 1=\sqrt{3}.$$

2) Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{\sin 3x}{3x}\cdot 3}{\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2}\right)=\frac{3}{2}\,\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1}=\frac{3}{2}.$$

3) Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x}{x}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot 1=1.$$

4) Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}2x}{x}$.

Решение. Положим $\operatorname{arctg}2x=t$, тогда $2x=\operatorname{tg}t$; $x=\frac{\operatorname{tg}t}{2}$; и при $x\to 0$ $t\to 0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}2x}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\frac{1}{2}\operatorname{tg}t}=2\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\operatorname{tg}t}{t}}=2\cdot\frac{1}{1}=2.$$

Задания

Вычислить

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{2x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 7x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{\sin 8x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 8x}{5x^2}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{3x^2}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{\arcsin x}$;

7) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin x}{x-\pi}$; 8) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$; 9) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{x-a}$;

10) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$; 11) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\cdot\sin\frac{2}{x}\right)$

Ответы: 1) 2; 2) $\frac{2}{7}$; 3) $\frac{7}{8}$; 4) 6,4; 5) 1,5;

6) 2; 7) - 1; 8) $\cos a$; 9) $-\sin a$;

10) 0,5; 11) 2.

Б. Второй замечательный предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e=2,71828\ldots$$

Примеры

1) Вычислить $\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\frac{a}{t}\right)^t$.

Решение. При $t\to\infty$ основание степени стремится к единице $1+\frac{a}{t}\to 1$, а показатель $t\to\infty$. Положим $\frac{a}{t}=x$, тогда $t=\frac{a}{x}$; $x\to 0$ при $t\to\infty$. Применяя второй замечательный предел, имеем

$$\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{a}{t}\right)^t=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{a}{x}}=\lim_{x\to 0}\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^a=e^a.$$

2) Вычислить

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^n.$$

Решение. Положим $-\frac{2}{n}=t$, тогда $n=-\frac{2}{t}$; $t\to 0$ при $n\to\infty$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n}\right)^n=\lim_{t\to 0}(1+t)^{-\frac{2}{t}}=\lim_{t\to 0}\left[(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^{-2}=e^{-2}.$$

3) Вычислить

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-3}\right)^{3x+2}.$$

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x-3}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{3}{x}}=1;\quad \lim_{x\to\infty}(3x+2)=\infty.$$

Имеем неопределенность вида 1^{∞}. Для раскрытия неопределенности применим второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-3}\right)^{3x+2}=\left[\begin{matrix} x-3=t; & x=t+3 \\ t\to\infty & \text{при } x\to\infty\end{matrix}\right]=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{t+4}{t}\right)^{3t+11}=$$

$$=\lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{4}{t}\right)^{3t}\left(1+\frac{4}{t}\right)^{11}\right]=\lim_{t\to\infty}\left[\left(1+\frac{4}{t}\right)^{\frac{t}{4}}\right]^{12}\cdot\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{4}{t}\right)^{11}=e^{12}\cdot 1=e^{12}.$$

Задания

Вычислить

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{4}{n}\right)^{5n+3}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{7}{x}\right)^{x-1}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{6x+2}$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+2}\right)^{x+1}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+4}\right)^{x-3}$;

7) $\lim\limits_{z\to 0}(1+2z)^{\frac{3}{z}}$; 8) $\lim\limits_{t\to 0}\left(1-\frac{2}{3}t\right)^{\frac{5}{t}-6}$; 9) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+3\,\mathrm{ctg}\,x)^{\mathrm{tg}\,x}$.

Ответы: 1) e^{2}; 2) e^{-20}; 3) e^{7};
4) e^{2}; 5) e^{-2}; 6) $e^{-\frac{7}{2}}$;
7) e^{6}; 8) $e^{-\frac{10}{3}}$; 9) e^{3}.

3.5. Сравнение бесконечно малых величин

Вопросы для самоконтроля

1. В каком случае говорят, что одна бесконечно малая величина имеет более высокий порядок малости, чем другая?

2. Какие величины называются эквивалентными бесконечно малыми?

3. Пусть $\alpha(x)\to 0$; $\beta(x)\to 0$ при $x\to 2$; $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\frac{1}{2}$. Что можно сказать о порядке малости $\alpha(x)$ и $\beta(x)$? Будут ли величины $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ эквивалентными?

4. Пусть при $x\to 1$ $\gamma(x)\to 1$; $\delta(x)\to 1$. Будут ли $\gamma(x)$ и $\delta(x)$ эквивалентны?

5. Пусть $\alpha(x)\sim\beta(x)$; $\beta(x)\sim\gamma(x)$ при $x\to x_0$. Чему равен $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\gamma(x)}{\alpha(x)}$?

6. Пусть при $x \to a$ $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Чему равен $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x) - \beta(x)}{\alpha(x)}$?

Примеры

1) Доказать, что при $x \to 1$ бесконечно малые величины $\alpha(x) = 1 - x$ и $\beta(x) = 1 - \sqrt{x}$ будут одного порядка малости.

Решение. По определению, $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ одного порядка малости при $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$, где $A = const$.

При $x \to 1$ имеем $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1-x}{1-\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{1-\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to 1} (1+\sqrt{x}) = 2 \neq 0$.

Следовательно, $\alpha(x) = 1 - x$ и $\beta(x) = 1 - \sqrt{x}$ при $x \to 1$ имеют одинаковый порядок малости, что и требовалось доказать.

2) Сравнить бесконечно малые величины при $x \to 0$ $\alpha(x) = e^{x} - \cos x$ и $\beta(x) = x$, пользуясь основными эквивалентными бесконечно малыми величинами.

Решение. При $x \to 0$ имеем

$$e^{x} - 1 \sim x; \quad \sin x \sim x;$$

$$1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2} \sim 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}x^2;$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{x} - \cos x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(e^{x} - 1) + (1 - \cos x)}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x + \frac{1}{2}x^2}{x} = \lim_{x \to 0} \left(1 + \frac{1}{2}x\right) = 1.$$

Следовательно, данные бесконечно малые величины являются эквивалентными.

