ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра уравнений математической физики

# ЗАДАЧИ НА ЭКСТРЕМУМ ДЛЯ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

*Методические рекомендации для студентов II курса физико-математических и технических специальностей*

Составитель Е.В. Соколовская

Самара
Издательство «Самарский университет»
2009

*Печатается по разрешению редакционно-издательского совета Самарского государственного университета*

**Задачи на экстремум для функций нескольких вещественных переменных** : метод. реком. / сост. Е. В. Соколовская. – Самара : Изд-во «Самарский университет», 2009. – 28 с.

Задачи на экстремум для функций нескольких переменных занимают важное место в традиционном курсе математического анализа. Методике решения таких задач и посвящены методические рекомендации. При этом автор не приводит доказательств известных теорем, на которых основана эта методика; их можно найти в общеизвестных учебниках по математическому анализу. Главное внимание в работе уделяется правильному применению этих теорем и тем нюансам, которые при этом применении могут возникнуть. Рассматриваются задача на локальный экстремум (§1), задача на локальный условный экстремум (§2) и задача на наибольшее и наименьшее значения (§3).

Методические рекомендации предназначены для студентов II курса физико-математических и технических специальностей, изучающих курс математического анализа.

Составитель канд. физ.-мат. наук Е. В. Соколовская
Рецензент д-р физ.-мат. наук, проф. С. Я. Новиков

## §1. Задачи на локальный экстремум

Пусть $G$ — некоторое множество в $n$-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$ и $f \mid G \to \mathbb{R}$ — заданная на $G$ функция.

Задача на локальный экстремум для этой функции — это задача о нахождении точек локального максимума и точек локального минимума этой функции, определения их характера (точка строгого или нестрогого локального максимума и локального минимума), а также нахождения значения функции в них.

**Определение.** Точка $a \in intG$ называется точкой локального минимума (максимума) функции $f \mid G \to \mathbb{R}$, если найдется $\delta$-окрестность $\Omega(a, \delta) \subset G$ точки $a$ такая, что для любой точки $x \in \Omega(a, \delta)$ выполняется

$$f(x) \geq f(a) \quad (f(x) \leq f(a)). \tag{1.1}$$

В этом случае значение $f(a)$ называется значением локального минимума (максимума).

Если в условии (1.1) нестрогие неравенства заменить на строгие, то получится определение точки строгого локального минимума (максимума).

Точки локального минимума и точки локального максимума вместе называют точками локального экстремума функции $f$.

Сразу из определения следует, что точка $a \in intG$ не является точкой локального экстремума функции $f \mid G \to \mathbb{R}$, если в любой окрестности $\Omega(a, \delta)$ точки $a$ найдутся точки $x^1, x^2 \in \Omega(a, \delta)$ такие, что $f(x^1) > f(a)$ и $f(x^2) < f(a)$.

Следующая известная из курса математического анализа теорема отвечает на вопрос: среди каких точек следует искать точки локального экстремума функции $f$?

**Теорема 1.1 (необходимое условие точки локального экстремума).** Пусть точка $a \in intG$ — точка локального экстремума функции $f \mid G \to \mathbb{R}$, и пусть существуют все частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ первого порядка функции $f$ в точке $a$. Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0 \quad \forall\, i = \overline{1, n}.$$

Эта теорема показывает, что точки локального экстремума функции $f$ следует искать только среди точек, в которых все частные производные функции $f$ равны нулю или хотя бы одна из них не существует. Такие точки называют стационарными, или критическими, точками функции.

Теорема 1.1 дает необходимое условие точки локального экстремума. Это значит, что равенство нулю всех частных производных первого порядка функции $f$ в точке $a$ или не существование хотя бы одной из них еще не гарантирует наличие локального экстремума в этой точке $a$. Однако если точка $a$ не является критической точкой функции $f$, то точка $a$ не может быть точкой локального экстремума функции $f$.

Ответ на вопрос, когда критическая точка $a$ функции $f$ является точкой локального минимума (максимума) этой функции, позволяет во многих случаях дать следующая теорема из курса математического анализа.

**Теорема 1.2 (достаточное условие точки локального экстремума дважды дифференцируемой функции).** Пусть точка $a \in intG$ является критической точкой дважды непрерывно дифференцируемой в некоторой окрестности $\Omega(a, \delta)$ этой точки $a$ функции $f$; $d^2 f(a)$ — второй дифференциал функции $f$ в точке $a$, рассматриваемый как квадратичная форма от $n$ переменных $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$. Тогда :

а) если $d^2 f(a)$ — положительно определенная квадратичная форма, то точка $a$ — точка строгого локального минимума функции $f$;

б) если $d^2 f(a)$ — отрицательно определенная квадратичная форма, то точка $a$ — точка строгого локального максимума функции $f$;

в) если $d^2 f(a)$ — неопределенная квадратичная форма, то точка $a$ не является точкой локального экстремума функции $f$.

Напомним некоторые сведения о квадратичных формах, необходимые для правильного применения теоремы 1.2.

Квадратичной формой от $n$ переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется функция $h \mid \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, задаваемая условием $h(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n$; здесь $a_{ij}$ $(i, j = \overline{1, n})$ — заданные числа, называемые коэффициентами квадратичной формы, причем $a_{ij} = a_{ji} \ \ \forall\, i, j = \overline{1, n}$. Очевидно, что значение любой квадратичной формы в точке $O = (0, 0, \ldots, 0)$ равно нулю.

Квадратичная форма $h$ называется положительно определенной, если во всех точках $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, кроме точки $O$, она принимает положительные значения. Иначе говоря, положительно определенная квадратичная форма равна нулю только в точке $O$, а во всех остальных точках $x \in \mathbb{R}^n$ она принимает положительные значения. Примером такой квадратичной формы от трех переменных $x_1, x_2, x_3$ является квадратичная форма $g(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Примером квадратичной формы от трех переменных , не являющейся положительно определенной, является квадратичная форма $g(x_1, x_2, x_3) = x_1^2$ (она принимает нулевое значение не только в точке $O$).

Квадратичная форма $h$ называется отрицательно определенной, если во всех точках $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, кроме точки $O$, она принимает отрицательные значения. Иначе говоря, отрицательно определенная квадратичная форма равна нулю только в точке $O$, а во всех остальных точках $x \in \mathbb{R}^n$ она принимает отрицательные значения. Например, квадратичная форма от трех переменных $g(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2$ не является отрицательно определенной квадратичной формой, потому что она принимает нулевое значение не только в точке $O$.

Квадратичная форма $h$ называется неопределенной, если найдутся точки $x^1 = (x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1)$, $x^2 = (x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2) \in \mathbb{R}^n$ такие, что $h(x^1) > 0$, а $h(x^2) < 0$. Примером неопределенной квадратичной формы от трех переменных $x_1, x_2, x_3$ является такая форма: $g(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2$ (в точке $(1,1,1)$ она принимает положительное значение, а в точке $(0,1,0)$ — отрицательное).

Особо отметим, что помимо перечисленных трех типов квадратичных форм имеются и другие квадратичные формы. Например, нулевая квадратичная форма не является ни положительно определенной, ни отрицательно определенной, ни неопределенной. Другим примером таких квадратичных форм является квадратичная форма $g(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_3^2$. Она не является положительно определенной (она принимает нулевое значение не только в точке $O$), не является отрицательно определенной (она не принимает отрицательных значений), не является и неопределенной квадратичной формой (она не принимает ни одного отрицательного значения).

Напомним также критерий положительной определенности квадратичной формы, известный как критерий Сильвестра.

**Теорема 1.3.** Для того, чтобы квадратичная форма $h(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры определителя матрицы из коэффициентов $a_{ij}$ были положительны.

Из этой теоремы вытекает и критерий отрицательной определенности квадратичной формы : для отрицательной определенности квадратичной формы необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры нечетного порядка определителя матрицы из коэффициентов $a_{ij}$ были отрицательны, а все главные миноры четного порядка этого определителя — положительны.

