ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ПО ВЫСШЕМУ ОБРАЗОВАНИЮ

САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С. П. КОРОЛЕВА

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ПО ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

Методические указания

САМАРА 1995

Составители *Ю. М. Арышенский, В. Р. Каргин*

УДК 326.721

Задачи и упражнения по теории пластичности: Метод. указания / Самар. гос. аэрокосм. ун-т; Сост. *Ю. М. Арышенский, В. Р. Каргин.* Самара, 1995. 44 с.

Приведены основные формулы, примеры, задачи по всем разделам дисциплины "Теория пластичности". Даны методические указания к решению задач.

Предназначены для студентов, обучающихся по специальности 11.06 "Обработка металлов давлением".

Печатаются по решению редакционно-издательского совета Самарского государственного аэрокосмического университета имени академика С. П. Королева

Рецензент В. В. Уваров

1. ДЕКАРТОВЫ ТЕНЗОРЫ И ТЕНЗОРНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Тензорные обозначения широко используют в теории пластичности. Они позволяют упростить запись величин и выражений и сделать их более ясными.

В основном оперируют тензорами второго и четвертого рангов. Тензор второго ранга часто представляют в виде следующей матрицы:

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}.$$

Декартовы координаты прямоугольной системы координат *x, y, z* обозначают через x_1, x_2, x_3 и записывают их как x_i, где индекс *i* принимает значения 1, 2, 3 (рис. 1). Тогда $x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z$.

Вместо индекса i можно взять другую латинскую букву, например *j* = 1, 2, 3. Тогда имеем x_j. Компоненты тензора второго ранга можно теперь обозначить через $\mathcal{T}_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$. Соотношения между тензорными обозначениями и использованными выше обозначениями координат через *x, y, z* очевидны:

$$\mathcal{T}_{ij} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{pmatrix}.$$

При обозначении напряжений не всегда используются индексы.Нормальные напряжения представляют в следующем виде: $\sigma_x = \sigma_{xx} = \sigma_{11}$, $\sigma_y = \sigma_{yy} = \sigma_{22}$, $\sigma_z = \sigma_{zz} = \sigma_{33}$, касательные — $\tau_{xy} = \sigma_{12}$, $\tau_{yz} = \sigma_{23}$, $\tau_{zx} = \sigma_{31}$, тогда окончательно

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}.$$

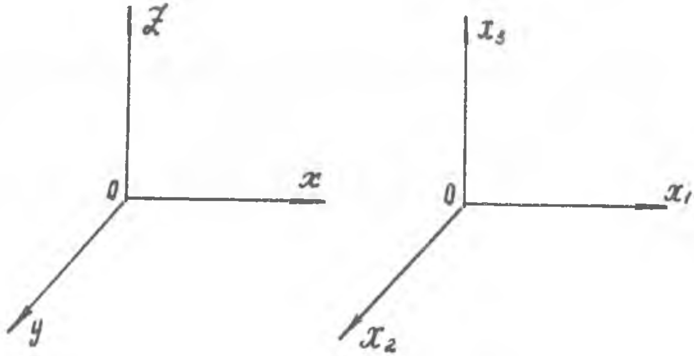

Рис. 1

Широкое распространение получило правило суммирования, введенное А. Энштейном. Согласно этому правилу по всякому дважды повторяющемуся в одночлене латинскому индексу проводится суммирование по значениям 1, 2, 3, а знак суммы опускается, т. е.

$$A = \frac{1}{3}\sigma_{ii} = \frac{1}{3}\left(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}\right).$$

Эта запись является равносильной записи

$$A = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\sigma_{ii}.$$

Повторяющийся индекс называется немым. В каждом одночлене он не должен встречаться более двух раз. Если немой индекс заменить другой буквой, то сумма не меняет своего значения:

$$a_i\, b_i = a_k\, b_k = a_n\, b_n.$$

Неповторяющиеся индексы называются свободными. В одночлене $\sigma_{ij} E_j$ индекс i — свободный, j — немой.

В тензорных обозначениях широко используют символ Кронекера (единичный тензор)

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j; \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

ЗАДАЧИ

1.1. Даны два симметричных тензора второго ранга

$$A = \begin{pmatrix} x+1 & а & б \\ а & 2^x & в \\ б & в & 3x-2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & x & 2x \\ x & 4 & 3x \\ 2x & 3x & 4 \end{pmatrix}.$$

При каком значении x тензоры A и B равны между собой? Чему при этом равны а, б, в?

1.2. Записать в развернутой форме статические уравнения равновесия сил

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0.$$

Решение. Индекс j немой, принимает все возможные значения 1, 2, 3, и по нему проводим суммирование. Если выбрано и зафиксировано определенное направление, то индекс i не меняется. Например, если выбрано направление x, то везде $i = 1$. В декартовой системе координат $i = x$, в то время как j пробегает значения x, y, z. Приняв последовательно $i = 1, 2, 3$, получим уравнения равновесия сил для всех направлений:

$$i = 1 \quad \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0,$$

$$i = 2 \quad \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} = 0,$$

$$i = 3 \quad \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0,$$

или в декартовых координатах:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}=0,$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}=0,$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}=0.$$

1.3. В трехмерном пространстве расшифровать уравнение

$A=B_{ij}n_i n_j$.

Решение. В одночлене два немых индекса i и j. Следовательно, проводится двойное суммирование:

$$A=B_{1j}n_1 n_j+B_{2j}n_2 n_j+B_3\ n_3 n_j=B_{11}n_1^2+B_{12}n_1 n_2+$$

$$B_{13}n_1 n_3+B_{21}n_2 n_1+B_{22}n_2^2+B_{23}n_2 n_3+B_{31}n_3 n_1+$$

$$+B_{32}n_3 n_2+B_3 n_3^2.$$

Вначале провели суммирование по индексу i ($i=1, 2, 3$), затем — по индексу j, ($j=1, 2, 3$).

1.4. Записать в развернутой форме следующие тензорные символы:

$A=\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}$, $I=\sigma_{ik}\sigma_{ik}$, $K_i=A_{ij}B_j$, $K_{ij}=A_{ijl}B_l$.

1.5. Найти значения выражений, содержащих символ Кронекера:

$$\delta_{ii},\ \varepsilon_{ij}\delta_{ij},\ \frac{1}{3}\sigma_{ij}\delta_{ij},\ \delta_{ij}\delta_{jk},\ A_j\delta_{ij},\ \delta_{ii}C_{jj},\ \delta_{ij}\delta_{ik}\delta_{jk}.$$

1.6. Записать в развернутом виде

$$T=\left(0,5S_{ij}S_{ij}\right)^{0,5},\ \Gamma=\left(2e_{ij}e_{ij}\right)^{0,5}.$$

1.7. Известно, что составляющие полного напряжения на наклонной площадке в прямоугольной системе координат x, y, z записываются следующим образом (уравнения Коши):

$$S_x=\sigma_x n_x+\tau_{xy}n_y+\tau_{xz}n_z,$$

$$S_y=\tau_{yx}n_x+\sigma_y n_y+\tau_{yz}n_z,$$

$$S_z=\tau_{zx}n_x+\tau_{zy}n_y+\sigma_z n_z.$$

Записать их в тензорном обозначении.

Решение. Из последнего равенства видно, что индекс " z " относится к S_z и стоит первым в обозначении напряжений. Предположим, что мы обозначили его через " i". Второй индекс входит в выражение напряжений и направляющих косинусов. Обозначим его " j ". Следовательно, в тензорном обозначении указанные уравнения можно представить так:

$S_i = \sigma_{ij} n_j$.

Таким образом, при $i = 1$ $S_1 = \sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3$..

1.8. Нормальное напряжение на наклонной площадке записывается в виде

$\sigma_N = S_x n_x + S_y n_y + S_z n_z$

или

$\sigma_N = \sigma_x n_x^2 + \sigma_y n_y^2 + \sigma_z n_z^2 + 2\tau_{xy} n_x n_y + 2\tau_{yz} n_y n_z + 2\tau_{zx} n_z n_x$.

Дать тензорную запись этих уравнений, приняв $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$.

1.9. Первый и второй инварианты тензора напряжений имеют вид

$I_1(T_\sigma) = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$,

$I_2(T_\sigma) = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2$.

Представить их в тензорном обозначении.

1.10. Приращение работы в единице объема находят из следующего выражения:

$dA = \sigma_x d\varepsilon_x + \sigma_y d\varepsilon_y + \sigma_z d\varepsilon_z + \tau_{xy} d\gamma_{xy} + \tau_{yz} d\gamma_{yz} + \tau_{zx} d\gamma_{zx}$.

Представить формулу в тензорном обозначении.

1.11. Представить следующие формулы в тензорном обозначении:

$(\sigma_x - \sigma) n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z = 0,$

$\tau_{yx} n_x + (\sigma_y - \sigma) n_y + \tau_{yz} n_z = 0,$

$\tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + (\sigma_z - \sigma) n_z = 0.$

1.12. Определить ранг тензорных величин

$a_{ij} b_j$, F_{ikk}, A_{ijip}, $\sigma_{ij} u_k v_k$.

2. НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ В ОКРЕСТНОСТИ ЗАДАННОЙ ТОЧКИ

ЗАДАЧИ

2.1. Цилиндрический образец диаметром 10 мм подвергнут равномерному растяжению силой 10 кН. Определить напряжения, действующие внутри образца.

2.2. Напряженное состояние в точке задано следующими составляющими, кг/мм^2 :

$$\sigma_x = 50,\ \ \sigma_y = -30,\ \ \sigma_z = -100,\ \ \tau_{xy} = 50,\ \ \tau_{yz} = 30,\ \ \tau_{zx} = -40.$$

Записать тензор напряжений в системе СИ.

