ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ПО ВЫСШЕМУ ОБРАЗОВАНИЮ

САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С. П. КОРОЛЕВА

ЗАДАЧИ
ПО ТЕХНИЧЕСКОЙ
ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

*Методические указания
к практическим занятиям*

САМАРА 1995

Составители: *Н. М. Галдина, С. А. Маркелов, В. В. Пахомов*

УДК.583.3

Задачи по технической электродинамике: Метод. указания к практич. занятиям /Самар. гос. аэрокосм. ун-т; Сост. *Н. М. Галдина, С. А. Маркелов, В. В. Пахомов.* Самара, 1995. 24 с.

В работе представлено свыше 100 задач, охватывающих все основные разделы курса "Техническая электродинамика".

Предназначены для студентов радиотехнических факультетов технических вузов, изучающих техническую электродинамику по программе спец. 2308. Подготовлены на кафедре "Радиотехника".

Печатаются по решению редакционно-издательского совета Самарского государственного аэрокосмического университета им. академика С. П. Королева

Рецензент В. А. Крючков

* * *

Настоящие методические указания содержат задачи по технической электродинамике, которые используются на практических занятиях в Самарском государственном аэрокосмическом университете (СГАУ).

Данная работа содержит как оригинальные задачи, разработанные в СГАУ, так и задачи, заимствованные из учебников и сборников задач по электродинамике. Включенные в сборник задачи наиболее полно удовлетворяют требованиям, характерным для технических вузов радиотехнических специальностей.

Содержание данной работы охватывает основные разделы курса "Техническая электродинамика". Каждый раздел сопровождается краткими теоретическими сведениями, позволяющими студентам при решении задач не обращаться к учебникам и справочной литературе.

Составители учебного пособия расположили задачи по возрастающей сложности таким образом, чтобы студенты могли при подготовке к занятиям отбирать задачи в соответствии со своим уровнем знаний. Следовательно, данная работа может быть использована и при самостоятельном контроле: если задача встречает затруднение, значит соответствующая часть курса усвоена недостаточно.

Составители весьма признательны В. А. Крючкову за прочтение данной работы в рукописи и обсуждение отдельных вопросов.

1. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

1.1. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Для вакуума вводят два основных векторных объекта — напряженность электрического поля $\overline{E}$ и напряженность магнитного поля $\overline{H}$. Кроме того, определяют скалярное поле объемной плотности электрического заряда ρ и векторное поле объемной плотности электрического тока $\overline{\delta}$, связанного с движением носителей заряда в пространстве. Система уравнений Максвелла для вакуума относительно перечисленных величин записывается в виде

$$\begin{cases} rot\,\overline{H} = \varepsilon_0 \dfrac{\partial \overline{E}}{\partial t} + \overline{\delta}, \\ rot\,\overline{E} = -\mu_0 \dfrac{\partial \overline{H}}{\partial t}, \\ div\,\overline{E} = \rho / \varepsilon_0, \\ div\,\overline{H} = 0. \end{cases} \qquad (1.1)$$

В эти уравнения входят две фундаментальные физические константы: $\varepsilon_0 = 10^{-9}\ /36\pi$ Ф/м — электрическая постоянная, $\mu_0 = 4\pi\ \ 10^{-7}$ Гн/м — магнитная постоянная.

К основным принципам электродинамики относится также закон сохранения электрического заряда, находящий свое отражение в уравнении непрерывности тока

$$div\,\overline{\delta} + \partial \rho / d\,t = 0. \qquad (1.2)$$

В присутствии материальных сред теория Максвелла должна быть дополнена рядом новых представлений, учитывающих микроскопическую структуру вещества. Под действием приложенного электрического поля $\overline{E}$ в среде возникает ток проводимости $\overline{\delta}$ с объемной плотностью

$$\overline{\delta} = \gamma_V \cdot \overline{E}. \tag{1.3}$$

Здесь γ_V — удельная объемная проводимость вещества.

Соотношение (1.3) есть дифференциальная форма записи закона Ома, пропорциональность между $\overline{\delta}$ и $\overline{E}$ в сильных электрических полях может нарушаться.

Молекулы или атомы вещества в электрическом поле испытывают поляризацию, что отображается в теории введением векторного поля электрической поляризованности $\overline{P}$. Данный вектор в каждой точке характеризует дипольный момент единицы объема вещества. Если электромагнитное поле изменяется во времени, то в среде возникает электрический ток поляризации с объемной плотностью

$$\overline{J}_{\text{пол}} = \frac{\partial \overline{P}}{\partial t}.$$

В каждой точке среды существует вектор электрической индукции

$$\overline{D} = \varepsilon_0 \overline{E} + \overline{P}. \tag{1.4}$$

В линейных и изотропных средах $\overline{P} \sim \overline{E}$ и соотношение (1.4) приобретает форму

$$\overline{D} = \varepsilon_{\text{a}} \cdot \overline{E}, \tag{1.5}$$

причем множитель ε_{a} получает наименование абсолютной диэлектрической проницаемости вещества.