3) Вычислить $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x + \ln(1+3x) - x^4}{4x + \sin^3 x + e^{tg\, x^2} - 1}$.

Решение. Воспользуемся теоремами:

1. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых величин эквивалентна сумме части слагаемых, имеющих низший порядок малости.

2. Предел частного двух бесконечно малых величин равен пределу частного двух соответственно эквивалентных бесконечно малых величин.

Имеем $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$; $\ln(1+3x) \sim 3x$; $\sin^3 x \sim x^3$;
$e^{tg\, x^2} - 1 \sim tg\, x^2 \sim x^2$.

$$1-\cos x+\ln(1+3x)-x^4\sim\frac{1}{2}x^2+3x-x^4\sim 5x;$$

$$4x+\sin^3 x+e^{\operatorname{tg}x^2}-1\sim 4x+x^3+x^2\sim 4x.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+\ln(1+3x)-x^4}{4x+\sin^3 x+e^{\operatorname{tg}x^2}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{4x}=\frac{3}{4}.$$

Задания

1. Сравнить бесконечно малые величины при $n\to\infty$:

а) $U_n=\frac{n^2-1}{n^3}$ и $V_n=\frac{n^2+1}{n^3}$; б) $U_n=\frac{n-1}{n^2}$ и $V_n=\frac{2n+1}{n^2}$.

2. Сравнить бесконечно малые величины при $x\to 0$:

а) $\sin x+\operatorname{tg}2x$ и $3x$; б) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}2x+3x^2$ и $\frac{1}{8}x+x^2$;

в) $e^{\sin x}-1$ и $\sqrt{1+2x}-1$; г) $\ln(1+x^2)$ и $\arcsin(\sqrt{1+x^3}-1)$.

3. Вычислить пределы, пользуясь эквивалентными бесконечно малыми величинами:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(5x^2)}{2x\sin 3x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\operatorname{arctg}x}-1}{\sqrt{1+\sin 2x}-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x^2+\ln(1-2x)+3x^3+1-\cos x}{e^{3x^2}-2+\sqrt[5]{1-10x^2}+4x^5}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x-\operatorname{tg}2x}{x^3}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{\sqrt[3]{1+6x^2}}$.

О т в е т ы: 1. а) эквивалентны; б) одного порядка;
2. а) эквивалентны; б) одного порядка;
в) первая имеет более высокий порядок малости по сравнению со второй бесконечно малой величиной; г) первая имеет более низкий порядок малости по сравнению со второй бесконечно малой величиной.
3. а) $\frac{5}{6}$; б) 1; в) 5,5; г) – 4; д) 0.

4. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ. ТОЧКИ РАЗРЫВА

Вопросы для самоконтроля

I. Дать определение непрерывности функции в точке.

2. Можно ли утверждать, что функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = 2$, если $f(x)$ определена при $x = 2$ и

$$\lim_{x\to 2} f(x) = f(3)\ ?$$

3. Что такое приращение функции?

4. $f(x)$ – непрерывная функция. Возможно ли равенство

$$\lim_{\Delta x\to 0} [f(x+\Delta x) - f(x)] = 1\ ?$$

5. Можно ли утверждать, что $f(x)$ – непрерывна при $x = 0$, если $\lim_{x\to 0} [f(x) - f(0)] = 0$?

6. Функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке $x = 1$. Можно ли утверждать, что $\varphi(x) = f(x) + g(x)$ будет непрерывна при $x = 1$?

7. Какая функция называется непрерывной на $[a; b]$?

8. Где непрерывны все элементарные функции?

9. Какая точка называется точкой разрыва?

I0. Какие бывают точки разрыва?

II. Чем отличаются точки разрыва I и II рода?

I2. Будет ли 0 точкой разрыва функции

$$f(x) = \begin{cases} x - a, & \text{при } x \le 0 \\ x^2 - a, & \text{при } x > 0\ ? \end{cases}$$

I3. Что такое устранимый разрыв? В каком случае точка разрыва называется точкой устранимого разрыва?

I4. Пусть $\lim_{x\to 2-0} f(x) = 1$; $\lim_{x\to 2+0} f(x) = 1$; $f(2) = 3$.

Будет ли $x = 2$ точкой устранимого разрыва функции?

I5. Будет ли точка a точкой устранимого разрыва функции, если $\lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x) = \infty$?

I6. Пусть $\lim_{x\to x_0-0} f(x) = 2$. Что можно сказать о $\lim_{x\to x_0+0} f(x)$, если известно, что а) x_0 – точка разрыва I рода; б) x_0 – точка разрыва II рода; в) x_0 – точка устранимого разрыва?

17. Классифицировать точки разрыва, приведенные на рис.6.

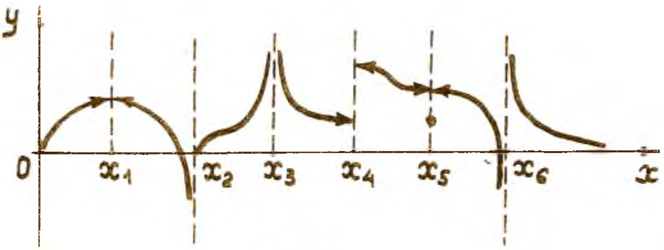


Рис. 6.

Примеры

1) Доказать, что функция $f(x)=3x^2-4$ непрерывна в точке $x_0 = 2$.

Решение. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если она определена в этой точке и некоторой ее окрестности, и

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

У нас область определения функции $f(x)=3x^2-4$: $\mathcal{D}(f)=(-\infty;+\infty)$;

$x_0 = 2 \in \mathcal{D}(f)$; следовательно, функция определена в точке и в окрестности точки $x_0 = 2$;

$f(2)=3\cdot 2^2-4=8$; $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2-4)=8$.

Условие $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$ выполнено, следовательно данная функция непрерывна в точке $x_0 = 2$.

2) Доказать, что функция $f(x)=2x^2+3x-4$ непрерывна в интервале $(-\infty;+\infty)$.