2.3. На рис. 2 показаны напряжения в декартовой и цилиндрической системах координат. Провести индексацию напряжений и записать их в форме тензора напряжений.

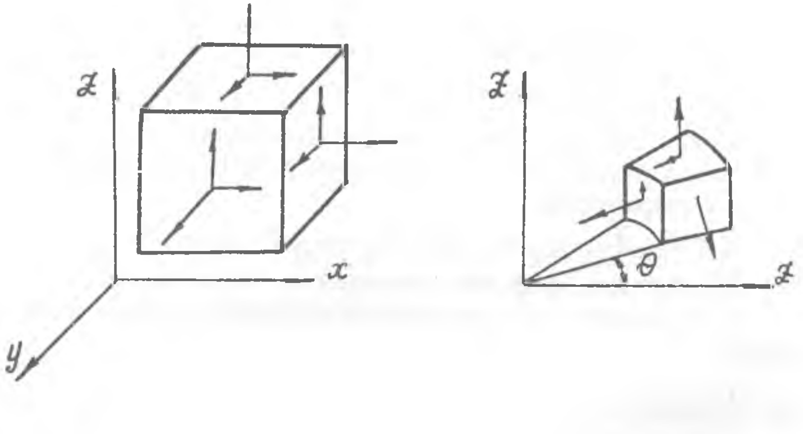

Рис. 2

2.4. На рис. 3 показаны различные случаи напряженного состояния в телах. Провести обозначение компонент напряжений, записать их в форме тензора напряжений, указать возможные нагружения тел внешними силами.

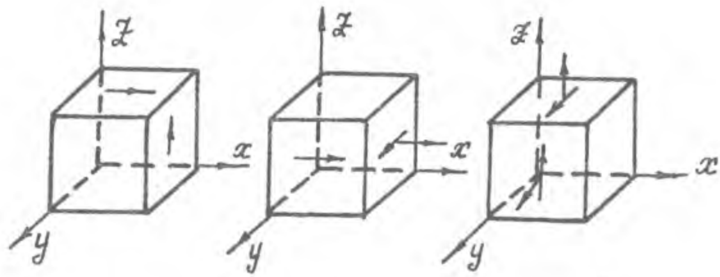

Рис. 3

2.5. Найти ошибки в записи тензора напряжений:

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad T_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 6 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 10 & 20 & 60 \\ -20 & 40 & 20 \\ 60 & 20 & 50 \end{pmatrix}.$$

2.6. Напряженное состояние в некоторой точке тела задано тензором напряжений

$$T = \begin{pmatrix} 90 & -30 & 0 \\ -30 & 30 & 120 \\ 0 & 120 & -180 \end{pmatrix}.$$

Размерность компонент тензора приведена в МПа. Для площадки, нормаль к которой определяется направляющими косинусами $n_x = 2/3$, $n_y = 2/3$, найти полное S, нормальное σ_N и касательное τ напряжения.

Решение. Известно, что $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$, откуда

$$n_z = \sqrt{1 - n_x^2 - n_y^2} = \sqrt{1 - 4/9 - 4/9} = 1/3.$$

Тогда по формулам Коши (см. задачу 1.7)

$$S_x = \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z = 90 \cdot 2/3 - 30 \cdot 2/3 + 0 \cdot 1/3 = 40 \text{ МПа},$$

$$S_y = \tau_{yx} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z = -30 \cdot 2/3 + 30 \cdot 2/3 +$$
$$+ 120 \cdot 1/3 = 40 \text{ МПа},$$

$$S_z = \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + \sigma_z n_z = 0 \cdot 2/3 + 120 \cdot 2/3 - 180 \cdot 1/3 = 20 \text{ МПа}.$$

Полное напряжение

$$S=\sqrt{S_x^2+S_y^2+S_z^2}=\sqrt{40^2+40^2+20^2}=60 \text{ МПа}.$$

Нормальное напряжение

$$\sigma_N=S_x n_x+S_y n_y+S_z n_z=40\cdot 2/3+40\cdot 2/3+20\cdot 1/3=60 \text{ МПа}.$$

Касательное напряжение

$$\tau=\sqrt{S^2-\sigma_N^2}=\sqrt{60^2-60^2}=0.$$

2.7. Напряженнос состояние в некоторой точке тела задано тензором напряжений

$$T_\sigma=\begin{pmatrix} b\sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b\sigma \\ 0 & b\sigma & 0 \end{pmatrix}.$$

Определить значения полного, нормального и касательного напряжения на площадке с направляющими косинусами n_x, n_y, n_z.

2.8. Напряженное состояние в точке тела задано в виде тензора

$$T_\sigma=\begin{pmatrix} \sigma & \sigma & -\frac{3}{2}\sigma \\ \sigma & -\frac{5}{4}\sigma & \frac{3}{4}\sigma \\ -\frac{2}{3}\sigma & \frac{3}{4}\sigma & 0 \end{pmatrix}.$$

Определить значения полного, нормального и касательного напряжения на площадках, если

а) $n_x = 1/3$, $n_y = 1/3$;

б) $n_x = 2/3$, $n_y = 1/3$.

Сделать вывод по задаче.

2.9. Определить значения полного, нормального и касательного напряжения по данным табл. 1.

Таблица 1

Вариант	σ_x, МПа	σ_y, МПа	σ_z, МПа	τ_{xy}, МПа	τ_{yz}, МПа	τ_{zx}, МПа	n_x	n_y
I	50	10	-10	-10	20	0	1/2	1/2
II	-70	20	130	0	-40	20	2/3	2/3
III	60	-30	-10	20	-20	10	1/3	1/3
IV	-10	0	10	70	-40	0	1/6	1/6
V	20	80	50	-40	-100	50	2/5	1/5
VI	80	-10	40/9	0	5	10/3	2/7	3/7
VII	40	-80	-320	80	160	-160	1/4	3/2
VIII	50	50	-80	0	-20	40	4/5	3/5

2.10. В точке тела на его границе (направляющие косинус n_x, n_y, n_z заданы) известны компоненты внешнего нагружения $S_x = a,\ S_y = S_z = 0$. Кроме того, известно, что возле заданной точки внутри тела $\tau_{xy} = \tau_{xz} = \sigma_z = 0$.

Вычислить остальные компоненты напряжений.

2.11. Напряженное состояние в точке тела задано тензором

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} a\sigma & b\sigma & c\sigma \\ b\sigma & 0 & \sigma \\ c\sigma & \sigma & \sigma \end{pmatrix},$$

где a, b, c — константы.

Определить их значения из условий, когда на площадке с направляющими косинусами $n_x = 2/3,\ n_y = 1/3,\ n_z = 2/3$ вектор полного напряжения S равен нулю.

2.12. Напряженное состояние в точке тела задано тензором

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma & k\sigma & k\sigma \\ k\sigma & \sigma & k\sigma \\ k\sigma & k\sigma & \sigma \end{pmatrix}.$$

Определить значение k из условия, при котором на равнонаклонной площадке нормальное напряжение $\sigma_N = 0$.

2.13. В задаче 2.9. изменить условия для определения k, считая, что полное напряжение $S = 2\sigma$, а $\sigma_N = \sigma_N$.

2.14. В задаче 2.9. изменить условия для определения k, считая, что нормальное напряжение $\sigma_N = \sigma$.

2.15. Задано напряженное состояние в точке тела

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 3x^2 & -3xy & 0 \\ -3xy & xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Определить, удовлетворяются ли условия равновесия?

2.16. Определить компоненты массовых сил X, Y, Z, если в любой точке сплошной среды выполняются уравнения равновесия, когда тензор напряжений задан в виде

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} 5x_1x_2 & x_2^2 & 0 \\ x_2^2 & 0 & 2x_3 \\ 0 & 2x_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. ГЛАВНЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ И КАСАТЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ. ОКТАЭДРИЧЕСКИЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Главные нормальные напряжения рассчитываются из определения

$$\left|\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma\right| = 0$$

или в системе координат x, y, z

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0.$$

Три корня полученного уравнения дают значения трех главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, причем $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. Каждому главному напряжению соответствует ось, направляющие косинусы которой $n_{j(k)}$ находятся из решения системы

$$\left(\sigma_{ij} - \sigma_{(k)}\sigma_{ij}\right)n_{j(k)} = 0; \quad n_i n_j = 1.$$

Здесь k является индексом, отражающим главные напряжения, и в суммировании не участвует.

Максимальные касательные напряжения подсчитываются по формулам

$$\tau_{12}=\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2},\quad \tau_{23}=\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2},\quad \tau_{13}=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}.$$

При $\sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \sigma_3$ наибольшим из них будет τ_{13}.

Октаэдрической является площадка, которая равно наклонена к главным направлениям напряжений. Октаэдрическое нормальное напряжение

$$\sigma_N^{\text{окт}}=\frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3}=\sigma_{\text{ср}},$$

а касательное напряжение в главных осях

$$\tau_{\text{окт}}=\frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}$$

или в произвольных осях

$$\tau_{\text{окт}}=\frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_x)^2+6\left(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2\right)}.$$

ЗАДАЧИ

3.1. Записать тензор напряжений через его главные значения для следующих случаев:

а) линейное напряженное состояние;

б) плоское напряженное состояние (рассмотреть возможные случаи);

в) объемное напряженное состояние (рассмотреть возможные случаи).