Магнетизм материальных сред имеет квантовую природу. В рамках классических представлений определяют вектор намагниченности $\overline{M}$, являющийся магнитным моментом единицы объема вещества, и вектор магнитной индукции $\overline{B}$, связанный с $\overline{H}$ и $\overline{M}$ соотношением

$$\overline{B} = \mu_0 \left(\overline{H} + \overline{M} \right). \qquad (1.6)$$

В линейных и изотропных средах $\overline{M} \sim \overline{H}$ и соотношение (1.6) приобретает форму

$$\overline{B} = \mu_a \overline{H}, \qquad (1.7)$$

причем множитель μ_a получает наименование абсолютной магнитной проницаемости вещества.

Для отражения процессов, имеющих неэлектромагнитное происхождение, но порождающих электромагнитные поля и токи (конвективный перенос зарядов, трибоэлектрические эффекты, пьезоэлектрический и пьезомагнитный эффекты и т. п.), вводят понятия плотности стороннего электрического тока $\overline{\delta}_{\text{ст. э}}$ и плотности стороннего магнитного тока $\delta_{\text{ст. м}}$.

В результате система уравнений Максвелла для среды, заполненной веществом, принимает вид

$$\begin{cases} rot\ \overline{H} = \dfrac{\partial \overline{D}}{\partial t} + \gamma_V \overline{E} + \overline{\delta}_{\text{ст. э}}, \\ rot\ \overline{E} = -\dfrac{\partial \overline{B}}{\partial t} - \overline{\delta}_{\text{ст. м}}, \\ div\ \overline{D} = \rho, \\ div\ \overline{B} = 0, \\ div\ \overline{\delta} + \partial \rho / \partial t = 0. \end{cases} \qquad (1.8)$$

Если электромагнитные поля изменяются во времени по гармоническому закону с частотой ω, то система уравнений (1.8) может быть записана в комплексной форме относительно амплитуд векторов $\dot{\overline{E}}$, $\dot{\overline{D}}$, $\dot{\overline{H}}$, $\dot{\overline{B}}$ и сторонних токов $\dot{\overline{\delta}}_{\text{ст. э}}$, $\dot{\overline{\delta}}_{\text{ст. м}}$.

В результате система уравнений Максвелла в комплексной форме приобретает вид

$$
\begin{cases}
rot\,\dot{\overline{H}} = j\,\omega\,\tilde{\varepsilon}_{\text{а}}\,\dot{\overline{E}} + \dot{\overline{\delta}}_{\text{ст.э}}, \\
rot\,\dot{\overline{E}} = -\,j\,\omega\,\tilde{\mu}_{\text{а}}\,\dot{\overline{H}} - \dot{\overline{\delta}}_{\text{ст.м}}, \\
div\,\dot{\overline{D}} = \dot{\rho}, \\
div\,\dot{\overline{B}} = 0.
\end{cases}
\qquad (1.9)
$$

Входящие в эти уравнения комплексные диэлектрические $\tilde{\varepsilon}_{\text{а}}$ и магнитные $\tilde{\mu}_{\text{а}}$ проницаемости представлены в форме

$$
\begin{cases}
\tilde{\varepsilon}_{\text{а}} = \varepsilon'_{\text{а}} - j\,\varepsilon''_{\text{а}}, \\
\tilde{\mu}_{\text{а}} = \mu'_{\text{а}} - j\,\mu''_{\text{а}},
\end{cases}
\qquad (1.10)
$$

в которых мнимые части характеризуют необратимые превращения части энергии электромагнитного поля в энергию теплового движения. Выделение тепла может происходить как за счет токов проводимости, так и за счет внутреннего трения, сопровождающего процессы поляризации и перемагничивания.

Если потери в среде связаны только с наличием токов проводимости , то

$$
\begin{cases}
\tilde{\varepsilon}_{\text{а}} = \varepsilon_{\text{а}} - j\,\dfrac{\gamma_V}{\omega}, \\
\tilde{\mu}_{\text{а}} = \mu_{\text{а}}.
\end{cases}
\qquad (1.11)
$$

Для произвольных механизмов тепловых потерь энергии электромагнитного поля

$$
\begin{cases}
\tilde{\varepsilon}_{\text{а}} = \varepsilon_{\text{а}}\left(1 - j\,\mathrm{tg}\,\alpha_{\text{э}}\right), \\
\tilde{\mu}_{\text{а}} = \mu_{\text{а}}\left(1 - j\,\mathrm{tg}\,\alpha_{\text{м}}\right),
\end{cases}
\qquad (1.12)
$$

где величины $\alpha_{\text{э}}$ и $\alpha_{\text{м}}$ носят название углов диэлектрических и магнитных потерь соответственно.

Частной формой существования электромагнитного поля является плоская электромагнитная волна. Она существует в однородном пространстве, бесконечно протяженном, хотя бы по одной координате, и удовлетворяет уравнениям Гельмгольца

$$\begin{cases} \bar{\nabla}^2 \dot{\bar{E}} + k^2 \dot{\bar{E}} = 0, \\ \bar{\nabla}^2 \dot{\bar{H}} + k^2 \dot{\bar{H}} = 0. \end{cases} \tag{1.13}$$

Здесь

$$k = \omega \sqrt{\tilde{\varepsilon}_\text{a} \cdot \tilde{\mu}_\text{a}} = \beta - j\,\alpha \tag{1.14}$$

носит название комплексного коэффициента распространения; β — коэффициент фазы, α — коэффициент ослабления.