Отметим, что неопределенность квадратичной формы устанавливается либо по определению, либо приведением ее к каноническому виду.

Сформулируем теперь алгоритм решения задачи на локальный экстремум, вытекающий из приведенных выше теоремы 1.1 и теоремы 1.2.

### Алгоритм решения задач на локальный экстремум

1. Находим критические точки функции $f(x)$.
2. Вычисляем значение $d^2 f(x)$ в произвольной точке $x$.

3. Находим значения $d^2f(a)$ в каждой критической точке $a$; $d^2f(a)$ рассматривается как квадратичная форма от $n$ переменных $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$.

4. Выясняем знакопределенность квадратичной формы $d^2f(a)$ в каждой критической точке $a$.

5. Делаем выводы :

если $d^2f(a)$ — положительно определенная квадратичная форма от $dx_1,\ dx_2, \ldots, dx_n$, то точка $a$ — точка строгого локального минимума функции $f(x)$;

если $d^2f(a)$ — отрицательно определенная квадратичная форма, то точка $a$ — точка строгого локального максимума функции $f(x)$;

если $d^2f(a)$ — неопределенная квадратичная форма, то точка $a$ не является точкой локального экстремума функции $f(x)$.

**Замечание.** Если $d^2f(a)$ не является ни положительно определенной, ни отрицательно определенной, ни неопределенной квадратичной формой, то теорема 1.2 не позволяет дать ответ на вопрос, будет ли критическая точка $a$ точкой локального экстремума функции $f$. В этом случае исследовать критическую точку $a$ на локальный экстремум следует или по определению точки локального экстремума, или каким-либо иным искусственным приемом.

Рассмотрим несколько примеров применения этого алгоритма.

**Пример 1.** Исследовать на локальный экстремум функцию трех переменных $u(x,y,z) = x^6 + y^4 + z^2 \quad ((x,y,z) \in \mathbb{R}^3)$.

Р е ш е н и е.

1. Находим критические точки функции $u$. Эти точки — решения системы уравнений

$$\begin{cases} u'_x = 6x^5 = 0, \\ u'_y = 4y^3 = 0, \\ u'_z = 2z = 0. \end{cases}$$

Единственным решением этой системы является, очевидно, точка $(0,0,0)$.

2. Вычисляем значение $d^2f(x)$ в произвольной точке $x$. Имеем:

$$d^2f(x) = 30x^4dx^2 + 12y^2dy^2 + 2dz^2.$$

3. Находим значение $d^2f$ в критической точке: $d^2f(0,0,0) = 2dz^2$.

4. Выясняем знакоопределенность квадратичной формы $d^2f(0,0,0)$. Эта квадратичная форма не является ни положительно определенной (она принимает нулевое значение не только при $dx = dy = dz = 0$), ни отрицательно определенной (она не принимает отрицательных значений), ни неопределенной (она не принимает отрицательных значений).

Поэтому, в соответствии с замечанием к алгоритму, исследуем эту точку по определению. Имеем:

$$u(0,0,0)=0,\ u(x,y,z)>0\ \forall\ (x,y,z)\neq(0,0,0).$$

Следовательно, в любой окрестности точки $(0,0,0)$ значение $u(x,y,z)$ строго больше значения $u(0,0,0)$. Поэтому точка $(0,0,0)$ является точкой строгого локального минимума функции $u$; значение $u_{min}$ локального минимума функции $u$ равно 0.

*Ответ:* точка $(0,0,0)$ — точка строгого локального минимума функции $u$; $u_{min}=0$.

**Пример 2.** Исследовать на локальный экстремум функцию трех переменных $u(x,y,z)=x^2/4+8y^3+z^2+12xy-24yz+x+2z$.

Р е ш е н и е.

1. Находим критические точки функции $u$. Они — решения системы:

$$\begin{cases} u'_x=x/2+12y+1=0,\\ u'_y=24y^2+12x-24z=0,\\ u'_z=2z-24y+2=0.\end{cases}$$

Решая ее, находим искомые критические точки функции $u$:

$$(-2;0;-1),\ (-578;24;287).$$

2. Вычисляем второй дифференциал функции $u$ в произвольной точке $(x,y,z)$. Имеем:

$$d^2u(x,y,z)=u''_{xx}dx^2+2u''_{xy}dxdy+2u''_{xz}dxdz+2u''_{yz}dydz+u''_{yy}dy^2+u''_{zz}dz^2=$$

$$=\frac{1}{2}dx^2+24dxdy-48dydz+48ydy^2+2dz^2.$$

3. Вычисляем второй дифференциал функции $u$ в найденных критических точках: $d^2u(-2;0;-1)=\frac{1}{2}dx^2+24dxdy-48dydz+2dz^2$;

$$d^2u(-578;24;287)=\frac{1}{2}dx^2+24dxdy-48dydz+1152dy^2+2dz^2.$$

4. Устанавливаем знакоопределенность полученных квадратичных форм $d^2u(-2;0;-1)$ и $d^2u(-578;24;287)$.

Для установления знакоопределенности первой квадратичной формы $d^2u(-2;0;-1)$ приведем ее к так называемому каноническому виду (то есть к виду, в котором присутствуют только квадраты новых переменных с коэффициентами 1 либо $-1$, либо 0). Имеем:

$$d^2u(-2;0;-1) = \frac{1}{2}dx^2 + 24dxdy - 48dydz + 2dz^2 = \frac{1}{2}(dx^2 + 2\cdot 24dxdy + 576dy^2 -$$

$$-576dy^2) - 48dydz + 2dz^2 = \frac{1}{2}(dx+24dy)^2 - 288dy^2 - 48dydz + 2dz^2 =$$

$$= \frac{1}{2}(dx+24dy)^2 + 2(dz^2 - 2\cdot 12dydz + 144dy^2 - 144dy^2) - 288dy^2 =$$

$$= \frac{1}{2}(dx+24dy)^2 + 2(dz-12dy)^2 - 288dy^2 - 288dy^2 = \frac{1}{2}(dx+24dy)^2 +$$

$$+2(dz-12dy)^2 - 576dy^2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}(dx+24dy))^2 + (\sqrt{2}(dz-12dy))^2 - (24dy)^2;$$

сделав далее замену $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}(dx+24dy)$, $\eta = \sqrt{2}(dz-12dy)$, $\zeta = 24dy$, получим:

$$d^2u(-2;0;-1) = \xi^2 + \eta^2 - \zeta^2$$

— квадратичная форма от переменных $\xi, \eta, \zeta$. Она, очевидно, неопределенная. Следовательно, квадратичная форма $d^2u(-2;0;-1)$ от переменных $dx$,$dy$,$dz$ — тоже неопределенная.

**Замечание.** Установить неопределенность рассматриваемой квадратичной формы $d^2u(-2;0;-1)$ можно было бы и не приводя ее к каноническому виду. Для этого достаточно указать две точки $((dx)_1, (dy)_1, (dz)_1)$, $((dx)_2, (dy)_2, (dz)_2)$, в которых эта квадратичная форма принимает значения разных знаков. В качестве первой точки $((dx)_1, (dy)_1, (dz)_1)$ можно взять точку $(1;0;0)$ ($d^2u(-2;0;-1)$ в этой точке будет больше 0), а в качестве второй точки — точку $(0;1;1)$ ($d^2u(-2;0;-1)$ в этой точке будет меньше 0).

Тогда, по теореме 1.2, критическая точка $(-2;0;-1)$ не является точкой локального экстремума функции $u$.