Решение. Функция $f(x)$ называется непрерывной на множестве X, если она непрерывна в любой точке этого множества. Таким образом, для доказательства непрерывности функции на $(-\infty;+\infty)$ надо доказать непрерывность ее в произвольной точке $x \in (-\infty;+\infty)$. Воспользуемся вторым определением непрерывности функции в точке. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке, если она определена в этой точке и некоторой ее окрестности, и бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции, т.е.

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta f = 0,$$

где

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x).$$

Область определения функции $f(x)=2x^2+3x-4$ – вся числовая ось. Возьмем произвольное значение аргумента x, придадим ему приращение Δx и найдем соответствующее приращение функции

$$\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)=[2(x+\Delta x)^2+3(x+\Delta x)-4]-(2x^2+3x-4)=$$

$$=4x\,\Delta x+2(\Delta x)^2+3\Delta x=\Delta x(4x+2\Delta x+3)$$

При $\Delta x\to 0$ $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta f=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[\Delta x(4x+2\Delta x+3)]=0$.

Следовательно функция $f(x)=2x^2+3x-4$ непрерывна в выбранной точке x. Так как x – произвольная точка из $(-\infty;+\infty)$, то рассматриваемая функция непрерывна в любой точке интервала $(-\infty;+\infty)$, а следовательно, непрерывна на всем этом интервале.

3) Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x)=\begin{cases} 0, & \text{при } x<0;\\ x, & \text{при } 0\le x<1;\\ -x^2+4x, & \text{при } x\ge 1. \end{cases}$$

Построить график.

Решение. Для исследования используем теорему о том, что всякая элементарная функция непрерывна в своей области определения.

Как известно, функция называется элементарной, если она составлена из основных элементарных функций и чисел с помощью конечного числа действий: сложения, вычитания, умножения, деления и взятия функции от функции. Следовательно, элементарная функция задается только одной формулой. Данная в задаче функция задается различными формулами на разных участках области определения, следовательно не является элементарной. Однако, если расчленить область определения $D(f)=(-\infty;+\infty)$ на отдельные интервалы $D_1(f)=(-\infty;0)$; $D_2(f)=(0;1)$; $D_3(f)=(1;+\infty)$, то на каждом из этих интервалов функция $f(x)$ окажется элементарной и, следовательно, непрерывной. Таким образом, не исследованными остались только граничные точки полученных интервалов $x_1=0$; $x_2=1$.

Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то должно выполняться условие $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0)$.

Исследуем на непрерывность точки $x_1=0$ и $x_2=1$.

а) $x_1=0$: $f(x_1)=f(0)=0$;

$$\lim_{x\to 0-0}f(x)=0;\qquad \lim_{x\to 0+0}f(x)=0;$$

Таким образом, в точке $x_1=0$ функция $f(x)$ непрерывна.

б) $x_2 = 1$: $f(x_2) = f(1) = -1^2 + 4\cdot 1 = 3$

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} x = 1\ ;\quad \lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0}(-x^2+4x) = 3.$$

Таким образом, точка $x_2 = 1$ является точкой разрыва функции $f(x)$. Поскольку односторонние пределы конечны, но не равны между собой, то эта точка является точкой разрыва I рода.

Число $h = f(1+0) - f(1-0) = 3 - 1 = 2$ называется скачком данной функции в точке разрыва $x_2 = 1$.

График данной функции имеет вид (рис.7).

4) Какого рода разрывы имеют функции $y = \frac{\sin x}{x}$ и $y = \frac{\cos x}{x}$ в точке $x_0 = 0$?

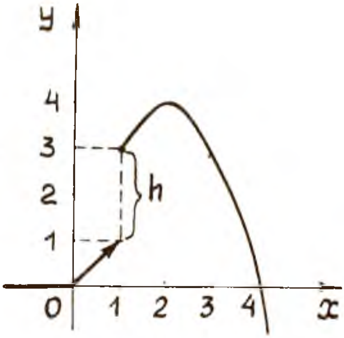


Рис. 7.

Решение. Обе функции элементарные, следовательно, непрерывны в области их определения $D(y) = \{x \in R / x \neq 0\}$.

Точка $x_0 = 0$ является изолированной точкой, в которой данные функции не определены, следовательно это есть точка разрыва функций.

Для функции $y = \frac{\sin x}{x}$

$$\lim_{x\to 0-0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0+0} \frac{\sin x}{x} = 1\ ;$$

следовательно, эта функция имеет в точке $x_0 = 0$ устранимый разрыв.

Для функции $y = \frac{\cos x}{x}$ $\lim\limits_{x\to 0-0} \frac{\cos x}{x} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 0+0} \frac{\cos x}{x} = +\infty$;

следовательно, эта функция имеет в точке $x_0 = 0$ разрыв II рода.

Задания

1. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \frac{x^2+1}{x^3+2}$ в точке $x_0 = 1$.

2. Доказать непрерывность функции $f(x) = x + \ln x$ в области $D = (0; +\infty)$.

3. Исследовать характер точки разрыва функции $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{e^{\frac{1}{x}} + 1}$.

4. Исследовать на непрерывность и точки разрыва функции:

а) $y = \frac{1}{x-2}$; б) $y = \frac{x}{(x-2)^2}$; в) $y = \mathrm{arctg}\,\frac{1}{x}$; г) $y = 2^{\frac{1}{x}}$;

д) $y = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{при } x<0 \\ x, & \text{при } 0 \le x < 2 \\ 3, & \text{при } x \ge 2; \end{cases}$ е) $y = 3^{\frac{x}{4-x^2}}$; ж) $y = \cos\frac{1}{x}$;

з) $y = 1 - \sin\frac{1}{x}$.

5. Убедиться в том, что уравнение $x^5 - 3x - 1 = 0$ имеет по крайней мере один корень, заключенный между I и 2.

6. Функция $y = \frac{x+2}{x-2}$ на концах отрезка $[1; 3]$ принимает значения разных знаков, но на этом отрезке в ноль не обращается. Какие условия теоремы о существовании корня функции на отрезке не выполняются?