Если $\tilde{\mu}_\text{a} = \mu_0$, $\tilde{\varepsilon}_\text{a} = \varepsilon_\text{a}(1 - j\,\mathrm{tg}\,\alpha_\text{э})$,

то

$$\beta = \frac{2\pi\sqrt{\varepsilon}}{\lambda_0} \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha_\text{э}}}{2}}, \tag{1.15}$$

$$\alpha = \frac{2\pi\sqrt{\varepsilon}}{\lambda_0} \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\,\alpha_\text{э}}}{2}} = \beta \cdot \mathrm{tg}\left(\alpha_\text{э} / 2\right),$$

где λ_0 — длина плоской волны в вакууме.

Длина плоской волны λ (далее просто длина волны) есть расстояние, на котором фаза гармонических колебаний при распространении плоской волны изменяется на 2π:

$$\lambda = 2\pi / \beta. \tag{1.16}$$

Плоскость равных фаз плоской волны называется фазовым фронтом. Скорость перемещения фазового фронта волны называется фазовой скоростью

$$V_\text{ф} = \omega / \beta. \tag{1.17}$$

Комплексные амплитуды $\dot{\bar{E}}$ и $\dot{\bar{H}}$ в случае плоской волны пропорциональны друг другу

$$\dot{\bar{E}} = \tilde{Z}_\text{c} \cdot \dot{\bar{H}}, \tag{1.18}$$

причем множитель Z_c, называющийся характеристическим сопротивлением среды, связан с ее параметрами ε_a и μ_a соотношением

$$\tilde{Z}_\text{c} = \sqrt{\frac{\tilde{\mu}_\text{a}}{\tilde{\varepsilon}_\text{a}}}. \tag{1.19}$$

Если существуют две плоские волны $\dot{\overline{E}}_x = \dot{E}_x \cdot \overline{1}_x$ и $\dot{\overline{E}}_y = \dot{E}_y \cdot \overline{1}_y$, то в силу линейности уравнений Максвелла волна

$$\dot{\overline{E}} = \dot{E}_x \cdot \overline{1}_x + \dot{E}_y \cdot \overline{1}_y \qquad (1.20)$$

также является плоской.

В общем случае волна (1.20) называется волной с эллиптической поляризацией, т. к. конец вектора $\overline{E}$ в этом случае перемещается по некоторому эллипсу с эксцентриситетом $k_{эл}$, называемым коэффициентом эллиптичности.

Если $\dot{E}_x$ и $\dot{E}_y$ синфазны, то волна (1.20) носит название волны с линейной поляризацией.

Если $\dot{E}_x$ и $\dot{E}_y$ сдвинуты по фазе на $90°$ и равны по амплитуде, то $\dot{E}_y = \pm j \dot{E}_x$. Такая волна называется волной с круговой поляризацией. Различают следующие волны круговой поляризации:

$\dot{\overline{E}}_+ = \dot{E}\left(\overline{1}_x + j\,\overline{1}_y\right)$ — волна с правой поляризацией

и (1.21)

$\dot{\overline{E}}_- = \dot{E}\left(\overline{1}_x - j\,\overline{1}_y\right)$ — волна с левой поляризацией.

1.2. ЗАДАЧИ

1.1. Записать систему уравнений Максвелла для линейной среды.

1.2. Записать систему уравнений Максвелла для однородной среды.

1.3. Показать, что третье уравнение Максвелла является следствием первого уравнения и уравнения непрерывности.

1.4. Показать для комплексных амплитуд полей и среды без сторонних магнитных токов, что четвертое уравнение Максвелла является следствием второго уравнения.

1.5. Записать систему уравнений Максвелла в декартовой системе координат.

1.6. Показать, что вектор плотности полного тока $\dot{\bar{\delta}}_{\text{п}} = j\omega\tilde{\varepsilon}_a \dot{\bar{E}}$ в пространстве с неизменной ориентацией вектора $\dot{\bar{H}}$ перпендикулярен вектору $\dot{\bar{H}}$.

1.7. Пусть электромагнитное поле характеризуется неизменной ориентацией вектора $\bar{E}$. Показать, что векторы $\bar{E}$ и $\bar{B}$ перпендикулярны друг другу.

1.8. К какой группе сред относится морская вода $(\varepsilon_a = 81\varepsilon_0,\ \gamma_V = 3\,\text{См/м})$ на частотах 1 кГц, 1ГГц, 10ГГц?

1.9. На какой частоте медь можно считать диэлектриком?

1.10. Может ли существовать однородное магнитное поле без электрического поля?

1.11. Может ли существовать меняющееся во времени однородное электрическое поле без магнитного поля?

1.12. Может ли существовать меняющееся во времени однородное магнитное поле?