Установим теперь знакоопределенность квадратичной формы $d^2u(-578;24;287)$. Для этого воспользуемся критерием Сильвестра. Матрица из коэффициентов квадратичной формы $d^2u(-578;24;287)$ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 12 & 0 \\ 12 & 1152 & -24 \\ 0 & -24 & 2 \end{pmatrix}.$$

Главные миноры определителя этой матрицы больше нуля. Следовательно, по критерию Сильвестра, квадратичная форма $d^2u(-578;24;287)$ является положительно определенной. Тогда, по теореме 1.2, критическая точка $(-578; 24;\ 287)$ — точка строгого локального минимума данной функции $u(x, y, z)$. Значение $u_{min}$ локального минимума функции $u$ равно $u(-578; 24; 287) = -55298$.

*Ответ:* точка $(-578; 24; 287)$ — точка строгого локального минимума функции $u$; $u_{min} = -55298$.

**Пример 3.** Исследовать на локальный экстремум функцию трех переменных $u(x, y, z) = xy^2z^3(1 - x - y - z)$.

Р е ш е н и е.

Найдем критические точки функции $u$. Для этого решаем систему

$$\begin{cases} u'_x = y^2z^3(1 - x - y - z) - xy^2z^3 = 0, \\ u'_y = 2xyz^3(1 - x - y - z) - xy^2z^3 = 0, \\ u'_z = 3xy^2z^2(1 - x - y - z) - xy^2z^3 = 0. \end{cases}$$

Искомые критические точки — решения этой системы: $(x; 0; z)$ $(x, z$ — любые$)$, $(x; y; 0)$ $(x, y$ — любые$)$, $(0; 1 - z; z)$ $(z$ — любое$)$, $(1/7; 2/7; 3/7)$.

Исследуем теперь наличие локального экстремума в каждой из найденных критических точек. Для этого вычислим сначала второй дифференциал функции $u$ в произвольной точке $(x; y; z)$ :

$$d^2u(x; y; z) = u''_{xx}dx^2 + 2u''_{xy}dxdy + 2u''_{xz}dxdz + 2u''_{yz}dydz + u''_{yy}dy^2 + u''_{zz}dz^2.$$

Имеем :
$u''_{xx} = -2y^2z^3$; $u''_{xy} = yz^3(2-4x-3y-2z)$; $u''_{xz} = y^2z^2(3-6x-3y-4z)$; $u''_{yz} = xyz^2(6-6x-9y-8z)$; $u''_{yy} = 2xz^3(1-x-3y-z)$; $u''_{zz} = 6xy^2z(1-x-y-2z)$.

Следовательно,

$$d^2u(x; y; z) = -2y^2z^3dx^2 + 2yz^3(2 - 4x - 3y - 2z)dxdy + 2y^2z^2(3 - 6x - 3y -$$
$$-4z)dxdz + 2xyz^2(6 - 6x - 9y - 8z)dydz + 2xz^3(1 - x - 3y - z)dy^2 +$$
$$+6xy^2z(1 - x - y - 2z)dz^2.$$

Теперь находим значение $d^2u(x; y; z)$ в первой критической точке. Квадратичная форма от $dx, dy, dz$, представляющая собой $d^2u(x; 0; z)$, будет такова:

$$d^2u(x; 0; z) = 2xz^3(1 - x - z)dy^2.$$

Эта квадратичная форма не является *ни положительно определенной, ни* отрицательно определенной (она принимает нулевое значение не только при $dx, dy, dz$, равных одновременно нулю). Она не является и неопределенной квадратичной формой: если $2xz^3(1 - x - z) > 0$, то эта квадратичная форма принимает только неотрицательные значения для любых

$dx, dy, dz$; если $2xz^3(1-x-z) < 0$, то она принимает только неположительные значения для любых $dx, dy, dz$; если $2xz^3(1-x-z) = 0$, то она принимает только нулевое значение для любых $dx, dy, dz$ (то есть превращается в нулевую квадратичную форму). Поэтому теорема 1.2 не позволяет получить ответ на вопрос : будут ли точки $(x; 0; z)$ ($x, z$ — произвольные) точками локального экстремума функции $u$. Для получения ответа на этот вопрос приходится воспользоваться определением точки локального экстремума.

Очевидно, что $u(x; 0; z) = 0$ для любых $x, z$.

а) Если $xz > 0,\ x + z < 1$, то найдется достаточно малая окрестность точки $(x; 0; z)$, во всех точках которой значения функции $u$ будут неотрицательны (действительно, в этом случае в достаточно малой окрестности точки $(x; 0; z)$ $xy^2z^3 \geq 0,\ 1 - x - y - z > 0$, поэтому в этой окрестности $u = xy^2z^3(1-x-y-z) \geq 0$). Следовательно, в этом случае точка $(x; 0; z)$ является точкой локального минимума (нестрогого) функции $u$.

б) Если $xz < 0,\ x + z < 1$, то найдется достаточно малая окрестность точки $(x; 0; z)$, во всех точках которой значения функции $u$ будут неположительны. Следовательно, в этом случае точка $(x; 0; z)$ — точка локального максимума (нестрогого) функции $u$.

в) Если $xz < 0,\ x + z > 1$, то найдется достаточно малая окрестность точки $(x; 0; z)$, во всех точках которой значения функции $u$ будут неотрицательны. Следовательно, в этом случае точки $(x; 0; z)$ — точки локального минимума (нестрогого) функции $u$.

г) Если $xz > 0,\ x + z > 1$, то найдется достаточно малая окрестность точки $(x; 0; z)$, во всех точках которой значения функции $u$ будут неположительны. Следовательно, в этом случае точки $(x; 0; z)$ — точки локального максимума (нестрогого) функции $u$.

д) Если для точки $(x; 0; z)$ $x = 0$ или $z = 0$ или $x + z = 1$, то в любой окрестности точки $(x; 0; z)$ найдется точка $(x_1, y_1, z_1)$, в которой значение $u$ положительно и найдется точка $(x_2, y_2, z_2)$, в которой значение $u$ отрицательно. Следовательно, такая точка не является точкой локального экстремума функции $u$.

Таким образом, рассмотрены критические точки вида $(x; 0; z)$.

Теперь аналогично рассмотрим критические точки вида $(x; y; 0)$ ($x, y$ — произвольные). Для них имеем:
$d^2u(x; y; 0) = 0$ — нулевая квадратичная форма от $dx, dy, dz$. Она, очевидно, не является ни положительно определенной, ни отрицательно определенной, ни неопределенной. Поэтому опять приходится воспользоваться определением точки локального экстремума.

В любой окрестности точки $(x; y; 0)$ найдется такая точка $(x_1; y_1; z_1)$, что $u(x_1; y_1; z_1) > 0$ и точка $(x_2; y_2; z_2)$, в которой $u(x_2; y_2; z_2) < 0$. Следовательно, точка $(x; y; 0)$ ($x, y$ — произвольные) не является точкой локального экстремума функции $u$.

Теперь исследуем критические точки $(0; 1 - z; z)$ ($z$ — произвольное). Для них имеем:

$$d^2u(0; 1 - z; z) = -2(1 - z)^2 z^3 (dx^2 + dxdy + dxdz).$$

Если $(1 - z)^2 z^3 \neq 0$, то эта квадратичная форма является неопределенной (так как в точках $(dx; dy; dz)$ с $dx = 1, dy = 0, dz = 0$ и с $dx = 1, dy = -2, dz = 0$ она принимает значения разных знаков). Если же $(1 - z)^2 z^3 = 0$, то эта квадратичная форма — нулевая. Следовательно, критическая точка $(0; 1 - z; z)$, для которой $z \neq 0, z \neq 1$, согласно теореме 1.2, не является точкой локального экстремума функции $u$. Критические точки, получающиеся при $z = 0$ и $z = 1$, то есть точки $(0; 1; 0)$ и $(0; 0; 1)$ требуют дополнительного исследования. Для них квадратичные формы $d^2u(0; 1; 0)$ и $d^2u(0; 0; 1)$ — нулевые, поэтому теорема 1.2 не применима. Следовательно, нужно опять воспользоваться определением точки локального экстремума. Значение функции $u$ в обеих точках, очевидно, равно нулю. В любой окрестности каждой из этих точек найдутся точки, в которых функция $u$ принимает значения разных знаков. Поэтому, обе эти точки не являются точками локального экстремума функции $u$.