О т в е т ы: I. Непрерывна; 3. $x = 0$ точка разрыва I рода; 4. а) $x = 2$ точка разрыва II рода; б) $x = 2$ точка разрыва II рода; в) $x = 0$ точка разрыва I рода; г) $x = 0$ точка разрыва II рода; д) $x = 0$ точка разрыва II рода; $x = 2$ точка разрыва I рода; е) $x = \pm 2$ точки разрыва II рода; ж) $x = 0$ точка разрыва II рода; з) $x = 0$ точка устранимого разрыва.

5. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Вопросы для самоконтроля

I. Что такое комплексное число?

2. Геометрическое изображение множества комплексных чисел.

3. Где расположены чисто мнимые числа?

4. Какие числа называются сопряженными? Как они расположены на комплексной плоскости?

5. В какой форме можно записать комплексное число?

6. Как найти модуль комплексного числа, зная его действительную и мнимую части?

7. Что такое аргумент комплексного числа?

8. Пусть $z_1 = z_2$. Что можно сказать о:

а) $Re\, z_1$ и $Re\, z_2$; б) $|z_1|$ и $|z_2|$; в) $\arg z_1$ и $\arg z_2$?

9. Известно, что $Re\, z_1 = Re\, z_2$; $Im\, z_1 < Im\, z_2$. Можно ли утверждать, что $z_1 < z_2$?

10. Можно ли утверждать, что $z_1 > z_2$, если $|z_1| > |z_2|$; $\arg z_1 = \arg z_2 \neq 0$?

11. Какие действия можно производить над комплексными числами?

12. Пусть $z_1^3 = z_2$. Верно ли, что:

а) $|z_1|^3 = |z_2|$; б) $\arg z_1 \neq \arg z_2$? Как связаны между собой $\arg z_1$ и $\arg z_2$?

13. Что можно сказать о числах x и y, если точка, изображающая число $x + iy$, лежит:

а) на оси Ox; б) на оси Oy; в) на биссектрисе I координатного угла?

14. Где расположены точки комплексной плоскости, удовлетворяющие условию: а) $|z| = const$; б) $\arg z = const$; в) $Re\, z = const$; г) $Im\, z = const$?

Примеры

1) Записать число $i - \sqrt{3}$ в тригонометрической и показательной формах.

Решение. Тригонометрическая форма записи комплексного числа $z = x + iy$ имеет вид $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$,

где $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ – модуль комплексного числа;

$\varphi = \arg z$ – главное значение аргумента комплексного числа, такое, что $tg\,\varphi = \frac{y}{x}$ и $-\pi < \varphi \leq \pi$.

У нас $z = i - \sqrt{3}$, т.е.

$x = Re\, z = -\sqrt{3}$; $y = Im\, z = 1$.

Найдем $|z|$: $|z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$.

Чтобы найти $\arg z$, определим $tg\,\varphi$: $tg\,\varphi = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Так как точка соответствующая числу z, находится во II четверти (рис.8), то

$\arg z = \varphi = \frac{5\pi}{6}$.

Таким образом, тригонометрическая форма числа $i - \sqrt{3}$ имеет вид

$z = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$.

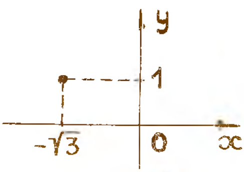


Рис. 8.

Показательная форма записи комплексного числа $z = x + iy$ имеет вид $z = re^{i\varphi}$, поэтому в нашем случае показательная форма числа $z = -\sqrt{3} + i$ записывается $z = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$.

2) Пусть $z_1 = 3 + 4i$; $z_2 = 1 + i$.
Вычислить
$$\frac{z_1}{z_2} + \frac{1}{2}(z_1 - \bar{z}_2).$$

Решение.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3+4i}{1+i} = \frac{(3+4i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{3+4i-3i-4i^2}{1-i^2} = \frac{3+4+i}{1-(-1)} =$$
$$= \frac{7+i}{2} = \frac{7}{2} + \frac{1}{2}i;$$
$$\bar{z}_2 = 1 - i,$$
$$z_1 - \bar{z}_2 = 3 + 4i - (1 - i) = 2 + 5i.$$

Окончательно, $\frac{z_1}{z_2} + \frac{1}{2}(z_1 - \bar{z}_2) = \frac{7}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}(2+5i) = \frac{9}{2} + 3i$.

3) Пусть $z_1 = 6\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$; $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

Вычислить: а) $z_1 \cdot z_2$; б) $z_1 : z_2$; в) $(z_2)^3$.

Решение. При выполнении действий умножения, деления и возведения в степень комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме, используют следующие правила:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \left(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right);$$
$$z_1 : z_2 = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right),$$

а также формулу Муавра: $(z)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$
(для натуральных n).

Таким образом,

$$z_1 \cdot z_2 = 6\cdot 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)\right) = 12\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 12i;$$
$$z_1 : z_2 = \frac{6}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)\right) = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i;$$
$$(z_2)^3 = 2^3\left(\cos\left(3\cdot\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(3\cdot\frac{\pi}{6}\right)\right) = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 8i.$$

4) Найти все значения $\sqrt[3]{1}$.

Решение. Воспользуемся формулой

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),$$
где $k=0,1,\dots,n-1.$

Для этого представим I в тригонометрической форме

$1=\cos 0+i\sin 0.$

Тогда $\sqrt[3]{1}=\cos\frac{0+2\pi k}{3}+i\sin\frac{0+2\pi k}{3}$.

Полагая K = 0, I, 2, находим три значения корня

$z_1=\cos 0+i\sin 0=1;$

$z_2=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2};$

$z_3=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Задания

I. Записать в тригонометрической и показательной формах и построить числа:

а) $z=2+2i$; б) $z=\sqrt{3}-i$; в) $z=-1-i\sqrt{3}$;

г) $z=-3$; д) $z=2i$.

2. Записать и построить числа, сопряженные к данным

а) $2+i$; б) $1-3i$; в) $-4i$; г) 3.

3. Вычислить

а) $(2-i)+(8+2i)-(4+3i)$; б) $(1-i)(3+2i)$;

в) $\frac{2}{1+i\sqrt{3}}$; г) $(1-i\sqrt{3})^3$.