1.13. Найти сопротивление длинного однородного проводника с постоянным поперечным сечением S и длиной L. Удельное сопротивление материала проводника равно ρ, q распределение тока в объеме проводника постоянно.

1.14. Дан прямолинейный бесконечный провод круглого сечения радиуса R, по которому протекает ток I, равномерно распределенный по сечению проводника. Найти индукцию магнитного поля в произвольной точке пространства с проводником.

1.15. Решить задачу 1.14, если проводник имеет кольцевое сечение с радиусами R_1 и R_2.

1.16. Найти электрическое поле нити, равномерно заряженное с плотностью τ.

1.17. Найти поле точечного электрического заряда q.

1.18. Найти поле проводящего шара радиуса R, равномерно заряженного с плотностью σ.

1.19. Найти поле равномерно заряжённого с плотностью ρ диэлектрического шара радиуса R, материал которого имеет диэлектрическую проницаемость ε.

1.20. Дана идеально проводящая заряженная труба, сечение которой задано радиусами R_1 и R_2. Линейная плотность заряда τ. Определить напряженность электрического поля в произвольной точке пространства с трубой.

1.21. В идеально проводящую заполненную вакуумом трубу с внутренним радиусом R_1 вставлен идеально проводящий стержень радиуса R_2. Полагая систему проводников коаксиальной, определить напряженность электрического поля в пространстве между проводниками и погонную емкость получившегося конденсатора, если заряды проводников противоположны по знаку и имеют равную по абсолютной величине линейную плотность заряда τ.

1.22. Решить задачу 1.21, если пространство между проводниками заполнено двухслойным диэлектриком с границей раздела, заданной цилиндрической поверхностью $R_2 < R_п < R_1$. Слои диэлектрика имеют диэлектрические проницаемости ε_1 и ε_2.

1.23. В условиях задачи 1.21 найти магнитное поле в произвольной точке пространства, если внешняя труба имеет толщину t, токи (равные по абсолютному значению) текут по проводникам навстречу друг другу и равномерно распределены по сечению проводника.

1.24. Найти емкость сферического конденсатора, образованного сферами с радиусами R_1 и R_2, размещенными в безграничной диэлектрической среде с проницаемостью ε.

1.25. Найти емкость уединенного проводящего шара радиуса R, размещенного в вакууме.

1.26. Найти магнитное поле прямолинейной нити с током I, размещенной в вакууме.

1.27. Определить составляющие электрического поля плоской волны, если известна величина магнитного поля H и ориентация вектора $\overline{H}$, совпадающего с осью z декартовой системы координат.

1.28. Электромагнитное поле задано вектором магнитного поля

$$\overline{H} = 2\frac{a}{\lambda_b} H_0 \cdot \sin \pi \frac{x}{a} \cos \omega t \cdot \overline{1}_x + H_0 \cdot \cos \pi \frac{x}{a} \sin \omega t \cdot \overline{1}_z .$$

Определить геометрическое место точек круговой поляризации.

1.29. Показать, что коэффициент эллиптичности не изменяется при прохождении волной однородной изотропной среды с потерями.

1.30. Определить коэффициент эллиптичности волны с правой поляризацией H_1^+ и волны с левой поляризацией H_2^-, сдвинутых по фазе на угол φ.

1.31. Определить коэффициент эллиптичности плоской волны, образованной сложением вертикально поляризованной $\overline{H}_1 = H_0 \cdot \overline{1}_y$ и горизонтально поляризованной $\overline{H}_2 = 2\, H_0 \cdot e^{j\pi 12} \cdot \overline{1}_x$ волны.

1.32. Определить частоту, обеспечивающую фазовый набег $\Delta\varphi = 4\pi$ для плоской волны, прошедшей расстояние $\Delta Z = 3$ см в непроводящей среде с параметрами $\varepsilon = 4$, $\mu = 1$.

1.33. Какова величина набега фазы при распространении электромагнитной волны с $\lambda = 10$ см на расстоянии $Z = 2$ см?

1.34. Вычислить глубину проникновения волны с частотой 10 МГц в среду с параметрами $\mu = \mu_0$, $\varepsilon' = 100\,\varepsilon_0$, $\gamma_V = 2 \cdot 10^{-2}$ См/м.

1.35. Выбрать толщину листов для наборного сердечника трансформатора, работающего на частоте 50 Гц. Материал сердечника имеет параметры $\mu = 1000\,\mu_0$, $\gamma_V = 10^7$ См/м.

1.36. Определить фазовую скорость, длину волны, напряженность магнитного поля и коэффициент затухания для плоской однородной волны с частотой 100 МГц, распространяющейся в полиэтилене с параметрами $\varepsilon' = 2{,}2\,\varepsilon_0$, $\mathrm{tg}\alpha_э = 4 \cdot 10^{-4}$. Напряженность электрического поля в начале пути $E = 1$ мВ/м.

1.37. Решить задачу 1.36 для частоты 10 ГГц.

1.38. Определить затухание плоской волны частотой 100 кГц на пути 10 мкм в металле с $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$, $\gamma_V = 6 \cdot 10^7$ См/м.