3.2. Напряженное состояние в точке тела задано одним из следующих тензоров:

$$T_{1\sigma}=\begin{pmatrix}\tau&\tau&\tau\\ \tau&\tau&\tau\\ \tau&\tau&\tau\end{pmatrix},\quad T_{2\sigma}=\begin{pmatrix}0&\tau&\tau\\ \tau&0&\tau\\ \tau&\tau&0\end{pmatrix},\quad T_{3\sigma}=\begin{pmatrix}0&\tau&\tau\\ \tau&\tau&\tau\\ \tau&\tau&\tau\end{pmatrix},$$

$$T_{4\sigma}=\begin{pmatrix}0&\tau&0\\ \tau&0&\tau\\ 0&\tau&0\end{pmatrix},\quad T_{5\sigma}=\begin{pmatrix}0&\tau&0\\ \tau&0&0\\ 0&0&0\end{pmatrix},\quad T_{6\sigma}=\begin{pmatrix}\tau&\tau&\tau\\ \tau&0&\tau\\ \tau&\tau&0\end{pmatrix}.$$

Определить главные напряжения и направления главных осей. Затем в тензорах изменить "+" на "—" и сделать вывод.

Решение:

$$T_{1\sigma}=\begin{pmatrix}\tau & \tau & \tau\\ \tau & \tau & \tau\\ \tau & \tau & \tau\end{pmatrix}.$$

Для определения главных напряжений составим определитель

$$\begin{vmatrix}\tau-\sigma & \tau & \tau\\ \tau & \tau-\sigma & \tau\\ \tau & \tau & \tau-\sigma\end{vmatrix}=0.$$

Раскроем его по первой строке

$$(\tau-\sigma)\left[(\tau-\sigma)^2-\tau^2\right]-\tau\left[\tau(\tau-\sigma)-\tau^2\right]+\tau\left[\tau^2-\tau(\tau-\sigma)\right]=0.$$

Получим кубическое уравнение

$$(\tau-\sigma)\left[(\tau-\sigma)-\tau\right]\left[(\tau-\sigma)+\tau\right]-2\,\tau^2\left[(\tau-\sigma)-\tau\right]=0.$$

Тогда

$$\tau-\sigma-\tau=0,\ \ \sigma_2=0,$$

$$(\tau-\sigma)(2\,\tau-\sigma)-2\,\tau^2=0,$$

отсюда

$$\sigma_1=3\,\tau,\ \ \sigma_3=0.$$

Таким образом, наблюдается случай линейного растяжения. При подстановке $\sigma_1=3\tau$ получаем следующую систему для определения n_x, n_y, n_z, описывающих положение главной оси 1 в пространстве:

$$-2\,n_x+n_y+n_z=0,$$

$$n_x-2\,n_y+n_z=0,$$

$$n_x+n_y-2\,n_z=0,$$

$$n_x^2+n_y^2+n_z^2=1,$$

откуда

$$n_x=n_y=n_z=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Для $\sigma_2=\sigma_3=0$ уравнения сводятся к виду

$$n_x+n_y+n_z=0,$$

$$n_x + n_y + n_z = 0,$$

$$n_x + n_y + n_z = 0,$$

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1.$$

Их недостаточно для однозначного определения второй и третьей главных осей. Следовательно, любая пара взаимно перпендикулярных осей, перпендикулярных направлению n_j от σ_1, может служить главными осями. Это очевидно из понятия линейного растяжения.

3.3. На рис. 4 показаны три взаимно перпендикулярные плоскости, проходящие через рассматриваемую точку, с действующими на них напряжениями. Вычислить главные напряжения.

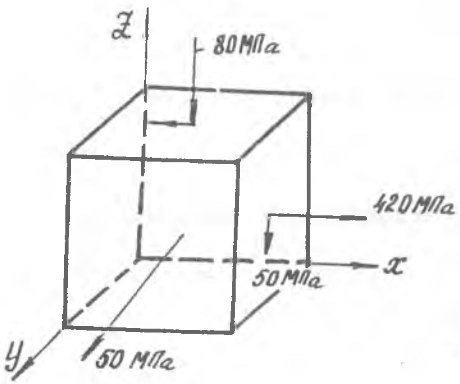

Рис. 4

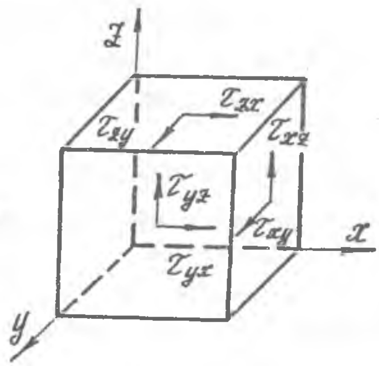

Рис. 5

3.4. Для заданного напряженного состояния (рис. 5), представляющего собой положение трех чистых сдвигов во взаимно перпендикулярных плоскостях, определить главные нормальные напряжения и максимальные касательные напряжения, если

$$\tau_{xy} = \tau_{zx} = 2\tau \quad \text{и} \quad \tau_{yz} = \tau = 40 \text{ МПа}.$$

Решение. Для определения главных нормальных напряжений можно воспользоваться кубическим уравнением

$$\sigma^3 - I_1(T_\sigma)\sigma^2 + I_2(T_\sigma)\sigma - I_3(T_\sigma) = 0,$$

где

$$I_1(T_\sigma) = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z,$$

$$I_2(T_\sigma) = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2,$$

$$I_3(T_\sigma) = \sigma_x \sigma_y \sigma_z - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{yx}^2 + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx}.$$

После подстановки компонент напряжений получаем следующее кубическое уравнение:

$$\sigma^3 - 9\tau^2\sigma - 8\tau^3 = 0,$$

где

$$I_1(T_\sigma) = 0,\ \ I_2(T_\sigma) = -9\tau^2,\ \ I_3(T_\sigma) = 8\tau^3.$$

По условию $\tau = 40$ МПа, тогда

$$\sigma^3 - 14400\sigma - 512000 = 0.$$

Левую часть последнего уравнения можно разложить на множители:

$$(\sigma + 40)(\sigma^2 - 40\sigma - 12800) = 0.$$

Приравнивая к нулю первый сомножитель, находим один из корней уравнения

$$\sigma = -40 \text{ МПа}.$$

Решив квадратное уравнение

$$\sigma^2 - 40\sigma - 12800 = 0,$$

найдем остальные два корня:

$$\sigma = 20 \pm \sqrt{400 + 12800} = (20 \pm 115) \text{ МПа}$$

или $\sigma = 135$, $\sigma = -95$.

С учетом правила индексов для главных напряжений

$$\sigma_1 = 135 \text{ МПа},\ \ \sigma_2 = -40 \text{ МПа},\ \ \sigma_3 = -95 \text{ МПа}.$$

Максимальное касательное напряжение

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{135 - (-95)}{2} = 115 \text{ МПа}.$$

3.5. На рис. 6 приведены различные напряженные состояния в главных осях. Дать обозначения главных нормальных напряжений; указать вид напряженного состояния; показать площадки, на которых действуют максимальные касательные напряжения, обозначить их.

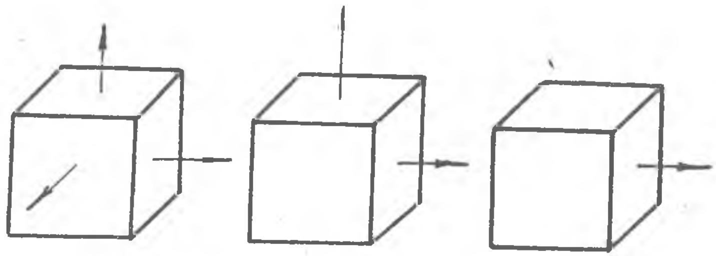

Рис. 6

3.6. Напряженное состояние в точке тела задано одним из следующих тензоров:

$$T_{1\sigma}=\begin{pmatrix}30 & -10 & 0\\ -10 & 30 & 0\\ 0 & 0 & 10\end{pmatrix},\quad T_{2\sigma}=\begin{pmatrix}20 & 0 & 0\\ 0 & 60 & 80\\ 0 & 80 & 60\end{pmatrix},$$

$$T_{3\sigma}=\begin{pmatrix}40 & 0 & 70\\ 0 & 60 & 0\\ 70 & 0 & 60\end{pmatrix},\quad T_{4\sigma}=\begin{pmatrix}60 & -30 & 0\\ -30 & 60 & 0\\ 0 & 0 & 80\end{pmatrix}.$$

Определить главные напряжения и направления главных осей.

3.7. Для плоского напряженного состояния $\left(\sigma_z=\tau_{zx}=\tau_{zy}=0\right)$ вывести формулы для определения главных напряжений. Для этого случая записать также формулы максимальных касательных напряжений.

3.8. Вычислить величины максимальных и октаэдрических касательных напряжений, если напряженное состояние задано одним из следующих тензоров:

$$T_{1\sigma}=\begin{pmatrix}20 & -10 & 10\\ -10 & 40 & 10\\ 10 & 10 & 40\end{pmatrix},\quad T_{2\sigma}=\begin{pmatrix}40 & 10 & 10\\ 10 & 20 & 10\\ 10 & 10 & 20\end{pmatrix},\quad T_{3\sigma}=\begin{pmatrix}10 & 10 & 10\\ 10 & 10 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

3.9. Найти выражения для расчета линейного, квадратного и кубического инвариантов тензора напряжений в главных осях для следующих случаев:

а) линейное напряженное состояние;

б) плоское напряженное состояние;

в) объемное напряженное состояние.

3.10. Вычислить главные значения и инварианты симметричного тензора напряжений

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} 3 & -10 & 0 \\ -10 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.11. Главные нормальные напряжения в данной точке тела приведены в табл. 2.

Таблица 2

Вариант	Напряжения		
I	20	-15	-6
II	-8	40	12
III	7	0	-5
IV	30	-20	12

Присвоить численным значениям обозначения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ и вычислить максимальные касательные напряжения $\tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{31}$.

3.12. Доказать, что $\tau_{12} + \tau_{23} + \tau_{31} = 0$.