В пунктах в) и г) выполнить также действия в тригонометрической форме.

О т в е т ы:3а) $6-2i$; б) $5-i$; в) $\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$;

г) -8.

4. Найти все значения корней

а) $\sqrt[4]{1+i}$; б) $\sqrt[3]{i}$; в) $\sqrt[5]{32}$.

5. Найти множество точек плоскости, удовлетворяющих условию:

а) $|z|=3$; б) $|z|>3$; в) $|z-2|\leq 1$; г) $|z+i|>2$;

д) $Re\, z\leq 4$; е) $Im\, z>-1$.

Варианты расчетной работы

ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ В ДЕКАРТОВОЙ И ПОЛЯРНОЙ СИСТЕМАХ КООРДИНАТ

Задания к вариантам

1. Найти область определения всех функций.
2. Построить графики функций путем сдвига и деформации.
3. Построить график функции в полярной системе координат.

Вариант 1

1. а) $y=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}-2}+\lg(x^2-2x-3)$;

   б) $y=\arcsin\frac{x^2-1}{x^3-1}$.

2. а) $y=2^{x-1}+3$;

   б) $y=\log_{0,1}(x+1)$;

   в) $y=|2\sin 3x|$.

3. $\rho=2\sqrt{\cos 2\varphi}$.

Вариант 2

1. а) $y=\sqrt{\frac{x-2}{x-1}-2}+\log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x+6)$;

   б) $y=\arccos\frac{(x+2)^3}{x^3+8}$.

2. а) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}-2$;

   б) $y=\log_2(x-2)$;

   в) $y=|2\cos 2x|$.

3. $\rho=2(1+\cos\varphi)$.

Вариант 3

1. а) $y=\log_3(2x^2-5x-3)+\sqrt{\frac{x-1}{x+3}+3}$;

б) $y = \arcsin \frac{x^2-9}{x^3-27}$.

2. а) $y = 3^{x-2}+1$;

б) $y = \log_{\frac{1}{3}}(x+1)$;

в) $y = -3\sin 2x$.

3. $\rho = 3\sin\varphi$.

Вариант 4

I. а) $y = \sqrt[4]{\frac{2x+4}{x+5}-2} + \log_{\frac{1}{4}}(x^2+3x-4)$;

б) $y = \arccos \frac{(x+4)^3}{x^3+64}$;

2. а) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^{x+1} - 2$;

б) $y = \log_4(x-3)$;

в) $y = 2\cos 4x$.

3. $\rho = \frac{4}{\varphi}$.

Вариант 5

I. а) $y = \log_5(5x^2-13x-6) + \sqrt{\frac{2x-5}{x+1}-1}$;

б) $y = \arcsin \frac{x^2-25}{x^3-125}$.

2. а) $y = 5^{x-2} + \frac{1}{2}$;

б) $y = \log_{0,5}(x+4)$;

в) $y = |5\sin 2x|$.

3. $\rho = 5\varphi$

Вариант 6

I. а) $y = \sqrt[6]{\frac{3x+2}{2x-3}+1} + \log_6(2x^2-3x+20)$;

б) $y = \arccos \frac{(x+6)^3}{x^3+216}$.

2\. а) $y = \left(\frac{1}{6}\right)^{x+1} - 2$;

б) $y = \log_6 (x-3)$;

в) $y = -2\cos 6x$.

3\. $\rho = 6\cos\varphi$.

Вариант 7

I. а) $y = \log_{\frac{1}{7}} (6+7x-3x^2) + \sqrt{\frac{x+1}{x+7}+2}$;

б) $y = \arcsin \frac{4x^2-9}{8x^3-27}$.

2\. а) $y = 7^{x-2}+1$;

б) $y = \log_{\frac{1}{7}} (x+5)$;

в) $y = |3\sin 2x|$.

3\. $\rho = \sqrt{\cos 2\varphi}$.

Вариант 8

I. а) $y = \sqrt[4]{\frac{2x-1}{3x+4}-1} + \log_8 (5x+3-2x^2)$;

б) $y = \arccos \frac{1-4x^2}{1-8x^3}$.

2\. а) $y = \left(\frac{1}{8}\right)^{x+1} - 2$;

б) $y = \log_8 (x+2)$;

в) $y = -3\cos 4x$.

3\. $\rho = 8\sin\varphi$.

Вариант 9

I. а) $y = \sqrt{\frac{3x+2}{2x-5}-2} + \log_{0,9}(2x^2+3x-2)$;

б) $y = \arcsin \frac{(x+9)^3}{x^3+729}$.

2. а) $y=9^{x-3}+1$;

б) $y=\log_{\frac{1}{9}}(x-2)$;

в) $y=|2\cos 3x|$.

3. $\rho=2(1-\cos\varphi)$.

Вариант 10

1. а) $y=\lg(x^2-4x+3)+\sqrt[4]{\frac{2x-1}{4x+3}-1}$;

б) $y=\arccos\frac{9x^2-4}{27x^3-8}$.

2. а) $y=2+10^{x-3}$;

б) $y=\log_{0,1}(x+1)$;

в) $y=5\sin 2x$.

3. $\rho=4\sqrt{\cos 2\varphi}$.

Вариант 11

1. а) $y=\sqrt{\frac{2x+1}{x-2}+1}-\log_{0,1}(4-2x-x^2)$;

б) $y=\arcsin\frac{(x+1)^3}{x^3+1}$.

2. а) $y=\left(\frac{1}{10}\right)^{x+2}-5$;

б) $y=\lg(x-3)$;

в) $y=-|\cos 2x|$.

3. $\rho=3+3\cos\varphi$.

Вариант 12

1. а) $y=\log_2(5x-6-x^2)-\sqrt{\frac{2x+1}{x-2}-\frac{1}{2}}$;

б) $y=\arccos\frac{4-9x^2}{27x^3-8}$.

2. а) $y=2^{x-3}+2$;

б) $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+3)$;

в) $y = 2\sin 3x$.

3. $\rho = 2\cos\varphi$.