Осталось исследовать критическую точку $(1/7; 2/7; 3/7)$. Имеем:

$$d^2u\left(\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}\right) = \frac{18}{7^5}(-12dx^2 - 12dxdy - 12dxdz - 12dydz - 9dy^2 - 8dz^2).$$

Исследуем эту квадратичную форму на знакоопределенность по критерию Сильвестра. Матрица из коэффициентов этой квадратичной формы имеет вид:

$$\begin{pmatrix} -12 & -6 & -6 \\ -6 & -9 & -12 \\ -6 & -12 & -8 \end{pmatrix}.$$

Все главные миноры нечетного порядка определителя этой матрицы отрицательны, а четного порядка — положительны. Следовательно, квадратичная форма $d^2u(1/7; 2/7; 3/7)$ — отрицательно определенная. Следовательно, по теореме 1.2, критическая точка $(1/7; 2/7; 3/7)$ — точка строгого локального максимума функции $u$. Значение локального максимума $u_{max}$ функции $u$ равно $u_{max} = \frac{108}{7^7}$.

*Ответ:* точки нестрогого локального минимума функции $u$: $(x; 0; z)$ $(xz > 0, x + z < 1)$, $u_{min} = 0$; $(x; 0; z)$ $(xz < 0, x + z > 1)$, $u_{min} = 0$; точки нестрогого локального максимума функции $u$: $(x; 0; z)$ $(xz < 0, x +$

$z < 1$), $u_{max} = 0$; $(x; 0; z)$ $(xz > 0, x + z > 1)$, $u_{max} = 0$; точка строгого локального максимума функции $u$: $(1/7; 2/7; 3/7)$, $u_{max} = 108/7^7$.

## §2. Задачи на локальный условный экстремум

Под задачей на локальный условный экстремум понимают задачу о нахождении точек локального условного максимума и точек локального условного минимума данной функции и значений функции в них. Заметим, что точки локального условного максимума и минимума называются еще точками локального относительного максимума и минимума. Приведем постановку этой задачи, а также необходимые для решения ее понятия и факты, рассматриваемые в курсе классического математического анализа.

Пусть $U$ — открытое множество в пространстве $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n)\}$. Предположим, что задана функция $f \mid U \to \mathbb{R}$ и система функций $F_1, F_2, \ldots, F_k \mid U \to \mathbb{R}$ $(k < n)$. Обозначим через $D$ множество всех содержащихся в $U$ решений системы уравнений

$$F_1(x) = 0,\ F_2(x) = 0, \ldots,\ F_k(x) = 0; \tag{2.1}$$

уравнения этой системы в теории условного экстремума называют уравнениями связи.

**Определение.** Точка $a \in D$ называется точкой локального условного максимума (минимума) функции $f \mid U \to \mathbb{R}$ при наличие уравнений связи (2.1), если найдется окрестность $\Omega(a; \delta)$ точки $a$ такая, что во всех точках $x \in D \cap \Omega(a; \delta)$ выполняется неравенство

$$f(x) \le f(a) \quad (f(x) \ge f(a)). \tag{2.2}$$

В этом случае значение $f(a)$ называется значением локального условного максимума (минимума) функции $f$ при наличие уравнений связи (2.1).

Точки локального условного максимума и точки локального условного минимума объединяются одним термином: точки локального условного экстремума.

**Замечание.** Если в условии (2.2) заменить неравенства на строгие, то получится определение точки строгого локального условного максимума (минимума) функции $f$ при наличие уравнений связи (2.1).

Наиболее просто задача на локальный условный экстремум решается в случае, когда систему уравнений связи (2.1) можно разрешить относительно некоторых $k$ переменных из $x_1, \ldots, x_n$. Пусть, для определенности, ее удается разрешить относительно $x_1, x_2, \ldots, x_k$ (если систему можно разрешить относительно других $k$ переменных, то достаточно изменить нумерацию переменных $x_1, \ldots, x_n$). Это означает, что система уравнений связи (2.1) оказывается равносильной в множестве $U$ системе уравнений

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_{k+1}, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_k = \varphi_k(x_{k+1}, \ldots, x_n); \end{cases} \tag{2.3}$$

причем вид функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ известен. В этом случае $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ на множестве $D$ становится фактически функцией от $x_{k+1}, \ldots, x_n$ :

$$u = \widetilde{f}(x_{k+1}, \ldots, x_n) = f(\varphi_1(x_{k+1}, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_k(x_{k+1}, \ldots, x_n), x_{k+1}, \ldots, x_n).$$

Значит вопрос о локальном условном экстремуме функции $f$ сводится к вопросу о локальном (безусловном) экстремуме функции $\widetilde{f}(x_{k+1}, \ldots, , x_n)$, рассматриваемой на множестве $\widetilde{D} = \{\widetilde{x} = (x_{k+1}, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-k} \mid (\varphi_1(\widetilde{x}), \ldots, \varphi_k(\widetilde{x}), \widetilde{x}) \in D\}$. А именно, если точка $\widetilde{a} \in \widetilde{D}$ — точка локального (безусловного) максимума (минимума) $\widetilde{f}$, то $a = (\varphi_1(\widetilde{a}), \ldots, \varphi_k(\widetilde{a}), , \widetilde{a}) \in D$ — точка локального условного максимума (минимума) $f$. И обратно, если точка $a \in D$ является точкой локального условного максимума (минимума) функции $f$, то тогда точка $\widetilde{a} = (a_{k+1}, \ldots, a_n) \in \widetilde{D}$ является точкой локального (безусловного) максимума (минимума) функции $\widetilde{f}$ на $\widetilde{D}$.

**Пример.** Найти точки локального условного экстремума функции $f \mid \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $(f(x,y,z) = xyz \ \forall\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3)$ при условии $x + y + z = 1$.

Р е ш е н и е.

Множество $D$ — плоскость $x + y + z = 1$. Так как для точек из $D$ $z$ имеет вид $z = 1 - x - y$, то вопрос о локальном условном экстремуме функции $f(x,y,z) = xyz$ трех переменных $x, y, z$ при условии $x + y + z = 1$ сводится к вопросу о локальном (безусловном) экстремуме функции $\widetilde{f}(x,y) = xy(1-x-y)$ двух переменных $x, y$, рассматриваемой на плоскости $\mathbb{R}^2 = \{(x,y)\}$. Эту функцию $\widetilde{f}$ и исследуем на локальный (безусловный) экстремум (по алгоритму из §1). Находим критические точки функции $\widetilde{f}$. Эти точки — решения системы:

$$\begin{cases} \widetilde{f}\,'_x = y(1 - x - y) - xy = 0, \\ \widetilde{f}\,'_y = x(1 - x - y) - xy = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим их: $(0;0)$, $(1;0)$, $(0;1)$, $(\frac{1}{3};\frac{1}{3})$; это и будут критические точки функции $\widetilde{f}$.

Исследуем теперь $\widetilde{f}$ на локальный (безусловный) экстремум в каждой из найденных критических точек.

Имеем: $d^2\widetilde{f}(x,y) = -2ydx^2 + 2(1-2x-2y)dxdy - 2xdy^2$.

Рассмотрим точку $(0;0)$.

$d^2\widetilde{f}(0;0) = 2dxdy$ — неопределенная квадратичная форма. Следовательно, по теореме 2 из §1 точка $(0;0)$ не является точкой локального экстремума функции $\widetilde{f}$.

Теперь рассмотрим точку $(1;0)$.

$d^2\widetilde{f}(1;0) = -2dxdy - 2dy^2$ — неопределенная квадратичная форма (при $dx = -2,\ dy = 1$ $d^2\widetilde{f}(1;0)$ она принимает положительное значение, а при $dx = 0,\ dy = 1$ $d^2\widetilde{f}(1;0)$ принимает отрицательное значение). Следовательно, рассматриваемая точка $(1;0)$ не является точкой локального экстремума функции $\widetilde{f}$.