1.39. Определить предельную плотность потока мощности, переносимой плоской волной в воздухе с пробивной прочностью 30 кВ/м.

1.40. Найти удельные потери в коаксиальной воздушной линии с радиусами проводников R_1 и R_2. Проводники медные, частота 1 ГГц.

1.41. Показать, что при полном отражении прошедшая волна не является поперечной.

1.42. Амплитуда напряженности магнитного поля волны, распространяющейся в воздухе, равна 0,1 А/м, частота — 10 МГц.

Определить мгновенную и среднюю плотности потока переносимой волной энергии.

1.43. Напряженность электрического и магнитного полей сферической волны в свободном пространстве описывается соотношениями

$$\overline{E} = \overline{1}_{\theta} \; \frac{A \cdot W_c \cdot \sin\theta}{r} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda}\right),$$

$$\overline{H} = \overline{1}_{\varphi} \; \frac{A \cdot \sin\theta}{r} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda}\right).$$

Показать, что в единице объема содержится одинаковое количество энергии электрического и магнитного полей.

1.44. Плоская линейно поляризованная по оси Z волна с частотой 10 МГц распространяется вдоль оси Y в несовершенном диэлектрике ($\gamma_V = 10^{-2}$ См/м, $\varepsilon' = 10\,\varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$). В точке $X = Y = Z = 0$ амплитуда напряженности электрического поля равна $5 \cdot 10^{-3}$ В/м. Численно показать, что среднее значение вектора Пойнтинга за период через замкнутую поверхность куба со стороны 1 м равно мощности тепловых потерь в объеме этого куба.

2. ПРОЦЕССЫ В ЛИНИЯХ ПЕРЕДАЧ

2.1. ЗАДАЧИ

2.1. Определить входное сопротивление линии длиной 11 см при длине волны 10 см, нагруженной на комплексное сопротивление 40— j 50 Ом. Волновое сопротивление линии — 50 Ом.

2.2. В условиях задачи 2.1 определить расстояние до ближайшего активного сечения и величину входного сопротивления в этом сечении.

2.3. Определить входное сопротивление линии длиной 12 см при длине волны 10 см, нагруженной на комплексное сопротивление 50 + j 25 Ом. Волновое сопротивление линии 50 Ом.

2.4. В условиях задачи 2.3 определить расстояние до ближайшего к нагрузке сечения с входным сопротивлением, равным 80— j 10 Ом.

2.5. Определить величину нагрузки линии передач с волновым сопротивлением 50 Ом, работающей при длине волны 10 см, если расстояние от сечения с входным сопротивлением 80 — j 10 Ом до нагрузки равно 3, 75 см.

2.6. Определить величину нагрузки линии передач с волновым сопротивлением 50 Ом, работающей на длине волны 10 см, если расстояние до ближайшего минимума напряжения равно 4 см, а коэффициент бегущей волны равен 0,2.

2.7. Определить величину нагрузки линии передач с волновым сопротивлением 50 Ом, работающей на длине волны 10 см, если расстояние до ближайшего максимума напряжения равно 4 см, а коэффициент бегущей волны равен 0,4.

2.8. Построить распределение напряжения вдоль линии передач с волновым сопротивлением 50 Ом, работающей на длине волны 10 см и нагруженной на сопротивление 50 + j 25 Ом. За единицу отсчета напряжения принять максимальное напряжение в линии передач.

2.9. Построить распределение тока вдоль линии передач с волновым сопротивлением 50 Ом, работающей на длине волны 10 см и нагруженной на сопротивление 50 + j 25 Ом. За единицу отсчета тока принять максимальный ток в линии передач.

2.10. С помощью параллельно включенного разомкнутого шлейфа согласовать нагрузку 50 + j 35 Ом с линией передач, имеющей волновое сопротивление 50 Ом и работающей на длине волны 10 см.

2.11. С помощью параллельно включенного короткозамкнутого шлейфа согласовать нагрузку 100 — j 50 Ом с линией передач, имеющей волновое сопротивление 100 Ом и работающей на длине волны 10 см.

2.12. С помощью последовательно включаемой емкости согласовать нагрузку 50 + j 90 Ом с линией передач, имеющей волновое сопротивление 50 Ом и работающей на длине волны 5 см.

2.13. С помощью последовательно включаемой индуктивности согласовать нагрузку 40 + j 40 Ом с линией передач, имеющей волновое сопротивление 50 Ом и работающей на длине волны 5 см.

2.14. С помощью параллельно включаемой индуктивности согласовать нагрузку 120 + j 100 Ом с линией передач, имеющей волновое сопротивление 50 Ом и работающей на длине волны 5 см.

2.15. С помощью параллельно включаемой емкости согласовать нагрузку 120 — j 100 Ом с линией передач, имеющей волновое сопротивление 50 Ом и работающей на длине волны 5 см.

2.16. Линия рассчитана на передачу 1 КВт мощности в режиме бегущей волны. Как изменится предельный уровень передаваемой мощности, если линию передач нагрузить на сопротивление 50 + j 50 Ом. Волновое сопротивление линии передач 50 Ом.