Вариант 13

1. а) $y = \sqrt{4 - \frac{x+3}{3x-1}} \cdot \log_{\frac{1}{3}}(3 + 5x - 2x^2)$;

б) $y = \arcsin\frac{(x-3)^3}{x^3-27}$.

2. а) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+2} - 1$;

б) $y = \log_3(x-1)$;

в) $y = \frac{1}{3}\cos 3x$.

3. $\rho = \frac{3}{\varphi}$.

Вариант 14

1. а) $y = \log_4(4 - x^2 - 3x) - \sqrt[6]{1 - \frac{4x+1}{x+5}}$;

б) $y = \arccos\frac{x^2-16}{x^3-64}$.

2. а) $y = 1 + 4^{x-2}$;

б) $y = \log_{\frac{1}{4}}(x+1)$;

в) $y = -\sin\frac{x}{4}$.

3. $\rho = 4^{\varphi}$

Вариант 15

1. а) $y = \sqrt{2 - \frac{x+5}{2x-1}} + \log_{\frac{1}{5}}(6 - 5x^2 + 13x)$;

б) $y = \arcsin\frac{(x+5)^3}{x^3+125}$.

2. а) $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{x+1} - 2$;

б) $y = \log_5(x-3)$;

в) $y = \left|\cos\frac{x}{2}\right|$.

3. $\rho = 3(1 - \cos\varphi)$.

Вариант 16

1. а) $y=\log_{\frac{1}{6}}(3x-20-2x^2)-\sqrt[4]{2-\frac{3x+1}{x-2}}$;

б) $y=\arccos\frac{36-x^2}{x^3-216}$.

2. а) $y=6^{x-2}+1$;

б) $y=\log_{\frac{1}{6}}(x+2)$;

в) $y=\frac{1}{2}\sin 3x$.

3. $\rho=6\cos\varphi$.

Вариант 17

1. а) $y=\sqrt[4]{\frac{x+9}{7x-1}-1}+\log_7(2-3x-2x^2)$;

б) $y=\arcsin\frac{(x+0{,}5)^3}{x^3+0{,}125}$.

2. а) $y=\left(\frac{1}{7}\right)^{x+2}-2$;

б) $y=\log_7(x-3)$;

в) $y=\frac{1}{7}\sin 2x$.

3. $\rho=7\sqrt{\cos 2\varphi}$.

Вариант 18

1. а) $y=\log_{0{,}8}(3-5x+2x^2)+\sqrt{2-\frac{x-1}{8x+1}}$;

б) $y=\arcsin\frac{4-9x^2}{8-27x^3}$.

2. а) $y=8^{x-1}+2$;

б) $y=\log_{\frac{1}{8}}(x+2)$;

в) $y=|0{,}8\cos 4x|$.

3. $\rho=4(1+\cos\varphi)$.

Вариант 19

1. а) $y=\log_9\left(\frac{x+0{,}9}{2x-1}+2\right)-\sqrt{2x^2-4x+5}$;

б) $y = \arccos\frac{(3+x)^3}{27+x^3}$.

2. а) $y = 2 + \left(\frac{1}{9}\right)^{x-3}$;

б) $y = \log_3(x+2)$;

в) $y = |\sin 0{,}9x|$.

3. $\rho = 2\sin 3\varphi$.

Вариант 20

I. а) $y = \sqrt[4]{\frac{2-x}{x+5} - 1} \cdot \log_{0,1}(6-5x-x^2)$;

б) $y = \arcsin\frac{(x-2)^3}{8-x^3}$.

2. а) $y = 2^{x+1} - 5$;

б) $y = \log_{\frac{1}{2}}(x-2)$;

в) $y = -3\cos 2x$.

3. $\rho = 2^{\varphi}$.

Вариант 2I

I. а) $y = \log_2\left(1 - \frac{x+2}{x-1}\right) - \sqrt[4]{3x-1-x^2}$;

б) $y = \arcsin\frac{(2x+1)^3}{1+8x^3}$.

2. а) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + 3$;

б) $y = \log_2(x+3)$;

в) $y = 2\cos\frac{x}{3}$.

3. $\rho = \frac{3}{\varphi}$.

Вариант 22

I. а) $y = \sqrt{\log_3\frac{x-3}{x+3}} + \sqrt{x^2+2x+\frac{1}{3}}$;

б) $y = \arccos\frac{(4+x)^2}{64+x^3}$.

2. а) $y=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}\right)^{1-2x}$;

б) $y=\lg(2x-4)$;

в) $y=2\sin 3x$.

3. $\rho=\sin^2\varphi-\cos^2\varphi$.

Вариант 23

I. а) $y=\sqrt{\log_2\frac{x-2}{x+2}}+\sqrt{\frac{1-x}{2-x}}$;

б) $y=\arcsin\frac{(7-x)^3}{49-14x+x^2}$;

2. а) $y=3+\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$;

б) $y=\lg(3+x)$;

в) $y=\cos\left(\frac{3\pi}{2}+2x\right)$.

3. $\rho=\sin\varphi\cdot\cos\varphi$.

Вариант 24

I. а) $y=\sqrt{\log_2\frac{x+2}{x-2}}+\frac{1}{\sqrt{(x-1)(x+2)}}$;

б) $y=\arccos\frac{x^2+1}{x^4-1}$.

2. а) $y=3^{x+1}$;

б) $y=|\log_{0,1}2x|$;

в) $y=\sin(\pi-x)$.

3. $\rho=1+\cos\varphi$.

Вариант 25

I. а) $y=\sqrt{x^2-2x+\frac{1}{2}}+\log_3\left(\frac{2x-1}{x}+3\right)$;

б) $y=\arcsin\frac{x^3-1}{x^2+x+1}$.

2. а) $y=4^x-3$;

б) $y=|\lg(2x+1)|$;

в) $y=\cos\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)$.

3. $\rho=1-\cos\varphi$.

Вариант 26

I. а) $y=\sqrt{x^2-2x+2}+\log_{0,3}\left(\frac{x-1}{3x}+2\right)$;

б) $y=\arcsin\frac{x^4-1}{x^2-1}$.