Рассмотрим точку $(0;1)$.

$d^2\widetilde{f}(0;1) = -2dx^2 - 2dxdy$ — неопределенная квадратичная форма. Следовательно, точка $(0;1)$ также не является точкой локального экстремума функции $\widetilde{f}$.

Осталось рассмотреть точку $(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$. Имеем:

$d^2\widetilde{f}(\frac{1}{3},\frac{1}{3}) = -\frac{2}{3}dx^2 - \frac{2}{3}dxdy - \frac{2}{3}dy^2$. Исследуем на знакоопределенность эту квадратичную форму по критерию Сильвестра. Матрица из коэффициентов этой квадратичной формы имеет вид:

$$\begin{pmatrix} -2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -2/3 \end{pmatrix}.$$

Главный минор первого порядка определителя этой матрицы отрицателен, главный минор второго порядка определителя этой матрицы положителен. Следовательно, квадратичная форма $d^2\widetilde{f}(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ — отрицательно определенная. Значит, точка $(1/3,1/3)$ является точкой строгого локального (безусловного) максимума функции $\widetilde{f}$. При $x = 1/3,\ y = 1/3$ переменная $z = 1/3$. Следовательно, точка $(1/3,1/3,1/3)$ является точкой строгого локального условного максимума функции $f$. Значение $f_{max}$ локального условного максимума функции $f$ равно: $f_{max} = 1/27$.

*Ответ:* $(1/3,1/3,1/3)$ — точка строгого локального условного максимума функции $f$; $f_{max} = 1/27$.

Рассмотрим теперь более сложный случай, когда систему уравнений связи (2.1) не удается разрешить относительно каких - либо $k$ переменных из $x_1,\ldots,x_n$.

В этом случае задачу на локальный условный экстремум решают обычно в предположении, что ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_k}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial F_k}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial F_k}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

равен $k$ в каждой точке $x \in D$, то есть в каждой точке $x \in D$ отличен от нуля хотя бы один из определителей $k$-ого порядка этой матрицы. Без ограничения общности рассуждений можно считать, что это — определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_k}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_k}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial F_k}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial F_k}{\partial x_k}(x) \end{vmatrix} \tag{2.4}$$

(если отличен от 0 другой определитель $k$–ого порядка этой матрицы, то достаточно изменить надлежащим образом нумерацию переменных $x_1, \dots, x_n$).

Заметим, что теорема о системе неявных функций утверждает, что в этом случае в достаточно малой окрестности точки $x \in D$, то есть локально, система уравнений связи (2.1) будет равносильна системе уравнений вида (2.3). Однако вида функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ эта теорема не дает.

Установить точки возможного локального условного экстремума функции $f$, то есть точки, в которых функция $f$ может иметь локальный условный экстремум, в этом случае позволяет следующая теорема.

**Теорема 2.1 (необходимое условие точек локального условного экстремума).** Пусть точка $a \in D$ — точка локального условного экстремума функции $u = f(x)$. Предположим, что функции $f, F_1, \dots, F_k$ имеют в некоторой окрестности точки $a$ непрерывные частные производные 1-ого порядка. Тогда найдутся числа $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ (их называют множителями Лагранжа) такие, что точка $a$ является критической точкой так называемой функции Лагранжа

$$L(x) = f(x) + \lambda_1 F_1(x) + \ldots + \lambda_k F_k(x). \tag{2.5}$$

Эта теорема показывает, что точки локального условного экстремума функции $f$ следует искать только среди критических точек функции Лагранжа.

**Замечание.** На практике множители Лагранжа $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ и координаты $a_1, \dots, a_n$ критической точки $a$ функции Лагранжа, соответствующей этим множителям, находят, решая систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(a) + \ldots + \lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial x_1}(a) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial L}{\partial x_n}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) + \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(a) + \ldots + \lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial x_n}(a) = 0, \\ F_1(a) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots \\ F_k(a) = 0. \end{cases} \tag{2.6}$$

Установить наличие или отстутствие локального условного экстремума в критической точке функции Лагранжа (2.5) часто позволяет следующая теорема.

**Теорема 2.2 (достаточное условие точек локального условного экстремума).** Пусть точка $a \in D$ — критическая точка функции Лагранжа (2.5). Предположим, что функции $f, F_1, \ldots, F_k$ имеют в некоторой окрестности точки $a$ непрерывные частные производные до 2-ого порядка включительно. Пусть, далее, $d^2L(a) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(a)dx_i dx_j$ — второй дифференциал функции Лагранжа в точке $a$, а

$$\widetilde{d^2L(a)} = \sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=k+1}^{n} b_{ij} dx_i dx_j \quad - \tag{2.7}$$

— квадратичная форма от переменных $dx_{k+1}, \ldots, dx_n$, получающаяся из $d^2L(a)$ после подстановки в $d^2L(a)$ вместо $dx_1, \ldots, dx_k$ их выражений через $dx_{k+1}, \ldots, dx_n$, найденных из системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(a)dx_1 + \ldots + \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(a)dx_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial F_k}{\partial x_1}(a)dx_1 + \ldots + \frac{\partial F_k}{\partial x_n}(a)dx_n = 0 \end{cases} \tag{2.8}$$

(система разрешима, т. к. определитель (2.4) отличен от 0 по предположению). Тогда имеют место утверждения:

а) если квадратичная форма $\widetilde{d^2L(a)}$ — положительно определенная квадратичная форма, то точка $a$ — точка строгого локального условного минимума функции $f$;

б) если квадратичная форма $\widetilde{d^2L(a)}$ — отрицательно определенная квадратичная форма, то точка $a$ — точка строгого локального условного максимума функции $f$;

в) если квадратичная форма $\widetilde{d^2L(a)}$ — неопределенная квадратичная форма, то точка $a$ не является точкой локального условного экстремума функции $f$.

Наиболее трудоемкая часть работы при использовании этой теоремы — это построение квадратичной формы $\widetilde{d^2L(a)}$. Избежать этой работы нередко позволяет следующее следствие из теоремы 2.2.

**Следствие.** Если квадратичная форма $d^2L(a)$ — положительно (отрицательно) определенная, то точка $a$ является точкой строгого локального условного минимума (максимума) функции $f$.

Метод решения задачи на локальный условный экстремум, основанный на приведенных теоремах, называется методом неопределенных множителей Лагранжа.

Из приведенных выше теорем вытекает следующий алгоритм метода неопределенных множителей Лагранжа.

**Алгоритм метода неопределенных множителей Лагранжа**

1. Составляем функцию Лагранжа $L(x)$ с неизвестными пока множителями $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$.

2. Решая систему (2.6), находим множители Лагранжа $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ и координаты $a_1, \ldots, a_n$ критических точек соответствующей этим множителям функции Лагранжа. При этом может получиться несколько функций Лагранжа, так как система (2.6) может иметь несколько решений; каждая из найденных функций Лагранжа может иметь свои критические точки. Условный экстремум исходной функции $f$ возможен только в этих точках.

3. Вычисляем второй дифференциал каждой функции Лагранжа $L$, в каждой критической точке $a$ этой функции $L$. Если $d^2L(a)$ — положительно (отрицательно) определенная квадратичная форма, то делаем вывод: точка $a$ — точка локального условного минимума (максимума) данной функции $f$. Если же $d^2L(a)$ не является ни положительно определенной, ни отрицательно определенной квадратичной формой, то переходим к следующему пункту.

4. Вычисляем квадратичную форму $\widetilde{d^2L(a)}$. Если она — положительно (отрицательно) определенная, то точка $a$ — точка локального условного минимума (максимума) функции $f$; если $\widetilde{d^2L(a)}$ — неопределенная квадратичная форма, то точка $a$ не является точкой локального условного экстремума функции $f$.