4. РАЗЛОЖЕНИЕ ТЕНЗОРА НАПРЯЖЕНИЙ

Тензор напряжений может быть разложен на два тензора — шаровой T_σ^0 и девиатор D_σ, т. е. $T_\sigma = T_\sigma^0 + D_\sigma$. Их компоненты связаны зависимостью

$$\sigma_{ij} = \frac{\sigma_{kk}}{3}\delta_{ij} + S_{ij}.$$

Главные значения девиатора напряжений определяются из кубического уравнения, полученного при раскрытии определителя:

$$\begin{vmatrix} S_{11} - S & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} - S & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} - S \end{vmatrix} = 0$$

или при известных главных значениях тензора напряжений

$S_{(k)} = \sigma_{(k)} - \sigma_{\text{ср}}$.

ЗАДАЧИ

4.1. Показать запись второго инварианта девиатора напряжений через его главные значения.

4.2. Определить величину первого инварианта девиатора напряжений $I_1(D_\sigma)$.

4.3. Разложить тензор напряжений для линейного напряженного состояния:

а) растяжение;

б) сжатие.

Дать схемы главных напряжений для тензора напряжений, шарового тензора и девиатора.

4.4. Записать тензор напряжений, когда тело в процессе деформирования испытывает только упругое изменение объема, а изменения формы не происходит.

4.5. Записать тензор напряжений, когда тело в процессе деформирования испытывает только изменение формы, а упругого изменения объема не происходит.

4.6. Объяснить, почему составляющая девиатора напряжений в направлении главной оси 1 будет положительной, а в направлении главной оси 3 — отрицательной.

4.7. Разложить тензоры напряжений (МПа)

$$T_{1\sigma} = \begin{pmatrix} -30 & -60 & 0 \\ -60 & 30 & 60 \\ 0 & 60 & -30 \end{pmatrix}, \quad T_{2\sigma} = \begin{pmatrix} 50 & 20 & 20 \\ 20 & 50 & 20 \\ 20 & 20 & 50 \end{pmatrix},$$

$$T_{3\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 40 & 40 \\ 40 & 30 & 40 \\ 40 & 40 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_{4\sigma} = \begin{pmatrix} 100 & -60 & 0 \\ -60 & 90 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}$$

на шаровые и девиаторы; определить значения второго инварианта девиатора.

4.8. Два тела из одинакового материала испытывают однородное напряженное состояние. Известен тензор напряжений для однородного тела

$$T_{1\sigma}=\begin{pmatrix}120 & 60 & 30\\ 60 & 100 & 50\\ 30 & 50 & 20\end{pmatrix}.$$

Составить тензор T_2 для второго тела, если известно, что относительное изменение объема обоих тел одинаково, а девиатор для второго тела

$$D_{2\sigma}=\begin{pmatrix}-80 & 0 & 0\\ 0 & 30 & 20\\ 0 & 20 & 50\end{pmatrix}.$$

Определить также главные значения полученного тензора.

4.9. Для точки тела известны девиатор напряжений

$$D_{\sigma}=\begin{pmatrix}140 & 30 & 50\\ 30 & -60 & 20\\ 50 & 20 & -80\end{pmatrix}$$

и одно из нормальных напряжений, например $\sigma_y = 80$ МПа. Определить тензор напряжений.

4.10. Для точки тела известен первый инвариант тензора напряжений $I_1(T_\sigma) = 60$ МПа и девиатор напряжений

$$D_{\sigma}=\begin{pmatrix}-40 & 0 & 30\\ 0 & -40 & 60\\ 30 & 60 & 80\end{pmatrix}.$$

Определить главные значения девиатора напряжений, а через них и главные нормальные напряжения. Записать тензор напряжений.

4.11. Напряженные состояния записываются в виде тензоров:

$$T_{\sigma}=\begin{pmatrix}\sigma_{11} & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix},\quad T_{\sigma}=\begin{pmatrix}\sigma_{11} & 0 & 1\\ 0 & \sigma_{11} & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Разложить их на шаровые тензоры и девиаторы, определить их значение из условия равенства нулю одного из главных значений девиатора напряжений.

4.12. В теории пластичности широко используется показатель

$$\nu_{\sigma}=\frac{\sigma_2-0,5(\sigma_1+\sigma_2)}{0,5(\sigma_1-\sigma_3)},$$

где $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

Рассмотреть его значения для следующих частных случаев:

а) линейное растяжение;

б) линейное сжатие;

в) двустороннее растяжение при $\sigma_1 = \sigma_2$;

г) двустороннее сжатие при $\sigma_2 = \sigma_3$;

д) чистый сдвиг, когда $\sigma_1 = - \sigma_3$.

Достаточно ли этого показателя, чтобы полностью охарактеризовать напряженное состояние?

4.13. Показать различные варианты записи ν_σ через отношения напряжений.

4.14. Главные компоненты тензора напряжений могут быть представлены следующим образом:

$$\sigma_1^0 = \sigma^0 + \frac{3 - \nu_\sigma}{\sqrt{2\left(3 + \nu_\sigma^2\right)}}, \quad \sigma_2^0 = \sigma^0 + \frac{2\nu_\sigma}{\sqrt{2\left(3 + \nu_\sigma^2\right)}},$$

$$\sigma_3^0 = \sigma^0 - \frac{3 + \nu_\sigma}{\sqrt{2\left(3 - \nu_\sigma^2\right)}},$$

где $\sigma^0 = \dfrac{\sigma_{\text{ср}}}{\tau_i}$, $\sigma_1^0 = \dfrac{\sigma_i}{\tau_i}$ и т. д.

Какие значения принимают σ^0, σ_1^0, σ_2^0 и σ_3^0 для случаев, указанных в задаче 4.12.

4.15. В каких случаях напряженное состояние может быть полностью охарактеризовано отношением двух напряжений σ_1 / σ_2?

5. ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ТЕЛА

Связь между компонентами малых деформаций и перемещений определяется уравнениями

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right).$$

Главные значения деформаций находятся из кубического уравнения, полученного при раскрытии определителя

$$\left|\varepsilon_{ij}-\delta_{ij}\,\varepsilon\right|=0,$$

или в системе координат x, y, z

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x-\varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y-\varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z-\varepsilon \end{vmatrix}=0.$$

Направляющие косинусы главных направлений рассчитываются из следующей системы:

$$\begin{cases} \left(\varepsilon_{ij}-\delta_{ij}\,\varepsilon_{(k)}\right)n_{j(k)}=0; \\ n_{j(k)}\,n_{j(k)}=1. \end{cases}$$

Относительное изменение объема при малых деформациях

$$\theta=\varepsilon_{ii}.$$

Условия совместимости малых деформаций определяются системой уравнений

$$\frac{\partial^2\varepsilon_{ij}}{\partial x_k\,\partial x_l}+\frac{\partial^2\varepsilon_{kl}}{\partial x_i\,\partial x_j}-\frac{\partial^2\varepsilon_{ik}}{\partial x_j\,\partial x_l}-\frac{\partial^2\varepsilon_{jk}}{\partial x_i\,\partial x_k}=0.$$

Всего здесь содержится восемьдесят одно уравнение, но только шесть из них различны.

При разложении тензора деформации на шаровой и девиатор их компоненты связаны следующим образом:

$$\varepsilon_{ij}=\frac{\varepsilon_{kk}}{3}\delta_{ij}+\bar{\varepsilon}_{ij}.$$

В технологических расчетах логарифмические деформации подсчитываются по формулам

$$e_1=\ln\left(1+\varepsilon_1\right),\;\; e_2=\ln\left(1+\varepsilon_2\right),\;\; e_3=\ln\left(1+\varepsilon_3\right).$$

ЗАДАЧИ

5.1. Определить линейные и угловые деформации, согласно рис. 7.

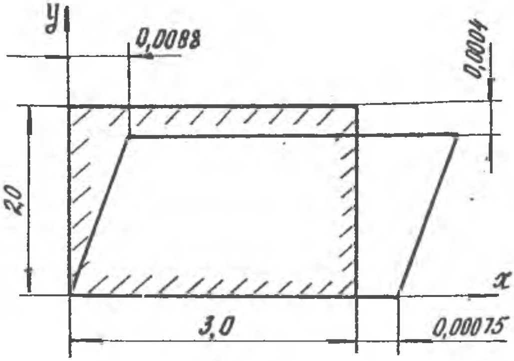

Рис. 7

5.2. Какая запись верно отражает запись тензора деформаций:

$$T_{1\varepsilon}=\begin{pmatrix}0,01 & 0 & 0\\ 0 & 0,02 & 0\\ 0 & 0 & -0,04\end{pmatrix},\ T_{2\varepsilon}=\begin{pmatrix}10 & 0 & 0\\ 0 & 15 & 0\\ 0 & 0 & 20\end{pmatrix},$$

$$T_{3\varepsilon}=\begin{pmatrix}0,003 & 0,0075 & 0\\ 0,009 & 0,002 & 0\\ 0,01 & 0,0003 & 0,005\end{pmatrix},\ T_{4\varepsilon}=\begin{pmatrix}5 & 6 & 0\\ 6 & 3 & -4\\ 0 & -4 & 2\end{pmatrix}\cdot 10^{-4}.$$

5.3. В точке тела имеются следующие компоненты деформаций: $\varepsilon_x = 0{,}001$, $\varepsilon_y = 0{,}0005$, $\varepsilon_z = -0{,}0001$, $\gamma_{xy} = 0{,}0002$, $\gamma_{yz} = -0{,}0001$, $\gamma_{zx} = 0{,}0003$. Вычислить главные деформации и их ориентировку по отношению к осям x, Oy, Oz.

5.4. Деформированное состояние тела описывается следующим тензором:

$$T_{\varepsilon}=\begin{pmatrix}4 & 6 & 0\\ 6 & 5 & -6\\ 0 & -6 & 4\end{pmatrix}\cdot 10^{-4}.$$

Найти три взаимно перпендикулярных направления, которые остаются таковыми и после деформации.