2. а) $y=2+(0,3)^{\frac{x}{2}}$;

б) $y=\log_3(3x-4)$;

в) $y=|2\sin 2x|$.

3. $\rho=\sqrt{2\cos\varphi}$.

Вариант 27

I. а) $y=\sqrt{x^2-4x+3}-\log_5\left(\frac{3x+2}{4x}-2\right)$;

б) $y=\arccos\frac{x^3+1}{x+1}$.

2. а) $y=3^{x-2}+1$;

б) $y=\log_{0,3}(3x-2)$;

в) $y=|3\cos 4x|$.

3. $\rho=4\sqrt{\cos 3\varphi}$.

Вариант 28

I. а) $y=\log_2\left(\frac{x-1}{x}+1\right)+\sqrt[6]{x^2-5x+6}$;

б) $y=\arcsin\frac{x^4-1}{x^2+1}$.

2. а) $y=1+2^{x-2}$,

б) $y = \log_{\frac{1}{2}}(2x+1)$;

в) $y = |2\sin 4x|$.

3. $\rho = 3\sqrt{\sin 2\varphi}$.

Вариант 29

I. а) $y = \sqrt{4x - x^2 + 1} \cdot \log_{0,2}\left(\frac{2x-1}{x+4} - 2\right)$;

б) $y = \arccos \frac{8x^3 - 27}{9 - 4x^2}$.

2. а) $y = 9^{x+1} - 2$;

б) $y = \log_{0,9}(x-3)$;

в) $y = \left|\sin \frac{x}{4}\right|$.

3. $\rho = 2\cos 3\varphi$.

Вариант 30

I. а) $y = \log_2(x^2 - 2x + 1) + \sqrt{1 - \frac{x-2}{x-3}}$;

б) $y = \arccos \frac{x^2 + x + 1}{x^3 - 1}$.

2. а) $y = 3^{x-2} + 2$;

б) $y = \log_{0,2} 5(x-1)$;

в) $y = |3\cos 2x|$.

3. $\rho = 2\cos 2\varphi$.

Контрольное домашнее задание

ПРЕДЕЛЫ, НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Задания к вариантам

I. Вычислить пределы.

2. Вычислить пределы.

3. Применяя эквивалентные бесконечно малые величины, вычислить предел.

4. Исследовать функцию на непрерывность. (Найти точки разрыва; указать, какого они рода; подсчитать скачок функции в точках разрыва I рода; построить схематично график функции вблизи точки разрыва).

Вариант I

I. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+5x-7}{3x^2-x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+5\sqrt[5]{x}}{\sqrt{3x-2}+\sqrt[3]{2x-3}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{3x^2-4}-\dfrac{x^2}{3x+2}\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

4. $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}(2x^2+3), & \text{если } -\infty<x\le 1,\\ 6-5x, & \text{если } 1<x<3,\\ x-3, & \text{если } 3\le x<\infty.\end{cases}$

Вариант 2

I. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+5x+4x^2}-3}{x}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2+3}}{4x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{9x^2+1}-3x\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$.

4. $f(x)=\begin{cases}-2x^2, & \text{если } x\le 3;\\ 3x, & \text{если } x>3.\end{cases}$

Вариант 3

I. а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-3x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{10-x}-2}{x-2}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-5x+4}{5x^2-2x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2-3}-5x\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{1-x}$.

4. $f(x)=\frac{|2x-3|}{2x-3}$.

Вариант 4

I. а) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{3x+6}{x^3+8}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3\sqrt{2x-3}}{\sqrt[3]{x+6}-2\sqrt[3]{3x-5}}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-1}{3x^2-4x}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 5x}$.

4. $f(x)=\sin\frac{1}{x}$.

Вариант 5

I. а) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-x-2}{x^3+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\log_6\frac{x-3}{\sqrt{x+6}-3}$;

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3-7x}{1-2x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(1-x)}{\sqrt{x}-1}$.

4. $f(x)=\frac{x^3+1}{x+1}$.

Вариант 6

I. а) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2+x-2}{x^2+2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+8}-\sqrt{8x+1}}{\sqrt{5-x}-\sqrt{7x-3}}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}-6x}{3x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\sin x} \ln(1+a\sin x)$.

4. $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$.

Вариант 7

1. а) $\lim\limits_{x\to 5} \frac{2x^2-11x+5}{3x^2-14x-5}$; б) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x-2}{\sqrt[3]{26+x}-3}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x+3}}{2x+7}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x}\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\ln(1+4x)}$.

4. $f(x)=\begin{cases} x+2, & \text{если } x<2; \\ x^2-1, & \text{если } x\geqslant 2. \end{cases}$

Вариант 8

1. а) $\lim\limits_{x\to\pi} \frac{\sin^2 x}{1+\cos^3 x}$; б) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x+1}{\sqrt[4]{x+17}-2}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{5x^2}{1-x^2}+2^{\frac{1}{x}}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\frac{1}{x-2}-\frac{12}{x^3-8}\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{1-\cos\frac{x}{2}}$.

4. $f(x)=\operatorname{arctg}\frac{1}{x-5}$.

Вариант 9

1. а) $\lim\limits_{x\to -9} \frac{81-x^2}{729+x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{1-2x}{\sqrt[3]{1+8x^3}}-2^{-x^2}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{4\sin^2\frac{x}{2}}\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\cos x}{\sqrt[4]{1+x^2}-1}$.

4. $f(x)=\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$.

Вариант 10

1. а) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-6x+9}{x^2-9}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{9+x}-3}{x}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x^4}{1-2x^4}-2^{\frac{1}{x}}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-4x}\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 4x}$.

4. $f(x)=\operatorname{tg}x$.

Вариант II

I. а) $\lim\limits_{x\to1}\frac{3x^2-x-2}{2x^2+5x-7}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$.

2. а) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+7^{n+2}}{3-7^n}$; б) $\lim\limits_{x\to-2}\left(\frac{1}{x+2}+\frac{4}{x^2-4}\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x+\arcsin^2 x-\operatorname{arctg}^2 x}{3x}$.