**Замечание.** Если квадратичная форма $\widetilde{d^2L(a)}$ не является ни положительно определенной, ни отрицательно определенной, ни неопределенной, то теорема 2.2 не работает, и исследовать функцию $f(x)$ на наличие в точке $a$ локального условного экстремума следует по определению точки локального условного экстремума или каким–либо иным искусственным приемом.

**Пример.** Исследовать на локальный условный экстремум функцию трех переменных $u(x, y, z) = x^2 + 2y - z$ при условии $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

Решение.

Составим функцию Лагранжа с неопределенным пока множителем $\lambda$:

$$L(x,y,z) = x^2 + 2y - z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 2).$$

Найдем этот множитель $\lambda$ и координаты критических точек соответствующей функции Лагранжа $L$; для этого составляем систему (2.6):

$$\begin{cases} L'_x = 2x + 2\lambda x = 0, \\ L'_y = 2 + 2\lambda y = 0, \\ L'_z = -1 + 2\lambda z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2. \end{cases}$$

Ее решения:

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \\ z_1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \\ \lambda_1 = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = 0, \\ y_2 = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \\ z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \\ \lambda_2 = -\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}; \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ y_3 = 1, \\ z_3 = -\frac{1}{2}, \\ \lambda_3 = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ y_4 = 1, \\ z_4 = -\frac{1}{2}, \\ \lambda_4 = -1. \end{cases} \qquad (2.9)$$

Найденные решения (2.9) показывают, что неопределенный множитель Лагранжа может принимать три различных значения. Наличие трех различных значений для $\lambda$ говорит о том, что в данной задаче имеется три функции Лагранжа. Решения (2.9) указывают также критические точки каждой из этих трех функций Лагранжа. Например, первое решение указывает, что критической точкой функции Лагранжа с $\lambda = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$ является точка $(0; -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}; \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}})$; третье и четвертое решения говорят о том, что функция Лагранжа с $\lambda = -1$ имеет две критические точки: $(\frac{\sqrt{3}}{2}; 1; -\frac{1}{2})$ и $(-\frac{\sqrt{3}}{2}; 1; -\frac{1}{2})$.

Исследуем критические точки каждой из этих трех функций Лагранжа по отдельности.

Функция Лагранжа с $\lambda = \lambda_1$ имеет вид:

$$L(x,y,z) = x^2 + 2y - z + \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(x^2 + y^2 + z^2 - 2);$$

ее критической точкой, как уже отмечалось, является точка $(0; -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}; \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}})$. Исследуем эту точку.

Имеем:

$$d^2L(x,y,z) = (2+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}})dx^2 + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}dy^2 + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}dz^2.$$

Следовательно, $d^2L(0; -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}; \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}) = (2+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}})dx^2 + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}dy^2 + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}dz^2$ – положительно определенная квадратичная форма от переменных $dx, dy, dz$. Значит, по следствию из теоремы 2.2, точка $(0; -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}; \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}})$ – точка локального условного минимума функции $u$; значение $u_{min}$ локального условного минимума равно: $u_{min} = -\sqrt{10}$.

Функция Лагранжа с $\lambda = -\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$ будет такой:

$$L(x,y,z) = x^2 + 2y - z - \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(x^2 + y^2 + z^2 - 2);$$

ее критической точкой является $(0; \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}; -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}})$. Второй дифференциал этой функции в этой точке таков:

$$d^2L(0; \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}; -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}) = (2-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}})dx^2 - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}dy^2 - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}dz^2$$

— неопределенная квадратичная форма от переменных $dx, dy, dz$ (так как $2 - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} > 0$).

Следовательно, следствие из теоремы 2.2 не применимо. Согласно приведенному выше алгоритму в таком случае нужно строить квадратичную форму $\widetilde{d^2L}(0; \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}; -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}})$. Для этого нужно выразить одну из переменных $dx, dy, dz$ через остальные. Уравнение, связывающее $dx, dy, dz$, получается дифференцированием уравнения связи $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Оно будет таким:

$$2xdx + 2ydy + 2zdz = 0.$$

Для точки $(0; \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}; -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}})$ последнее уравнение примет вид:

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}dy - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}dz = 0.$$

Следовательно, выражение $dz$ через $dx, dy$ таково: $dz = 2dy$. Поэтому квадратичная форма

$$\widetilde{d^2L}(0; \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}; -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}) = (2-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}})dx^2 - \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{2}}dy^2$$

является неопределенной квадратичной формой от переменных $dx, dy$. Следовательно, по теореме 2.2, точка $(0; \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}; -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}})$ не является точкой локального условного экстремума функции $u$.

Переходим к исследованию критических точек третьей функции Лагранжа

$$L(x, y, z) = x^2 + 2y - z - (x^2 + y^2 + z^2 - 2),$$

получающейся при $\lambda = -1$. Имеем:

$$d^2L(x, y, z) = -2dy^2 - 2dz^2;\ d^2L(\frac{\sqrt{3}}{2}; 1; -\frac{1}{2}) = -2dy^2 - 2dz^2$$

— квадратичная форма от $dx, dy, dz$, не является ни положительно определенной, ни отрицательно определенной, ни неопределенной квадратичной формой. Следовательно, нужно опять строить квадратичную форму $\widetilde{d^2L}(\frac{\sqrt{3}}{2}; 1; -\frac{1}{2})$. Имеем:

$$\sqrt{3}dx + 2dy - dz = 0.$$

Отсюда

$$dz = \sqrt{3}dx + 2dy.$$

Значит,

$$\widetilde{d^2L}(\frac{\sqrt{3}}{2}; 1; -\frac{1}{2}) = -2dy^2 - 2(\sqrt{3}dx + 2dy)^2 = -6dx^2 - 8\sqrt{3}dxdy - 10dy^2.$$

Эта квадратичная форма от $dx, dy$ отрицательно определенная, по критерию Сильвестра. Следовательно, по теореме 2.2, точка $(\frac{\sqrt{3}}{2}; 1; -\frac{1}{2})$ — точка локального условного максимума функции $u$; значение $u_{max}$ локального условного максимума функции $u$ равно: $u_{max} = 13/4$.

Аналогично исследуется другая критическая точка этой функции Лагранжа. Имеем:

$$d^2L(-\frac{\sqrt{3}}{2}; 1; -\frac{1}{2}) = -2dy^2 - 2dz^2$$

— ни положительно определенная, ни отрицательно определенная, ни неопределенная квадратичная форма от переменных $dx, dy, dz$. Из уравнения связи находим:

$$-\sqrt{3}dx + 2dy - dz = 0,\ dz = -\sqrt{3}dx + 2dy;$$

$$\widetilde{d^2L}(-\frac{\sqrt{3}}{2}; 1; -\frac{1}{2}) = -2dy^2 - 2(-\sqrt{3}dx + 2dy)^2 = -6dx^2 + 8\sqrt{3}dxdy - 10dy^2$$

является отрицательно определенной квадратичной формой от $dx, dy$. Значит, по теореме 2.2, точка $(-\frac{\sqrt{3}}{2}; 1; -\frac{1}{2})$ — точка локального условного максимума функции $u$; $u_{max} = 13/4$.

*Ответ:* точка $(0; -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}}; \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}})$ — точка локального условного минимума функции $u$; $u_{min} = -\sqrt{10}$; $(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}; 1; -\frac{1}{2})$ — точки локального условного максимума функции $u$; $u_{max} = 13/4$.

## §3. Задачи на наибольшее и наименьшее значение

Пусть $G$ — область в пространстве $\mathbb{R}^n$ (возможно, замкнутая[1]) и $f|\ G \to \mathbb{R}$ — заданная на ней функция.

Под задачей на наибольшее и наименьшее значения понимается задача о нахождении наибольшего и наименьшего значения данной функции, а также точек, в которых эти значения принимаются.