3. НАПРАВЛЯЮЩИЕ СИСТЕМЫ

3.1. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Под волноводом будем понимать проводящую трубу произвольного сечения, внутри которой могут распространяться электромагнитные волны. Наиболее часто применяются волноводы прямоугольного и круглого сечений.

В волноводах с идеально проводящими стенками могут распространяться волны электрического типа (E-типа, у которых продольная составляющая электрического поля $H_z \neq 0$, а продольная составляющая магнитного поля $H_z = 0$) и магнитного типа (H-типа, у которых $H_z \neq 0$, $E_z = 0$). Поскольку спектр волн дискретен, в обозначении конкретной волны ставятся 2 индекса по образцу E_{mn} или H_{mn}.

Каждый конкретный тип волны в волноводе может распространяться в том случае, если

$$\lambda_0 < \lambda_{\text{кр}} \sqrt{\varepsilon_r \cdot \mu_r}, \tag{3.1}$$

где λ_0 — длина волны генератора,

$\lambda_{\text{кр}}$ — параметр, называемый критической длиной волны,

ε_r, μ_r — параметры среды, заполняющей волновод.

Если $\lambda_{\text{кр}}^{mn} < \lambda_{\text{кр}}^{pq}$ (где m, n, p, q — индексы соответствующего типа волны), то волна с индексами m, n называется низшей по отношению к волне с индексами p, q. Самая низшая волна называется основной.

Для прямоугольного волновода

$$\lambda_{\text{кр}}^{mn} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}, \tag{3.2}$$

где a и b — наибольший и наименьший размеры сечения соответственно.

Для круглого волновода с волнами типа E_{mn}

$$\lambda_{\text{кр}}^{mn} = 2\pi R / \nu_{mn}, \tag{3.3}$$

где R — радиус волновода,

ν_{mn} — n-й корень функции Басселя порядка m, т. е. решение уравнения $J_m(\nu_{mn}) = 0$.

Для круглого волновода с волнами типа H_{mn}

$$\lambda_{кр}^{mn} = 2\pi R / \mu_{mn}, \tag{3.4}$$

где $J'(\mu_{mn}) = 0$,

$J'_m = \frac{d\,J_m(x)}{d\,x}$ — производная функции Бесселя.

Фазовая скорость волны в волноводе, заполненном непроводящей средой с μ_r и ε_r, определяется продольным волновым числом

$$h = \frac{2\pi}{\lambda_0}\sqrt{\varepsilon_r\,\mu_r - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2}. \tag{3.5}$$

Тогда фазовая скорость

$$V_{\text{ф}} = \omega / h. \tag{3.6}$$

Длина волны в волноводе

$$\lambda_{\text{в}} = 2\pi / h.$$

Характеристическим сопротивлением волновода называется отношение поперечных составляющих векторов $\overline{E}$ и $\overline{H}$, обозначаемое как $Z_{\text{в}}$.

Для волн типа E

$$Z_{\text{в}}^{E}=W_{\text{ср}}\sqrt{1-\left(\lambda/\lambda_{\text{кр}}\right)^{2}}. \tag{3.7}$$

Для волн типа H

$$Z_{\text{в}}^{H}=W_{\text{ср}}/\sqrt{1-\left(\lambda/\lambda_{\text{кр}}\right)^{2}}. \tag{3.8}$$

В (3.7)—(3.8) $W_{\text{ср}}=\sqrt{\dfrac{\mu}{\varepsilon}}$, где μ, ε — параметры среды, заполняющей волновод.

Если максимальная напряженность электрического поля волны, бегущей в волноводе, равна E_0, то мощность, переносимая волной, рассчитывается по формулам:

для прямоугольного волновода сечением $a\times b\left(a>b\right)$ на волне H_{10}

$$P=\frac{ab\sqrt{1-\left(\lambda/2a\right)^{2}}}{4W_{\text{ср}}}E_0^2, \tag{3.9}$$

для круглого волновода с радиусом R и волной H_{11}

$$P=\frac{\pi R^2 E_0^2}{4{,}28\cdot W_{\text{ср}}}\sqrt{1-\left(\lambda/3{,}41R\right)^{2}}. \tag{3.10}$$

Если поверхностное сопротивление стенки волновода равно R_S, то *коэффициент ослабления волны* h' в волноводе определяется по формулам:

для прямоугольного волновода сечением $a\times b\left(a>b\right)$ на волне H_{10}

$$h'=\frac{R_S\left[1+\left(\dfrac{\lambda}{2a}\right)^{2}\dfrac{2b}{a}\right]}{W_{\text{ср}}\cdot b\sqrt{1-\left(\dfrac{\lambda}{2a}\right)^{2}}}, \tag{3.11}$$

на волне H_{mn} $(n>0)$

$$h' = \frac{2R_S}{W_{\text{ср}} \cdot b\sqrt{1-\left(\lambda/\lambda_{\text{кр}}\right)^2}}\left\{\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2 +\right.$$

$$\left. + \frac{\frac{b}{a}\left(\frac{b}{a}n^2+m^2\right)}{\frac{b^2 \cdot n^2}{a^2}+m^2}\left[1-\left(\lambda_0/\lambda_{\text{кр}}\right)^2\right]\right\}, \qquad (3.12)$$