5.5. При малой деформации тела каждая точка испытывает смещения (в 10^{-4} мм), заданные следующими уравнениями:

$u_x = 5x + 3y - 2z$

$$u_y = -3x + 4y + 8z,$$

$$u_z = 6x - 10y + 5z.$$

Записать тензор деформаций и составить уравнение для определения главных деформаций.

5.6. При малой деформации кубика с ребром a каждая его точка испытывает смещения, заданные следующими уравнениями:

$$u_x = a_1 x + b_1 y + c_1 z,$$

$$u_y = a_2 x - b_2 y - c_2 z,$$

$$u_z = a_3 x + b_3 y - c_3 z.$$

Найти относительное изменение объема кубика и его линейные размеры после деформации.

5.7. Известен тензор деформаций

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & -6 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3}.$$

Определить направления, в которых происходит лишь растяжение или сжатие.

5.8. Привести к диагональному виду следующие тензоры деформации:

$$T_{1\varepsilon} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 8 & 6 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3}, \quad T_{2\varepsilon} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 0 \\ 7 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3}.$$

5.9. Для плоского деформированного состояния $(\varepsilon_z = \gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0)$ вывести формулы для определения главных деформаций.

5.10. Деформированное состояние задано в виде следующего тензора:

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0,04 & 0,02 & 0 \\ 0,02 & 0,04 & 0 \\ 0 & 0 & -0,02 \end{pmatrix}.$$

Определить:

а) главные деформации;

б) девиатор деформаций и второй инвариант;

в) конечные размеры деформируемого тела, если начальные размеры составили 15x50x30 мм.

5.11. Плита длиной 1200 мм, шириной 360 мм и толщиной 5 мм растягивается равномерно при растяжении в продольном направлении до тех пор, пока ее длина не увеличится до 1440 мм без изменения ширины. Найти: а) конечные главные деформации; б) конечные размеры плиты.

Решение. Выбрав следующие направления осей:

длина x, ширина y, толщина z, получаем

$$e_x = \ln \frac{x}{x_0} = \ln \frac{1440}{1200} = 0,182,$$

$$e_y = \ln \frac{y}{y_0} = \ln \frac{360}{360} = 0,$$

$$e_z = \ln \frac{z}{z_0} = \ln \frac{t}{t_0} = -0,182,$$

так как

$$e_x + e_y + e_z = 0.$$

Из уравнения

$$e_z = \ln \frac{t}{t_0}$$

получаем

$$t = t_0\, e^{e_z} = 5e^{-0,182} = 4,16 \text{ мм}.$$

Следовательно, размеры плиты после деформации будут следующими: длина 1440 мм, ширина 360 мм и толщина 4,16 мм.

5.12. Конечный диаметр прутка равен 40 мм, а длина 2400 мм. Этот пруток был подвергнут равномерной пластической деформации растяжением от начального диаметра 60 мм. Определить: а) первоначальные размеры прутка; б) конечные деформации.

5.13. В процессе деформации первоначально квадратная сетка линий исказилась так, что расстояние между деформированными квадратами в долевом направлении увеличилось в 4 раза по сравнению с первоначальным расстоянием. Найти:

а) конечные деформации, если процесс деформации является линейным растяжением;

б) конечные деформации, если ширина детали остается постоянной.

5.14. На стальной лист была нанесена сетка со стороной квадрата 50 мм. После деформации она стала прямоугольной с размерами 40х60 мм. Определить величину конечных деформаций. Изменится ли результат задачи, если рассматривать круглую сетку с $d_0 = 50$ мм, которая превратилась бы в эллипс с главными осями $2a = 60$ мм и $2b = 40$ мм?

5.15. Полоса длиной 250 мм была растянута до 300 мм. Считая напряженное состояние линейным, материал изотропным, а объем неизменным, найти деформации по ширине и толщине полосы.

5.16. Пруток из изотропного материала был растянут таким образом, что его длина увеличилась в 1,2 раза. Каким стал конечный диаметр прутка, если начальный диаметр $d_0 = 30$ мм? Каковы величины деформаций?

5.17. Плита длиной 2000 мм, шириной 400 мм и толщиной 10 мм деформировалась до тех пор, пока ее длина не стала равна 2800 мм. Считая деформацию плоской, определить:

а) конечные деформации;

б) конечные размеры плиты;

в) интенсивность деформации.

5.18. Лист толщиной 6 мм, длиной 400 мм и шириной 300 мм растягивается до получения продольной деформации $e_x = 0{,}15$. Считая толщину неизменной, определить конечные размеры листа и интенсивность деформаций.

5.19. Труба с наружным диаметром $d = 80$ мм, толщиной стенки $S = 4$ мм и длиной $l = 800$ мм подвергалась растяжению до $l_1 =$ 1000 мм.

Считая материал изотропным, найти компоненты деформации и ее интенсивность, а также конечные размеры трубы.

5.20. Тензор скоростей деформации в декартовой ортогональной системе координат записан следующим образом:

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти его главные значения и главные оси.

5.21. Заданы перемещения:

а) $u_x = 5xyz,\ u_y = 2xy^2,\ u_z = 3yz^2$;

б) $u_x = 3x^2 z,\ u_y = 3y^2 x,\ u_z = 3z^2 xy$.

Записать тензор деформации и проверить, удовлетворяются ли условия совместимости.

5.22. Деформированное состояние в точке тела задано тензором бесконечно малых деформаций

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 6x_1^2 & x_2^2 & x_1 x_3 \\ x_2^2 & 4x_3 & x_3^2 \\ x_1 x_3 & x_3^2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Определить, удовлетворяются ли уравнения совместности.

5.23. Показатель деформированного состояния

$$\nu_\varepsilon = \frac{\varepsilon_2 - 0{,}5(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)}{0{,}5(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)}.$$

Используя условие постоянства объема при пластических деформациях, записать его через две деформации, а также через их отношения.

5.24. Считая деформацию пластической, рассмотреть значение для следующих случаев:

а) чистый сдвиг;

б) объемная схема деформаций, когда $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$.

5.25. Используя условие постоянства объема, записать второй инвариант девиатора деформаций через две деформации.

5.26. Даны значения ν_ε : 0; +1; —1.

Показать возможные случаи деформированных состояний, соответствующих указанным величинам.

5.27. На рис. 8 приведена схема изменения координатной сетки при волочении круглого сплошного профиля через коническую волоку. Дать анализ изменения линейных и угловых деформаций.

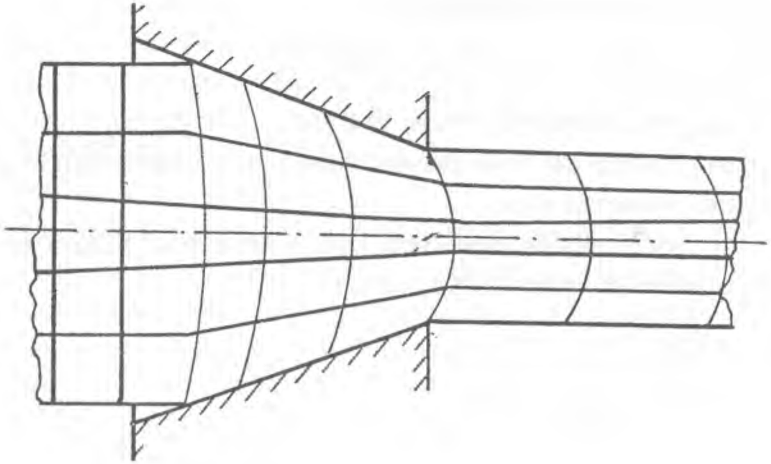

Рис. 8

6. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Основной закон упругости может быть записан в следующей форме:

$$\varepsilon_{ij} = S_{ij\mathrm{lm}}\,\sigma_{\mathrm{lm}},$$

где $S_{ij\mathrm{lm}}$ — упругие константы.

Применяется и следующий вид этого уравнения:

$$\sigma_{ij} = C_{ij\mathrm{lm}}\,\varepsilon_{\mathrm{lm}}.$$

В случае ортотропного тела закон Гука через технические константы выражается таким образом:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E_x}\sigma_x - \frac{\mu_{xy}}{E_y}\sigma_y - \frac{\mu_{xz}}{E_z}\sigma_z, \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G_{xy}}\tau_{xy};$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E_y}\sigma_y - \frac{\mu_{yx}}{E_x}\sigma_x - \frac{\mu_{yz}}{E_z}\sigma_z, \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G_{yz}}\tau_{yz};$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E_z}\sigma_z - \frac{\mu_{zx}}{E_x}\sigma_x - \frac{\mu_{zy}}{E_y}\sigma_y, \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G_{zx}}\tau_{zx}.$$

Часто вместо индексов x, y, z принимают индексы 1, 2, 3. Например, $\mu_{xy} = \mu_{12}$.

Ввиду изотропного материала основной закон упругости выражается формулами

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right], \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G};$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu\left(\sigma_z + \sigma_x\right)\right], \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G};$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right], \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}.$$

Его можно представить также и в виде двух законов:
закона изменения объема

$$\sigma_{ср} = k\theta$$

и закона упругого изменения формы тела

$$D_\sigma = 2G D_\varepsilon.$$

Здесь $k = \dfrac{E}{3(1-2\mu)}$ — объемный модуль упругости.

ЗАДАЧИ

6.1. Определить относительные линейные, угловые и объемные деформации в изотропном теле по данным, приведенным в табл. 3.