При этом обычно рассматриваются задача о нахождении наибольшего и наименьшего значения данной функции без дополнительных ограничений на ее аргументы и задача о нахождении наибольшего и наименьшего значения данной функции при наличии уравнений связи типа

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_k(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (k < n). \end{cases} \tag{3.1}$$

Эти задачи можно назвать соответственно задачей на безусловное наибольшее и наименьшее значения и задачей на условное наибольшее и наименьшее значения.

Методике решения этих задач и посвящен этот параграф.

*1. Задачи на безусловное наибольшее и наименьшее значения функции.*

**Определение.** Значение $f(x_0)$ функции $f \mid G \to \mathbb{R}$ в точке $x_0$ называется наибольшим (наименьшим) значением, если $\forall\ x \in G$ выполняется

$$f(x) \le f(x_0) \quad (f(x) \ge f(x_0)).$$

Точку $x_0$ в этом случае можно назвать точкой глобального максимума (глобального минимума) функции $f$; вместе эти точки будем называть точками глобального экстремума.

Если наибольшее (наименьшее) значение $f(x_0)$ принимается в точке $x_0 \in intG$, то точка $x_0$ тем более — точка локального максимума (минимума) функции $f$, а значит, точка $x_0$ является критической точкой функции $f \mid G \to \mathbb{R}$. Отсюда вытекает следующий алгоритм.

[1]Замкнутая область — это область вместе с ее границей.

## Алгоритм решения задач на безусловное наибольшее и наименьшее значение

1. Находим значения функции $f$ в ее критических точках, лежащих внутри области $G$.

2. Находим тем или иным способом наибольшее и наименьшее значения функции $f$ на границе $\partial G$ (то есть при условии, что точка $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \partial G$), если область определения $G$ функции $f$ — замкнутая область; если же $G$ — не замкнутая область, то этого делать не нужно.

3. Из найденных значений функции $f$ выбираем самое большое и самое малое значения. Выбранные значения и будут наибольшим и наименьшим значениями функции $f$ на множестве $G$, а точки, в которых эти значения принимаются — точками глобального максимума и глобального минимума функции $f$ на множестве $G$.

**Замечание.** Функция $f \mid G \to \mathbb{R}$ может не принимать в области $G$ наибольшего и наименьшего значения или их обоих. Если $G$ — компакт в $\mathbb{R}^n$, а функция $f \mid G \to \mathbb{R}$ непрерывна на $G$, то, по второй теореме Вейерштрасса, эта функция в некоторых точках области $G$ принимает как наибольшее, так и наименьшее значения.

Следующий пример иллюстрирует приведенный алгоритм.

**Пример.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции $u = x^2+3y^2+z^2-xz-4y-\frac{x}{4}$ в замкнутой области $G$, задаваемой неравенствами $x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x+y+z \leq 1$ (трехмерный симплекс).

Р е ш е н и е.

Заметим, что наибольшее и наименьшее значения существуют, так как $G$ — компакт в $\mathbb{R}^3$, а функция $u \mid G \to \mathbb{R}$ непрерывна на $G$.

1) Находим критические точки функции $u$, лежащие внутри области $G$, и значения функции в них. Эти критические точки — решения системы уравнений:

$$\begin{cases} u'_x = 2x - z - 1/4 = 0, \\ u'_y = 6y - 4 = 0, \\ u'_z = 2z - x = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим: точка $(1/6; 2/3; 1/12) \in intG$ — критическая точка функции $u$; $u(1/6; 2/3; 1/12) = -195/144$.

2) Находим наибольшее и наименьшее значения функции $u$ на границе $\partial G$ области $G$. Эта граница состоит из четырех поверхностей:

$$S_1: \ z = 1 - x - y,\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 - x;$$

$$S_2: \ z = 0,\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 - x;$$

$$S_3: \ x=0, \ 0 \le y \le 1, \ 0 \le z \le 1-y;$$

$$S_4: \ y=0, \ 0 \le x \le 1, \ 0 \le z \le 1-x.$$

Находим наибольшее и наименьшее значения функции $u$ на каждой поверхности $S_1 - S_4$ и выбираем из них самое большое и самое малое.

2.1) Наибольшее и наименьшее значения функции $u$ на $S_1$.

Так как для точек $(x,y,z) \in S_1$ $z = 1 - x - y$, данная функция $u$ (от трех вещественных переменных) превращается на $S_1$ в функцию $u_1 = 3x^2 + 4y^2 - 13x/4 - 6y + 3xy + 1$ (от двух вещественных переменных), определенную в области $D_1 = \{(x,y) \ : \ 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le 1-x\}$.

Таким образом, задача о нахождении наибольшего и наименьшего значения функции $u$ на $S_1$ свелась к задаче о нахождении наибольшего и наименьшего значения функции $u_1$ в $D_1$.

а) Сначала находим критические точки функции $u_1$, лежащие внутри $D_1$. Для этого решаем систему:

$$\begin{cases} (u_1)'_x = 6x - 13/4 + 3y = 0, \\ (u_1)'_y = 8y + 3x - 6 = 0. \end{cases}$$

Ее решение — точка $(8/39; 35/52) \in intD_1$; $u_1(8/39; 35/52) = -2743/2028$.

б) Находим наибольшее и наименьшее значения функции $u_1$ на границе $\partial D_1$ области $D_1$. Эта граница состоит из трех отрезков:
$l_1: \ y=0, \ 0 \le x \le 1$; $l_2: \ x=0, \ 0 \le y \le 1$; $l_3: \ y = 1-x, \ 0 \le x \le 1$.

Найдем наибольшее и наименьшее значения функции $u_1$ на каждом из этих отрезков.

б1) Наибольшее и наименьшее значения функции $u_1$ на $l_1$. Так как для точек $(x,y) \in l_1$ $y = 0$, то функция $u_1$ превращается в функцию $u_{11} = 3x^2 - 13x/4 + 1$, заданную на $[0,1]$. Легко находим: $\max\limits_{[0,1]} u_{11} = 1$ при $x = 0$; $\min\limits_{[0,1]} u_{11} = 23/192$ при $x = 13/24$. Следовательно, $\max\limits_{l_1} u_1 = 1$ в точке $(0;0)$; $\min\limits_{l_1} u_1 = 23/192$ в точке $(13/24; 0)$.

б2) Наибольшее и наименьшее значения функции $u_1$ на $l_2$. Так как для точек $(x,y) \in l_2$ $x = 0$, то функция $u_1$ превращается в функцию $u_{12} = 4y^2 - 6y + 1$, заданную на $[0,1]$. Аналогично б1), находим: $\max\limits_{[0,1]} u_{12} = 1$ при $y = 0$; $\min\limits_{[0,1]} u_{12} = -5/4$ при $y = 3/4$. Значит, $\max\limits_{l_2} u_1 = 1$ в точке $(0;0)$; $\min\limits_{l_2} u_1 = -5/4$ в точке $(0; 3/4)$.

б3) Наибольшее и наименьшее значения функции $u_1$ на $l_3$. Так как для точек $(x,y) \in l_3$ $y = 1 - x$, то функция $u_1$ превращается в функцию $u_{13} = 4x^2 - 9x/4 - 1$, заданную на $[0,1]$. Так же как и в б1) находим:

$\max\limits_{[0,1]} u_{13} = 3/4$ при $x = 1$; $\min\limits_{[0,1]} u_{13} = -337/256$ при $x = 9/32$. Значит, $\max\limits_{l_3} u_1 = 3/4$ в точке $(1;0)$; $\min\limits_{l_3} u_1 = -337/256$ в точке $(9/32;23/32)$.

Из б1) — б3) следует, что $\max\limits_{\partial D_1} u_1 = 1$ в точке $(0;0)$; $\min\limits_{\partial D_1} u_1 = -337/256$ в точке $(9/32;23/32)$.