на волне E_{mn}

$$h' = \frac{2R_S\left[h^2\left(\frac{b}{a}\right)^2+m^2\right]}{W_{\text{ср}} \cdot b\left[n^2\left(\frac{b}{a}\right)^2+m^2\right]\sqrt{1-\left(\lambda/\lambda_{\text{кр}}\right)^2}}; \qquad (3.13)$$

для круглого волновода радиуса R и для волн H_{mn}

$$h' = \frac{R_S}{W_{\text{ср}} \cdot R\sqrt{1-\left(\lambda/\lambda_{\text{кр}}\right)^2}}\left[\left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}}\right)^2+\frac{m^2}{\mu_{mn}^2-m^2}\right], \qquad (3.14)$$

для волны E_{mn}

$$h' = \frac{R_S}{W_{\text{ср}} \cdot R\sqrt{1-\left(\lambda/\lambda_{\text{кр}}\right)^2}}. \qquad (3.15)$$

Для передачи энергии электромагнитных волн часто применяется направляющая систем из 2 коаксиальных цилиндров (коаксиальная линия).

Основной волной коаксиальной линии является чисто поперечная волна типа T с $\lambda_{\text{кр}}=\infty$. Ближайшая к ней высшая волна — волна типа H с

$$\lambda_{кр} = \pi\left(R_1+R_2\right), \qquad (3.16)$$

где R_1 и R_2 $(R_1 < R_2)$ — радиусы проводников коаксиальной линии.

Коаксиальная линия характеризуется волновым сопротивлением (I и U — ток и напряжение соответственно)

$$\rho = \frac{U_m}{I_m} = \frac{W_{\text{ср}}}{2\pi} \ln R_2 / R_1. \tag{3.17}$$

Напряженность магнитного поля на расстоянии r от оси коаксиальной линии

$$\overline{H}_m = \overline{1}_\alpha \frac{I_m}{2\pi r}, \tag{3.18}$$

где I_m — амплитуда тока в линии.

Напряженность электрического поля на расстоянии r от оси коаксиальной линии

$$\overline{E}_m = \overline{1}_r \frac{U_m}{r \cdot \ln(R_2 / R_1)}, \tag{3.19}$$

где U_m — амплитуда напряжения в линии.

Затухание основной волны в коаксиальной линии, заполненной диэлектриком с параметрами ε', μ, σ и образованной проводниками с поверхностным сопротивлением R_S, находится по формуле

$$h' = \frac{\gamma_V}{2}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon'}} + \frac{R_S(R_1 + R_2)}{2W_{\text{ср}} \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot \ln \frac{R_2}{R_1}}. \tag{3.20}$$

3.2. ЗАДАЧИ

3.1. Определить, какие типы волны могут распространяться в заполненном воздухом прямоугольном волноводе сечением 2,5x5 см^2 на частоте 7,5 ГГц.

3.2. Определить для идеального волновода сечением 2,3x1 см^2 длину волны, на которой произойдет пробой волновода, если волновод заполнен воздухом (E_{max} = 29 кВ/см), а передаваемая мощность равна 700 кВт.

3.3. Показать, что в волне основного типа прямоугольного волновода центр семейства магнитных линий совпадает с максимумом тока смещения.

3.4. Ввиду того, что поперечные и продольные компоненты поля направляемой волны сдвинуты по фазе на $90°$, в прямоугольном волноводе могут существовать точки с круговой поляризацией магнитного поля. Найти геометрическое место этих точек на основном типе волны.

3.5. Волна H_{11} распространяется в пустом круглом волноводе радиуса 5 мм. Найти длину волны в волноводе, фазовую и групповую скорость для частоты 20 ГГц.

3.6. Мощность, передаваемая волной основного типа круглого волновода, равна 1 Вт. Найти амплитуду вектора $\bar{E}$, если радиус волновода равен 7,5 мм, а частота 16,6 ГГц.

3.7. Показать, что в круглом волноводе не может существовать волн типа H_{m0}.

3.8. Показать, что в круглом волноводе не может существовать волн типа E_{m0}.

3.9. Вычислить затухание основной волны прямоугольного волновода сечением 4,5x2 $см^2$, заполненного полистиролом ($\varepsilon' = 2{,}6\ \varepsilon_0$; $\varepsilon'' = 5 \cdot 10^{-4}\ \varepsilon_0$). Волновод выполнен из меди ($\gamma_V = 5{,}65 \cdot 10^7$ См/м) и работает на частоте 3 ГГц.

3.10. Круглый волновод радиуса 1,2 см сделан из алюминия ($\gamma_V = 3{,}54 \cdot 10^7$ См/м) и заполнен вакуумом. Найти затухание его основной волны на частоте 10 ГГц.

3.11. Во сколько раз затухание волны H_{01} больше затухания волны H_{11} пустого круглого волновода радиуса 2,8 см, выполненного из меди ($\gamma_V = 5{,}65 \cdot 10^7$ См/м), если работа ведется на частоте 7,5 ГГц.