4. $f(x)=\frac{e^x-1}{x}$.

Вариант I2

I. а) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{2x^2+5x+2}{2x^3+7x^2+6x}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt{2x}-x}{x-2}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^2+5x-1}{3x^2-x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{3\sin x-x^2+x^3}{\operatorname{tg}x+2\sin^2 x+5x^4}$.

4. $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & \text{если } x\neq0;\\ 0, & \text{если } x=0.\end{cases}$

Вариант I3

I. а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{\sin x-\cos x}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-x-x^2}{x^3+3}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-x+1}\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin\sqrt[3]{x}\cdot\ln(1+3x)}{(\operatorname{arctg}\sqrt{x})^2(e^{5\sqrt[3]{x}}-1)}$.

4. $f(x)=\frac{4}{x^2-2x+1}$.

Вариант I4

I. а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{1-9^x}{3^x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+4x}-1}{x}$

2. а) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2+1}}{x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x+2\sin x-\sin^3 x-x^2+3x^4}{\operatorname{tg}^3 x-6\sin^2 x+x-5x^3}$.

4. $f(x)=x+\dfrac{x+2}{|x+2|}$.

Вариант I5

I. а) $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{x^3+4x^2+4x}{x^2-x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}-\operatorname{tg}^2 x\right)$; б) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{10^n-2}{10^{n+1}+5^n}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{\ln(1+5x)}$.

4. $f(x)=\begin{cases} -x, & \text{если } x\le 1; \\ \dfrac{2}{x-1}, & \text{если } x>1. \end{cases}$

Вариант I6

I. а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{x-(1-\operatorname{tg} x)}{\cos 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sqrt{1-\operatorname{tg} x}+\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}{\sin 2x}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1-\sqrt{2x^2-1}}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+6x}-\sqrt{x^2-6x}\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\sin 4x)}{e^{\sin 5x}-1}$.

4. $f(x)=\dfrac{5x^2-3x}{2x}$.

Вариант I7

I. а) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^4-18x^2+81}{2x^2-3x-9}$; б) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{x^3+1}}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin 3x}-1}{\ln(1+\operatorname{tg}2x)}$.

4. $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.

Вариант 18

1. а) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x+\sqrt[3]{x^3+1}}$; б) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{3}{1-x^3}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg}3x}{\arcsin 2x}$.

4. $f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}$.

Вариант 19

1. а) $\lim\limits_{x\to 10} \dfrac{x^3-1000}{x^3-20x^2+100x}$; б) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2-\sqrt{x}}{3+\sqrt{2x+1}}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+2x^2+3x+4}{4x^3+3x^2+2x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3}\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(2-\cos 2x)}{\ln^2(\sin 3x+1)}$.

4. $f(x)=\dfrac{4}{4-x^2}$.

Вариант 20

1. а) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}x}{1-\sqrt{1+\operatorname{tg}x}}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^4-2}{\sqrt{x^8+3x+4}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+3x+4}\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\sin 3x}-1}{\ln(1+\operatorname{tg}2x)}$.

4. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{2}, & \text{если } x\neq 2; \\ 0, & \text{если } x=2. \end{cases}$

Вариант 21

1. а) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{2-\sqrt{x+4}}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4+3x^2+5x-6}{x^3+3x^2+7x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+2x-3x^2+4x^3)}{\ln(1-x+2x^2-7x^3)}$

4. $f(x)=\begin{cases}0{,}5x^2, & \text{если } |x|<2;\\ 2{,}5, & \text{если } |x|=2;\\ 3, & \text{если } |x|>2.\end{cases}$

Вариант 22

1. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-3x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{1-\sqrt{x}}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x+3}{2^x-3}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{6}{x^2-9}\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}$.

4. $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{2}{x-2}$.

Вариант 23

1. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-8x+12}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{1-\sqrt{1+x+x^2}}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+5x^3+7}{2x^5+3x^4+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x^2-4}\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 5x}$.

4. $f(x)=\begin{cases}2, & \text{если } x=0 \text{ и } x=\pm 2;\\ 4-x^2, & \text{если } 0<|x|<2;\\ 4 & \text{если } |x|>2.\end{cases}$

Вариант 24

1. а) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{2x^2-9x+9}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2+5}{3x^3+x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\sin x-\cos 2x}{\sin^2 x}$.

4. $f(x)=2^{\frac{1}{x-2}}$.

Вариант 25

1. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3-3x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{x^2-x}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(x+3)(x+4)(x+5)}{x^4+x-11}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{5x^2+1}-\dfrac{3x^2}{15x+1}\right)$.

3. $\lim \dfrac{x}{\sqrt[4]{1+2x}-1}$.

4. $f(x)=1-2^{\frac{1}{x}}$.

Вариант 26

I. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^3-6x^2}{4x^5+2x^3+x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{4+x+x^2}-2}{x+1}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x-7x^2+5x^4-4}{x+x^2+1+x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{x}\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x(\sqrt{1+x}-1)}$.

4. $f(x)=\dfrac{1}{x^3-3x^2-4x}$.

Вариант 27

I. а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+5x^2+3x-9}{x^3-3x^2-45x-81}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{x^2}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{14+7x^4-2x^3}{x-1+x^3+5x^4-x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2-4}\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cos\frac{x}{2}}{x-\pi}$.

4. $f(x)=\dfrac{x}{\cos x}$.

Вариант 28

I. а) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x^2+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt[3]{x+1}-1}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+x-1}{2x^2-x+1}\right)^3$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2-4}\right)$

3. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{\operatorname{arctg}(x+2)}$.

4. $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

Вариант 29

I. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{7+2x-x^2}}{x^2-2x}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x^2-x}{x^2-3}-\dfrac{3x^3-4}{x^3-x}\right)^4$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{\sin 4x}$.

4. $f(x)=\dfrac{x^2-x^3}{|x-1|}$.

<u>Вариант 30</u>

1. а) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-5x+10}{x^2-25}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+21}-5}{x-2}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)$.

3. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{\arcsin(x+1)}$.

4. $f(x)=\dfrac{4}{x^2-2x+1}$.