Из а) и б) следует, что $\max\limits_{D_1} u_1 = 1$ в точке $(0;0)$; $\min\limits_{D_1} u_1 = -2743/2028$ в точке $(8/39;35/52)$. Это значит, что $\max\limits_{S_1} u = 1$ в точке $(0;0;1)$; $\min\limits_{S_1} u = -2743/2028$ в точке $(8/39;35/52;19/156)$.

2.2) Наибольшее и наименьшее значения функции $u$ на $S_2$. На $S_2$ данная функция $u$ превращается в функцию $u_2 = x^2 + 3y^2 - 4y - x/4$, определенную в области $D_2 = \{(x,y) \ : \ 0 \le x \le 1, \ 0 \le y \le 1 - x\}$.

Таким образом, задача о нахождении наибольшего и наименьшего значения функции $u$ на $S_2$ сводится к задаче о нахождении наибольшего и наименьшего значения функции $u_2$ в $D_2$. Аналогично пункту 2.1) находим: $\max\limits_{D_2} u_2 = 3/4$ в точке $(1;0)$; $\min\limits_{D_2} u_2 = -259/192$ в точке $(1/8;2/3)$. Следовательно, $\max\limits_{S_2} u = 3/4$ в точке $(1;0;0)$; $\min\limits_{S_2} u = -259/192$ в точке $(1/8;2/3;0)$.

2.3) Наибольшее и наименьшее значения функции $u$ на $S_3$. На $S_3$ функция $u$ превращается в функцию $u_3 = 3y^2+z^2-4y$, определенную в области $D_3 = \{(y,z) \ : \ 0 \le y \le 1, \ 0 \le z \le 1 - y\}$.

Подобно тому, как это делалось в пункте 2.1), находим : $\max\limits_{S_3} u = 1$ в точке $(0;0;1)$; $\min\limits_{S_3} u = -4/3$ в точке $(0;2/3;0)$.

2.4) Наибольшее и наименьшее значения функции $u$ на $S_4$. На $S_4$ функция $u$ превращается в функцию $u_4 = x^2 + z^2 - xz - x/4$, определенную в области $D_4 = \{(x,z) \ : \ 0 \le x \le 1, \ 0 \le z \le 1 - x\}$.

Повторяя опять рассуждения пункта 2.1), получим : $\max\limits_{S_4} u = 1$ в точке $(0;0;1)$; $\min\limits_{S_4} u = -1/64$ в точке $(1/8;0;0)$.

Из 2.1) — 2.4) следует, что $\max\limits_{\partial G} u = 1$ в точке $(0;0;1)$; $\min\limits_{\partial G} u = \frac{-2743}{2028}$ в точке $(8/39;35/52;19/156)$.

Из 1) и 2) получаем, что $\max\limits_{G} u = 1$ в точке $(0;0;1)$; $\min\limits_{G} u = -195/144$ в точке $(1/6;2/3;1/12)$.

*Ответ:* $\max\limits_{G} u = 1$ в точке $(0;0;1)$; $\min\limits_{G} u = -195/144$ в точке $(\frac{1}{6};\frac{2}{3};\frac{1}{12})$.

*2. Задачи на условное наибольшее и наименьшее значения функции.*

При решении задач этого типа исходная ситуация предполагается такой же, как и в §2. А именно, пусть $U$ — открытое множество в пространстве $\mathbb{R}^n$, $f \mid U \to \mathbb{R}$ — заданная функция, и пусть $F_1, \ldots, F_k \mid U \to \mathbb{R}$, где

$k < n$, — система заданных функций, удовлетворяющих тем же условиям, что и в §2. Через $D$ обозначается множество всех содержащихся в $U$ решений системы уравнений

$$F_1(x) = 0, F_2(x) = 0, \ldots, F_k(x) = 0.$$

**Определение.** Значение $f(x_0)$ функции $f$ в точке $x_0 \in D$ называется наибольшим (наименьшим) значением этой функции при наличии уравнений связи (3.1), если для любого $x \in D$ выполняется условие

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0)).$$

Точку $x_0$ в этом случае можно назвать точкой условного глобального максимума (условного глобального минимума) функции $f$; вместе эти точки будем называть точками условного глобального экстремума.

Очевидно, что если точка $x_0 \in D$ — точка условного глобального максимума (условного глобального минимума) функции $f$, то она тем более является точкой условного локального максимума (условного локального минимума) функции $f$. Отсюда вытекает следующий алгоритм нахождения точек условного глобального экстремума функции $f$.

## Алгоритм решения задач на условное наибольшее и наименьшее значение

1. Найти точки возможного условного локального экстремума функции $f$; наличие условного локального экстремума в этих точках устанавливать не обязательно.

2. Вычислить значение функции $f$ в найденных точках возможного условного локального экстремума.

3. Из вычисленных значений выбрать наибольшее и наименьшее, если они существуют. Наибольшее значение будет наибольшим значение функции $f$ при наличие уравнений связи (3.1), а наименьшее — наименьшим значением функции $f$ при наличие уравнений связи (3.1).

**Замечание.** Если множество $D$ всех решений системы уравнений (3.1) — компакт в $\mathbb{R}^n$, а функция $f$ непрерывна на $D$, то $f$ принимает на $D$ как наибольшее, так и наименьшее значение в некоторых точках (по второй теореме Вейерштрасса). Поэтому в этом случае можно гарантировать существование как точки условного глобального максимума, так и точки условного глобального минимума функции $f$.

Следующий пример иллюстрирует приведенный алгоритм.

**Пример.** Исследовать на наибольшее и наименьшее значения функцию $u(x, y, z) = x^2 - y^2 - 3z$, если $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Р е ш е н и е.

Уравнение связи $x^2+y^2+z^2=1$ задает в $\mathbb{R}^3$ сферу — компакт. Поэтому заданная функция на этой сфере обязательно принимает наибольшее и наименьшее значения. Находим их по приведенному выше алгоритму.

1. Находим точки возможного локального экстремума функции $u$. Они — критические точки функции Лагранжа

$$L(x,y,z)=x^2-y^2-3z+\lambda(x^2+y^2+z^2-1).$$

Для нахождения этих критических точек решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} L'_x=2x+2\lambda x=0, \\ L'_y=-2y+2\lambda y=0, \\ L'_z=-3+2\lambda z=0, \\ x^2+y^2+z^2=1. \end{cases}$$

Она имеет два решения:

$$\begin{cases} x_1=0 \\ y_1=0 \\ z_1=1 \\ \lambda_1=3/2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2=0 \\ y_2=0 \\ z_2=-1 \\ \lambda_2=-3/2. \end{cases}$$

Следовательно, точка $(0;0;1)$ — критическая точка функции Лагранжа с $\lambda=3/2$; $(0;0;-1)$ — критическая точка функции Лагранжа с $\lambda=-3/2$. Точки $(0;0;1)$ и $(0;0;-1)$ и будут точками возможного условного локального экстремума функции $u$.

2. Вычисляем значения функции $u$ в найденных точках: $u(0;0;1)=-3$; $u(0;0;-1)=3$.

3. Наибольшее из этих значений — значение в точке $(0;0;-1)$ ; оно и будет наибольшим значением функции $u$ при условии $x^2+y^2+z^2=1$. Наименьшее из них — значение в точке $(0;0;1)$ ; оно будет наименьшим значением заданной функции $u$ при условии $x^2+y^2+z^2=1$.

*Ответ:* $u_{max}=3$ в точке $(0;0;-1)$; $u_{min}=-3$ в точке $(0;0;1)$.

## Содержание

Публикуется в авторской редакции
Компьютерная верстка, макет Е.В. Соколовской

Подписано в печать 18.11.09. Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Печать оперативная.
Усл.-печ. л. 1,6, уч.-изд.л., 1,75. Гарнитура «Times New Roman». Тираж 100 экз. Заказ № 1783
Изд-во «Самарский университет», 443011, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.
Тел. 8 (846) 334-54-23
Отпечатано на УОП СамГУ