3.12. В приближении электростатики получить соотношение для погонной емкости коаксиальной линии.

3.13. В приближении магнитостатики получить соотношение для погонной индуктивности коаксиальной линии.

3.14. Рассчитать размеры коаксиальной линии с волновым сопротивлением 50 Ом, если наивысшая рабочая частота равна 1 ГГц.

3.15. Какова наивысшая рабочая частота коаксиальной линии с размерами $R_1 = 5$ см, $R_2 = 10$ см?

3.16. По коаксиальной линии с волновым сопротивлением 50 Ом передается мощность 10 Вт. Найти амплитуды E_m и H_m поля в линии.

3.17. Определить предельно допустимый СВЧ-ток, который может передаваться в условиях задачи 3.16.

4. ВОЗБУЖДЕНИЕ ВОЛНОВОДОВ И ЭЛЕМЕНТЫ СВЯЗИ

4.1. ЗАДАЧИ

4.1. Для отбора части мощности используется Т-образное соединение основного (размер поперечного сечения 23х10 мм^2) и вспомогательного (размеры 23х5 мм^2) волноводов в плоскости E.

Вспомогательный волновод расположен так, что $x = a / 4$, $\varphi = 0$, $l = 0{,}2a$. Определить ширину прямоугольной цели, если требуемое затухание при передаче мощности из основного во вспомогательный волновод равно 68,7 дБ, а рабочая длина волны равна 3,2 см.

4.2. Рассчитать изменение затухания, если края щели шириной 0,14а сделать скругленными. Остальные размеры и длина волны соответствуют условию задачи 4.1.

4.3. Как изменится затухание, если щель будет перпендикулярно узкой к стенке основного волновода ($\varphi = 90°$).

Размеры и длина волны соответствуют условию задачи 4.1. Ширина щели равна 0,14а.

4.4. В круглом волноводе возбуждаются две ортогональные моды H_{11} равной амплитуды с помощью Т-образного соединения с основным прямоугольным волноводом.

Прямоугольный волновод имеет сечение размером 23х10 мм^2 , круглый волновод имеет радиус $R = 0{,}59$а $= 13{,}6$ мм и возбуждается круглым отверстием с диаметром $d = 0{,}2$а $\approx R/3$ ($d = 4{,}6$ мм).

Определить уровень возбуждаемой моды относительно уровня мощности в основном волноводе, если x = а/4 и рабочая длина волны 3,2 см.

4.5. Для подавления моды H_{11} с вектором E, перпендикулярным плоскости узкой стенки питающего волновода в задаче 4.4 вместо круглого отверстия используется прямоугольная щель с l = 0,2а и φ = 0.

Определить уровень возбуждаемой моды H_{11} с вектором, параллельным плоскости узкой стенки, если ширина щели равна 0,14а, а остальные размеры и длина волны соответствуют условиям задачи 4.4.

4.6. Для условий задачи 4.5 определить развязку двух ортогональных мод H_{11}, возбуждаемой в круглом волноводе.

4.7. Как изменится в условиях задачи 4.5 развязка двух ортогональных мод, если круглый волновод сдвинуть ближе к плоскости симметрии основного волновода так, что x = 0,4а?

4.8. Чему равен уровень возбуждаемой моды в условиях задачи 4.7?

4.9. Как изменится развязка двух ортогональных мод в условиях задачи 4.5, если щель сделать скругленной?

4.10. Как изменится уровень возбуждаемой моды в условиях задачи 4.5, если щель сделать скругленной (как в задаче 4.9)?

4.11. Волновод сечением 33х4 мм^2 возбуждается штырем. Волновое сопротивление питающей коаксиальной линии равно 50 Ом.

Толщина возбуждающего штыря, установленного в сечении $d = a/2$, равна 0,2а. Определить уровень возбуждения моды H_{10} в прямоугольном волноводе при работе на длине волны λ = 3,2 см.

4.12. Определить уровень возбуждения моды H_{10}, если толщина штыря 0,10а. Остальные данные соответствуют данным задачи 4.11.

4.13. Определить коэффициент влияния диаметра штыря на уровень возбуждения моды H_{10} в условиях задачи 4.11.

4.14. Определить коэффициент влияния абсциссы установки штыря d на уровень возбуждения моды H_{10} в условиях задачи 4.11.

4.15. Определить коэффициент влияния волнового сопротивления на уровне возбуждения моды H_{10} в условиях задачи 4.11.

ЗАДАЧИ ПО ТЕХНИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Составители: *Галдина Нина Михайловна*
Маркелов Сергей Александрович
Пахомов Вячеслав Васильевич

Редактор Т. И. Кузнецова
Техн. редактор Н. М. Каленюк
Корректор Т. И. Щелокова

Подписано в печать 10.08.95. Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл.печ.л. 1,4. Уч.-изд.л. 1,5.
Усл.кр.-отт. 1,5. Тираж 150 экз. Заказ 19. Арт. С—56 мр/95.

Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С. П. Королева.
443086 Самара, Московское шоссе, 34

Издательство Самарского государственного аэрокосмического университета. 443001 Самара, ул. Ульяновская, 18.