Таблица 3

Напряжения, МПа						Модули упругости, МПа	
σ_x	σ_y	σ_z	τ_{xy}	τ_{yz}	τ_{zx}	$E\cdot10^4$	$G\cdot10^4$
40	-40	20	0	12	-16	20	7,7
0	60	80	-24	46	0	6,9	2,4
46	26	-10	16	24	8	11	4
68	42	36	25	13	-18	9	3,5
20	25	0	12	0	0	11,4	4,2
55	32	-14	21	14	6	14,1	5
-50	-20	30	18	-4	12	17,5	6,3

6.2. Из уравнения, выражающего обобщенный закон упругости для изотропного материала, получить выражение закона Гука для следующих случаев:

1) одноосное растяжение;

2) одноосное сжатие;

3) двухосное растяжение;

4) $\varepsilon_z = 0$.

6.3. Для неметаллических ортотропных материалов определены следующие упругие постоянные (табл 4):

Таблица 4

Модули упругости, МПа						Коэффициенты поперечной деформации		
E_x	E_y	E_z	G_{xy}	G_{yz}	G_{zx}	μ_{xy}	μ_{yz}	μ_{zx}
E_1	E_2	E_3	G_{12}	G_{23}	G_{31}	μ_{12}	μ_{23}	μ_{31}
10,3	0,77	0,395	0,524	0,354	0,421	0,031	0,248	0,441
32,7	7,1	4,6	1,21	1,98	2,52	0,07	0,30	0,36
46	16	11,2	5,65	3,30	4,35	0,093	0,36	0,30
26	26	7,8	4,51	3,0	3,0	0,13	0,24	0,24
17,6	13,1	5,3	2,82	2,38	2,34	0,10	0,17	0,229

Для напряженного состояния, заданного тензором

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} 120 & 0 & 40 \\ 0 & 140 & 60 \\ 40 & 60 & 80 \end{pmatrix},$$

определить линейные, угловые и объемную деформации.

6.4. Компоненты материального тензора, входящего в уравнения упругости $\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$, при изотропном теле можно представить следующим образом:

$$C_{ijkl} = \lambda\,\delta_{ij}\,\delta_{kl} + G\left(\delta_{ik}\,\delta_{jl}\,\delta_{il}\,\delta_{jk}\right).$$

Для данного случая записать закон Гука через постоянные λ и G .

6.5. Показать, что $\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$ можно разбить на две группы:

$$\sigma_{ii} = (3\lambda + 2G)\varepsilon_{ii} \text{ и } S_{ij} = 2G\bar{\varepsilon}_{ij}.$$

Здесь S_{ij} и $\bar{\varepsilon}_{ij}$ — компоненты девиаторов напряжений и деформаций.

6.6. Замерены следующие деформации (табл. 5):

Таблица 5

Деформации $\cdot 10^{-3}$					
ε_x	ε_y	ε_z	γ_{xy}	γ_{yz}	γ_{zx}
1	2	3	1,5	0	0
3	2	1	0,5	1	0,3
2	4	6	1	0	2
3	5	8	2	1	0

Используя данные по упругим постоянным, приведенные в задачах 6.1. и 6.2, определить напряженные состояния материала. Используя данные табл. 3, представить закон Гука в виде законов изменения объема и формы тела. Показать также зависимости $\tau_i = G\gamma_i$.

6.8. Стержень длиной l равномерно растянут в пределах упругой деформации на величину Δl. Определить перемещения точек тела u_x, u_y, u_z и возникающие напряжения для следующих случаев:

а) стержень имеет круглое сечение;

б) стержень имеет квадратное сечение.

6.9. Определить, под действием каких сил находится круглый цилиндрический стержень, если его перемещения выражаются функциями

$$u_x = -\frac{\mu\gamma}{E}xz, \quad u_y = -\mu\frac{\gamma}{E}yz,$$

$$u_z = \frac{\gamma}{2E}\left[z^2 - l^2 + \mu\left(x^2 + y^2\right)\right].$$

6.10. Вывести следующие зависимости между упругими постоянными:

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{3G} + \frac{1}{9k};$$

$$\frac{\mu}{E}=\frac{1}{6G}-\frac{1}{9k}.$$

6.11. Образец упруго растянут с относительной деформацией $\varepsilon = 0{,}005$. Модуль нормальной упругости 196 ГПа, коэффициент Пуассона $\mu = 0{,}3$. Определить относительное изменение объема образца θ.

6.12. Куб размерами $h \times l \times b = 1 \times 1 \times 1$ м подвергнут осадке на величину Δh в пределах упругости. Коэффициент Пуассона $\mu = 0{,}3$. Определить объемную деформацию.

6.13. Стальная деталь нагружена и замерены следующие упругие деформации: $\varepsilon_x = 0{,}001$, $\varepsilon_y = 0{,}002$, $\varepsilon_z = 0{,}003$, $\gamma_{xy} = 0{,}0015$, $\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$. Найти напряженное состояние детали, если $E = 2{,}1 \times 10^5$ МПа, $\mu = 0{,}33$.

7. ПЛОСКИЕ И ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Для решения плоских задач теории упругости часто используется функция напряжений Эри $\varphi(x,y)$. Компоненты напряжений представляются частными производными

$$\sigma_x=\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2},\quad \sigma_y=\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2},\quad \tau_{xy}=-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial y}.$$

При этом уравнения равновесия удовлетворяются тождественно, а условие совместности превращается в бигармоническое уравнение

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2\,\partial y^2}+\frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4}=0 \quad \text{или} \quad \nabla^4 \varphi=0.$$

В случае решения задачи в полярных координатах компоненты напряжений и условие совместности можно представить в виде выражений

$$\sigma_\rho=\frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial\theta^2},\quad \sigma_\theta=\frac{\partial^2 \varphi}{\partial\rho^2},\quad \tau_{\rho\theta}=-\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right),$$

$$\nabla^2\left(\nabla^2 \varphi\right)=1$$

или

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta}\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)=0.$$

Если напряжения распределены симметрично относительно оси, то $\varphi=\varphi(\rho)$ имеет вид

$$\varphi=A\ln\rho+B\rho^2\ln\rho+C\rho^2+D,$$

где A, B, C, D — постоянные, определяемые из заданных условий на контуре.

Исходя из этого, можно найти напряжения в толстостенных цилиндрах с радиусами r_1 и r_2 при наличии внутреннего p_1 и внешнего p_2 давлений:

$$\left.\begin{matrix}\sigma_\theta\\ \sigma_\rho\end{matrix}\right\}=\frac{r_1^2\,p_1-r_2^2\,p_2}{r_2^2-r_1^2}\pm\frac{(p_1-p_2)r_1^2\,r_2^2}{(r_2^2-r_1^2)\rho^2}.$$

Для плоского напряженного состояния

$$\varepsilon_x=\frac{1}{E}(\sigma_x-\mu\sigma_y),\quad \varepsilon_y=\frac{1}{E}(\sigma_y-\mu\sigma_x),\quad \varepsilon_z=-\frac{\mu}{E}(\sigma_x+\sigma_y),$$

$$\gamma_{xy}=\frac{\tau_{xy}}{G},\quad \gamma_{xz}=\gamma_{yz}=0,\quad \tau_{xz}=\tau_{yz}=\sigma_z=0.$$

Для плоской деформации

$$\varepsilon_z=\gamma_{zx}=\gamma_{zy}=0,\quad \tau_{zy}=\tau_{zx}=0,$$

$$\varepsilon_x=\frac{1+\mu}{E}\left[(1-\mu)\sigma_x-\mu\sigma_y\right],\quad \varepsilon_y=\frac{1+\mu}{E}\left[(1-\mu)\sigma_y-\mu\sigma_x\right],$$

$$\sigma_z=\mu(\sigma_x+\sigma_y),\quad \gamma_{xy}=\frac{\tau_{xy}}{G}.$$

ЗАДАЧИ

7.1. Даны величины напряжений σ_x = 100 МПа, σ_y = 150 МПа, τ_{xy} = 75 МПа.

Определить деформации, если деталь изготовлена из стали $E=2\cdot10^5$ МПа, μ = 0,3. Определить изменение объема.

7.2. В плите из алюминиевого сплава ($E = 7 \cdot 10^4$ МПа, $\mu = 0{,}32$) при ее деформации толщина остается неизменной, а деформации составят $\varepsilon_x = 5 \cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_y = -2 \cdot 10^{-4}$, $\gamma_{xy} = -1 \cdot 10^{-4}$. Определить возникающие напряжения.

7.3. Найти связь между константами A и B, при которой функция $\varphi = y\left(A x^4 + x^2 y^2 + B y^4\right)$ будет функцией Эри. Определить компоненты напряжений.

7.4. Проверить, могут ли при осесимметричной деформации тела функциями напряжений служить

$$\varphi = C\left(\rho^2 + z^2\right), \quad \varphi = C z^n \ln \rho \quad (n = 0, 1, 2, 3);$$

$$\varphi = C\left(\rho^2 + z^2\right) z, \quad \varphi = C z^n \quad (n = 1, 2, 3),$$

где С — постоянная.

7.5. Доказать что функция напряжения Эри $\varphi = x^4 + y^4 - 6 x^2 y^2 + x y + 3$ удовлетворяет бигармоническому уравнению $\nabla^4 \varphi = 0$. Найти компоненты напряжения, считая деформацию плоской. Записать уравнения для определения деформаций.

7.6. Кольцо единичной толщины окручивается двумя парами сил, приложенных соответственно к внутренней и наружной боковым поверхностям. Убедиться в том, что в каждой точке кольца напряжения равны

$$\sigma_\rho = \sigma_\theta = 0, \quad \tau_{\rho\theta} = \frac{M}{2 \pi \rho^2}.$$

7.7.Стальной цилиндр, внешний диаметр которого 300 мм и толщина стенки 60 мм, подвергнут внутреннему давлению $p_1 = 300$ МПа. Определить величину наибольших растягивающих, сжимающих и касательных напряжений. Построить эпюры $\sigma_\theta, \sigma_\rho$ и τ_{max}.

7.8. В задаче 7.5 поменять условие, т. е. считать, что действует не внутреннее, а внешнее давление. Определить те же величины.

7.9. Принять, что стальной цилиндр (задача 7.5) подвергнут не только внутреннему $p_1 = 300$ МПа, но и внешнему давлению $p_2 = 100$ МПа. Определить те же величины.

7.10. Определить напряжение в стальном контейнере, состоящем из втулки (r_1 = 80 мм, r_2 = 180 мм) и корпуса (r_3 = 270 мм). Натяг по диаметру при посадке втулки 2 δ_1 = 0,3 мм, а внутреннее давление Р = 500 МПа. Построить эпюры напряжений.

7.11. Дана система, состоящая из корпуса и двух втулок с размерами: r_1 = 60 мм, r_2 = 80 мм, r_3 = 120 мм и r_4 = 220 мм. Натяг между первой и второй втулками 2 δ_1 = 0,2 мм, а между втулкой и корпусом 2 δ_2 = 0,3 мм. Внутреннее давление p_1 = 600 МПа. Корпус и втулка стальные. Определить напряжения и построить их эпюры.

8. УДЕЛЬНАЯ ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИЯ УПРУГОЙ ДЕФОРМАЦИИ ТЕЛА

Выражение потенциальной энергии упругой деформации, отнесенной к единице объема, можно представить в билинейной форме, которая одинакова для изотропной или анизотропной среды:

$$W = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\,\varepsilon_{ij}. \tag{8.1}$$

Через технические компоненты в случае изотропного материала уравнение (8.1) можно представить следующим образом:

$$W = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1\right)\right]. \tag{8.2}$$

Потенциальную энергию изменения объема и формы тела для данного случая находят по формулам

$$W_0 = \frac{1+2\mu}{GE}\left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right)^2 = \frac{1+2\mu}{GE}\left[I_1\left(T_\sigma\right)\right]^2, \tag{8.3}$$

$$W = \frac{1+\mu}{GE}\left[\left(\sigma_1 - \sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_2 - \sigma_3\right)^2 + \left(\sigma_3 - \sigma_1\right)^2\right] = \frac{1+\mu}{GE}\left[I_2\left(T_\sigma\right)\right]^2. \tag{8.4}$$

ЗАДАЧИ

8.1. Разложить тензоры напряжения и деформации на шаровые и девиаторы. Представить удельную потенциальную энергию в виде суммы энергий изменения объема и формы тела.

8.2. Представить полную удельную потенциальную энергию, энергию изменения объема и формы изотропного тела в виде функции инвариантов тензора деформаций.

8.3. Записать выражения удельной потенциальной энергии через технические константы для трансверсально-изотропных и ортотропных сред.

8.4. Записать выражения удельной потенциальной энергии для частных случаев напряженно-деформированного состояния:

а) линейное растяжение;

б) чистый сдвиг;

в) плоская деформация;

г) двухосное растяжение с отношением напряжений $\sigma_2 / \sigma_1 =$ 0,5.

Тело принять изотропным.

8.5. В точке стального тела заданы тензоры напряжений

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} 120 & 50 & -50 \\ 50 & -60 & 50 \\ -50 & 50 & -60 \end{pmatrix}, \quad T_\sigma = \begin{pmatrix} 140 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & -130 \end{pmatrix}.$$

Считая размерность компонент напряжений в МПа, вычислить удельную потенциальную энергию.

9. УСЛОВИЕ ПЛАСТИЧНОСТИ И НАСТУПЛЕНИЕ ПЛАСТИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ

Энергетическое условие пластичности ортотропной среды можно представить следующим образом:

$$\sigma_{i1} = \sqrt{\mu_{21}} \sqrt{\left(\sigma_{11} - \sigma_{22}\right)^2 + \left(\frac{1}{\mu_{12}} - 1\right)\left(\sigma_{22} - \sigma_{33}\right)^2 + \left(\frac{1}{\mu_{21}} - 1\right)\left(\sigma_{33} - \sigma_{11}\right)^2 \left[\left(\frac{1}{\mu_{21}} - 1\right) + \left(\frac{1}{\mu_{12}} - 1\right)\right] \frac{1+\mu_1}{1-\mu_1}\left(\sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2\right)}.$$

Здесь μ_{kl} — коэффициенты поперечной деформации, где первый индекс показывает направление поперечной деформации, а второй — действие силы;

μ_i — коэффициент поперечной деформации, когда сила действует под углом 45° к осям 1 и 2 и т. д.;

σ_{i1} — интенсивность напряжений, отнесенная к оси 1.

Наблюдаются следующие зависимости:

$$\frac{1}{\mu_{12}+\mu_{21}-2\mu_{12}\mu_{21}}\cdot\frac{1-\mu_1}{1+\mu_1}=\frac{1}{\mu_{12}}\frac{1-\mu_2}{1+\mu_2}=\frac{1}{\mu_{21}}\frac{1-\mu_3}{1+\mu_3},$$

$$\mu=1-\mu_{21},\quad \mu_{23}=\frac{\mu_{21}\left(1-\mu_{12}\right)}{\mu_{12}+\mu_{21}-2\mu_{12}\mu_{21}},$$

$$\frac{\dfrac{1}{\mu_{12}}+\dfrac{1}{\mu_{21}}-2}{4\left(\dfrac{1}{\mu_{12}}+\dfrac{1}{\mu_{21}}-1\right)}\frac{1+\mu_1}{1-\mu_1}+3\frac{\left(\dfrac{1}{\mu_{12}\mu_{21}}-1\right)}{\left(\dfrac{1}{\mu_{12}}+\dfrac{1}{\mu_{21}}-1\right)\left(\dfrac{1}{\mu_{12}}+\dfrac{1}{\mu_{21}}-2\right)}\frac{1-\mu_1}{1+\mu_1}=1.$$

При плоской деформации $\varepsilon_2=0$, $\sigma_2=(1-\mu_{12})\sigma_3+\mu_{12}\sigma_1$.

Для трансверсального изотропного тела (плоскость изотропии 1—2) условие пластичности можно записать в виде

$$\sigma_{i1}=\sqrt{1-\mu_{12}}\sqrt{\frac{\mu_{12}}{1-\mu_{12}}\left(\sigma_{11}-\sigma_{22}\right)^2+\left(\sigma_{22}-\sigma_{33}\right)^2+\left(\sigma_{33}-\sigma_{11}\right)^2+}$$

$$+\frac{1+\mu_{12}}{1-\mu_{12}}\left(\sigma_{12}^2+\sigma_{23}^2+\sigma_{31}^2\right).$$

Наконец, при изотропном материале

$$\sigma_i=\sigma_{i1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\sigma_1-\sigma_2\right)^2+\left(\sigma_2-\sigma_3\right)^2+\left(\sigma_3-\sigma_1\right)^2}.$$

ЗАДАЧИ

9.1. Записать условие пластичности ортотропной среды для случая плоского напряженного и плоского деформированного состояния, используя выражение σ_{i1}.

9.2. Произвести те же действия, что и в задаче 9.1, для трансверсального изотропного тела.

9.3. Энергетическое условие пластичности изотропного тела, записанное в главных осях, разрешить относительно σ_3. Затем, используя данные табл. 6 и принимая условно у всех сплавов $\mu_{12} = \mu_{21} = 0{,}5$, определить, какие сжимающие или растягивающие напряжения σ_3 необходимо приложить, чтобы материал перешел в пластическое состояние.

9.4. Аналогично 9.3 рассмотреть трансверсально-изотропное тело, считая плоскостью изотропии плоскость 1—2. В данных таблицы значение μ_{21} условно принять равным μ_{12}.

По результатам решения 9.2, 9.3 и 9.4 оценить влияние анизотропии.

Таблица 6

Материал	σ_1, МПа	σ_2, МПа	σ_3, МПа	μ_{12}	μ_{21}
МА-8	150	50	190	0,66	0,58
ВТ 1-2	350	-150	480	0,72	0,65
ОТ4 -1	300	-100	560	0,8	0,72
ОХ18Н9Т	220	-40	250	0,43	0,43
08КП	200	50	240	0,68	0,57
Л62	90	-60	110	0,45	0,47

9.5. В некоторой точке тела материал испытывает напряженное состояние, при котором $\sigma_3 = -\sigma_1$ $(\sigma_2 = 0)$. Исходя из энергетичнского условия пластичности, определить, при каких числовых значениях тело перейдет в пластическое состояние.

Рассмотреть три случая:

а) среда изотропная $\sigma_S = 300$ МПа;

б) сплав трансверсально-изотропный (например, 0Х18Н9Т);

в) сплав ортотропный (например, МА-8).

9.6. Стальной изотропный толстостенный цилиндр находится под действием внутреннего давления p_1. Найти его величину из условия, что в металле впервые появилось пластическое состояние.

Используя выведенную формулу, определить значение P_1, если $r_1 = 50$ мм, $r_2 = 150$ мм, а $\sigma_S = 700$ МПа.

9.7. В случае цилиндрической анизотропии напряжения в толстостенных цилиндрах рассчитываются по формулам

$$\sigma_\theta = \frac{p_1 C^{k+1} - p_2}{1 - C^{2k}} \left(\frac{\rho}{r_2}\right)^{k-1} + \frac{p_1 - p_2 C^{k+1}}{1 - C^{2k}} C^{k+1} \left(\frac{r_2}{\rho}\right)^{k+1},$$

$$\sigma_\rho = \frac{p_1 C^{k+1} - p_2}{1 - C^{2k}} \left(\frac{\rho}{r_2}\right)^{k-1} - \frac{p_1 - p_2 C^{k+1}}{1 - C^{2k}} C^{k+1} \left(\frac{r_2}{\rho}\right)^{k+1},$$

где

$$C = \frac{r_1}{r_2}, \quad k = \sqrt{\frac{E_\theta}{E_\rho}},$$

Принимая для стали $k \approx 1{,}1$ и используя условие пластичности в виде

$$\sigma_\theta - \sigma_\rho = \frac{\sigma_{S1}}{\sqrt{1 - \mu_{12}\mu_{21}}} \qquad (\mu_{12} = 0{,}62; \quad \mu_{21} = 0{,}5),$$

получить величины, заданные в 9.7.

9.8. В 9.6 принять, что действует не только внутреннее, но и наружное давление:

а) $p_2 = 0{,}5\ p_1$; б) $p_2 = p_1$.

Что произойдет с цилиндром, если $p_2 = p_1$?

9.10. Напряженное состояние в точке тела задано в виде тензора

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} 100 & 100 & 0 \\ 100 & 300 & 200 \\ 0 & 200 & 200 \end{pmatrix}.$$

Принимая $\sigma_S = 800$ МПа, выяснить, в упругом или пластическом состоянии находится точка изотропной среды.

9.11. Напряжения в некоторой точке изотропного тела $\sigma_1 = 88$ МПа, $\sigma_2 = 80$ МПа, $\sigma_3 = -157$ МПа. Может ли металл с пределом текучести $\sigma_S = 196$ МПа находиться в упругом состоянии?

9.12. Напряжения в данной точке изотропного тела: $\sigma_1 = 30$ МПа, $\sigma_2 = -20$ МПа, $\sigma_3 = -10$ МПа. Каким пределом текучести должен обладать металл, чтобы при заданных напряжениях находиться в упругом состоянии?

9.13. Под действием напряжений $\sigma_1 = 50$ МПа, $\sigma_2 = -10$ МПа, $\sigma_3 = -20$ МПа изотропный металл согласно условию максимальных касательных напряжений оказался на пределе текучести. Какова величина предела текучести?

9.14. Записать условие пластичности максимальных касательных напряжений для плоского напряженного состояния ($\sigma_z = 0$) и дать его геометрическую интерпретацию.

9.15. Записать энергетическое условие пластичности для случая плоского напряженного состояния ($\sigma_z = 0$) и дать его геометрическую интерпретацию.

10. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

Энергетическое условие пластичности может быть представлено в линейном виде:

а) тело изотропное

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \beta \sigma_i \left(\sigma_S\right),$$

где

$$\beta = \frac{2}{\sqrt{3 + \nu_\sigma^2}};$$

β — коэффициент Лоде лежит в пределах от 1 до $\frac{2}{\sqrt{3}}$;

б) тело ортотропное

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \beta_1 \, \sigma_{i1} \left(\sigma_{S1}\right),$$

где

$$\beta_1 = \frac{\sqrt{\mu_{12} / \mu_{21}}}{\sqrt{\nu_\sigma^2 - 2D\,\nu_\sigma + C}};$$

$$C = 1 - 4\mu_{12} + 4\frac{\mu_{12}}{\mu_{21}}; \quad D = 2\mu_{12} - 1.$$

Интенсивность деформаций (при условии постоянства объема) в случае изотропного тела может быть получена по формуле

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{\left(\varepsilon_1-\varepsilon_2\right)^2+\left(\varepsilon_2-\varepsilon_3\right)^2+\left(\varepsilon_3-\varepsilon_1\right)^2}$$

или

$$e_i = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{\left(e_1-e_2\right)^2+\left(e_2-e_3\right)^2+\left(e_3-e_1\right)^2},$$

где $e_1 = \ln\left(1+\varepsilon_1\right)$ — логарифмическая деформация.

Если тело является ортотропным, то

$$e_{i1} = \sqrt{\frac{\mu_{12}}{1-\mu_{12}\mu_{21}}}\sqrt{\frac{e_1^2}{\mu_{12}}+2e_1e_2+\frac{e_2^2}{\mu_{21}}}.$$

При плоском напряженном состоянии физические уравнения имеют вид:

а) тело изотропное

$$\sigma_1 = \frac{2}{3}\frac{\sigma_i}{e_i}\left(2e_1+e_2\right);$$

$$\sigma_2 = \frac{2}{3}\frac{\sigma_i}{e_i}\left(2e_2+e_1\right);$$

б) тело ортотропное

$$\sigma_1 = \frac{\mu_{12}}{1-\mu_{12}\mu_{21}}\frac{\sigma_{i1}}{e_{i1}}\left(\frac{e_1}{\mu_{12}}+e_2\right);$$

$$\sigma_2 = \frac{\mu_{12}}{1-\mu_{12}\mu_{21}}\frac{\sigma_{i1}}{e_{i1}}\left(e_1+\frac{e_2}{\mu_{21}}\right).$$

ЗАДАЧИ

10.1. Стальной толстостенный цилиндр находится под действием внутреннего давления p_1. Определить предел пластического сопротивления, т. е. то наименьшее давление p_1, при котором весь металл перейдет в пластическое состояние (тело принять изотропным). Для численного решения использовать данные задачи 9.7.

10.2. Определить предел текучести пластического сопротивления стального цилиндра в случае цилиндрической анизотропии. Для численного решения использовать данные, приведенные в задаче 9.8.

10.3. В задаче 10.1 изменить условие, считая, что действует и наружное давление p_2. Рассмотреть два случая: $p_2 = 0{,}5\ p_1$ и $p_2 = -\ p_1$.

10.4. На поверхность листа из сплава ОТ4-1 (см. табл. 6) была нанесена координатная сетка в виде кругов $d = 10$ мм. После деформации листа круги сетки превратились в эллипсы с размерами главных осей $2a = 11$ мм и $2b = 9{,}6$ мм. Кривая истинных напряжений аппроксимируется степенной функцией $\sigma_i = k\, e_i^n$, где k и n — константы материала. В данном случае $n = 0{,}116$, а $k = 940$ МПа. Считая, что главные оси деформации совпадают с осями эллипса, определить значение компонент напряжений и деформации (σ_3 принять равным нулю). Как изменяются полученные результаты, если не учитывать анизотропию материала?

10.5. Известно, что при гидростатическом выпучивании листовых материалов в центре лунки $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$. Провести сравнение интенсивностей деформаций и напряжений изотропного материала, трансверсально-изотропного сплава (например, ОХ18Н9Т) и одного из ортотропных листов. Данные по коэффициенту поперечной деформации взять из табл. 6.

10.6. Определить значение коэффициента Лоде β для материалов, указанных в табл. 6.

Рассмотреть случаи, когда $\nu_\sigma = 0$, $\nu_\sigma = 1$, $\nu_\sigma = -1$.

10.7. Тонкостенная труба ($S = 1$ мм) из алюминиевого сплава с внешним диаметром $d = 50$ мм подвергалась растяжению и внутреннему давлению так, что все время сохранялось следующее равенство между напряжениями: $\sigma_\theta = 2\sigma_z$. Деформация проводилась вплоть до конечного осевого напряжения $\sigma_z = 200$ МПа. Принимая материал трансверсально-изотропным ($\mu_{12} = 0{,}36$) и коэффициенты степенной аппроксимации $n = 0{,}25$, $k = 500$ МПа, определить конечные размеры трубы.

10.8. Найти связь между напряжениями и деформациями в пластической области, когда $\varepsilon_z = 0$. Рассмотреть три случая:

а) материал принят изотропным;

б) тело является трансверсально-изотропным;

в) среда — ортотропная.

Упрочнение материала аппроксимировано степенной функцией $\sigma_i = k\varepsilon_i^n$.

10.9. Длинная толстостенная труба находится под давлением. Определить напряженно-деформированное состояние и размеры трубы после деформации, если известно:

а) внутреннее давление p_1 ($p_2 = 0$);

б) внешнее давление p_2 ($p_1 = 0$).

Материал трубы (несжимаемый) последовательно принять изотропным, трансверсально-изотропным и ортотропным. Упрочнение принять по степенному закону.

10.10. Определить напряженно-деформированное состояние в длинной толстостенной трубе, а также внутреннее давление p_1, если известно изменение радиуса Δr.

Рассмотреть два случая:

а) $p_2 = 0$; б) $p_2 \neq 0$.

Материал трубы принять согласно 10.9. Задачу решить при условии степенного закона упрочнения.

10.11. Определить напряженно-деформированное состояние в длинной толстостенной трубе, а также внешнее давление p_2, если известно, что $\Delta r_2 = r_2 - r_{20}$.

Рассмотреть два случая:

а) $p_1 = 0$; б) $p_1 \neq 0$.

Материал трубы принять по условию задачи 10.9.

Таким образом, рассмотренные примеры охватывают основные разделы курса "Теория пластичности". Они позволяют получить практические навыки расчетов упругого и пластического формоизменения не только изотропных, но и анизотропных материалов, которые в настоящее время находят все более широкое применение в производстве летательных аппаратов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Безухов И. И.* Примеры и задачи по теории упругости, пластичности и ползучести. М.: Высш. шк., 1965. 320 с.

2. *Томсен Э., Янг Ч., Кобаяши Ш.* Механика пластических деформаций при обработке металлов. М.: Машиностроение, 1969. 504 с.

3. *Смирнов В. С.* Сборник задач по обработке металлов давлением. М.: Металлургия, 1973. 191 с.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ПО ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ
Составители: *Арышенский Юрий Михайлович*
Каргин Владимир Родионович

Редактор Г. А. Усачева
Техн. редактор Н. М. Каленюк
Корректор Т. И. Щелокова
Компьютерная верстка О. А. Карасева

Подписано в печать 26.04.95. Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 2,56. Усл. кр.-отт. 2,68.
Уч.-изд. л. 3,0. Тираж 200 экз. Заказ 221. Арт. С-47/95.

Самарский государственный аэрокосмический университет
им. академика С. П. Королева.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

Издательство Самарского аэрокосмического университета.
443001, г. Самара, ул. Ульяновская, 18.