

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»**

**ЧАСТОТНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ  
МЕДИЦИНСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ**

*Методические указания к лабораторной работе*

САМАРА 2016

УДК 57.087

Составители: А.А. Федотов, С.А. Акулов, А.С. Акулова

**Частотная фильтрация ультразвуковых медицинских изображений:**  
Метод. указания / – Самар. нац. исследов. ун-т.; сост. А.А. Федотов,  
С.А. Акулов, А.С. Акулова; Самара, 2016. 23 с.

В методических указаниях изложены основные методы обработки биомедицинских изображений в частотной области с использованием возможностей математического программного пакета MATLAB. Рассмотрено применение типовых методов частотной фильтрации исходных биомедицинских изображений. Приведены порядок выполнения работы и требования к отчету.

Методические указания предназначены для студентов, обучающихся по специальности 12.03.04 «Биотехнические системы и технологии» и выполняющих лабораторные работы по дисциплине «Методы и средства ультразвуковых исследований». Подготовлены на кафедре лазерных и биотехнических систем.

Ил. 10. Библиогр. 2 назв.

Рецензент: И.А. Кудрявцев

**Цель работы:** изучение методов частотной фильтрации биомедицинских изображений с использованием возможностей пакета компьютерных вычислений MATLAB.

## 1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РАБОТЫ

### 1.1 Введение в Фурье-анализ

Частотные методы улучшения изображений основаны на выполнении преобразования Фурье над функцией двух переменных – функцией дискретного изображения. Прямое дискретное Фурье-преобразование функции  $f(x, y)$ , изображения размером  $M \times N$ , задается равенством:

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-i2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)}$$

где:  $u=0, 1, 2, \dots, M-1$ ;  $v=0, 1, 2, \dots, N-1$

Обратное преобразование Фурье определяется выражением:

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{i2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)}$$

Переменные  $u$  и  $v$  называются переменными преобразования или частотными переменными, а переменные  $x$  и  $y$  называются пространственными переменными или переменными изображения. Как правило, числа  $M$  и  $N$  являются четными для упрощения компьютерной реализации, а центр Фурье образа находится в точке с координатами:  $u=(M/2)+1$ ,  $v=(N/2)+1$ . Значение Фурье-преобразования в точке  $(u, v)=(0, 0)$  равно:

$$F(0,0) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y)$$

Таким образом, если  $f(x, y)$  – изображение, то значение Фурье-преобразования в начале координат равно среднему значению яркости на изображении. Поскольку началу координат отвечают нулевые частоты, то величину  $F(0, 0)$  часто называют постоянной составляющей спектра. В силу того, что функция  $f(x, y)$  вещественная, то спектр Фурье-преобразования

изображения обладает свойством симметрии. Справедливы следующие соотношения между отсчетами в пространственной и частотной области:

$$\Delta u = \frac{1}{M\Delta x}, \quad \Delta v = \frac{1}{N\Delta y}$$

Фурье-спектр изображения состоит из пикселей, имеющих большой динамический диапазон яркости. Система воспроизведения изображений, как правило, не способна правильно отобразить столь большой диапазон значений интенсивности, что приводит к тому, что при обычном отображении спектра Фурье теряется значительное число деталей. В этой связи для улучшения зрительного восприятия полутонов, изображение спектра подвергается логарифмическому преобразованию.

На рисунке 1 приведено изображение, представляющее собой белый прямоугольник размерами  $20 \times 40$  пикселей, наложенный на черный фон размерами  $512 \times 512$  пикселей, а также представлен центрированный Фурье спектр изображения. Для того, чтобы центрировать спектр необходимо исходное изображение умножить на  $(-1)^{x+y}$  перед вычислением Фурье-преобразования.

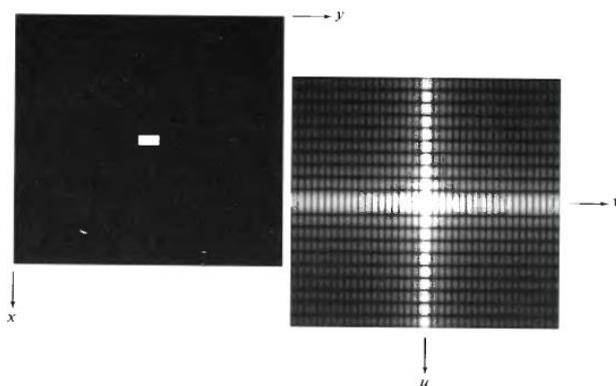


Рисунок 1 – Слева – изображение белого прямоугольника размерами  $20 \times 40$  пикселей на черном фоне размерами  $512 \times 512$  пикселей, справа – центрированный Фурье-спектр, представленный после применения логарифмического преобразования

## 1.2 Основы частотной фильтрации

Частотная область цифрового изображения представляет собой не что иное, как пространство, в котором принимают значения переменные  $(u, v)$  Фурье-преобразования. Как известно частота сигнала прямо связана со скоростью изменения сигнала, поэтому интуитивно понятно, что частоты в Фурье-преобразовании связаны с вариацией яркости на изображении. Наиболее медленно меняющаяся (постоянная) частотная составляющая ( $u=0, v=0$ ) совпадает со средней яркостью изображения. Низкие частоты, соответствующие точкам вблизи начала координат Фурье-преобразования, определяют медленно меняющиеся компоненты изображения. По мере удаления от начала координат, более высокие частоты начинают соответствовать все более и более быстрым изменениям яркости, представляющие собой границы объектов и другие детали изображения, характеризующиеся резкими изменениями яркости, например шум на изображении.

Процедура фильтрации изображения в частотной области состоит из следующих шагов:

1. Исходное изображение умножается на  $(-1)^{x+y}$ , чтобы его Фурье преобразование оказалось центрированным.
2. Вычисляется прямое дискретное преобразование Фурье (ДПФ)  $F(u, v)$  исходного изображения.
3. Функция  $F(u, v)$  умножается на функцию фильтра  $H(u, v)$ .
4. Вычисляется обратное ДПФ от результата шага 3.
5. Выделяется вещественная часть результата шага 4.
6. Результат шага 5 умножается на  $(-1)^{x+y}$ .

Функция фильтра  $H(u, v)$  или передаточная характеристика фильтра подавляет некоторые частоты преобразования, оставляя другие при этом без изменения. На рисунке 2 представлена структурная схема, включающая основные этапы проведения фильтрации изображения в частотной области.

На стадии предварительной обработки помимо умножения изображения на  $(-1)^{x+y}$ , могут применяться операции яркостного масштабирования, нормировка размеров исходного изображения, преобразование формата входных данных в формат с плавающей точкой и ряд других.

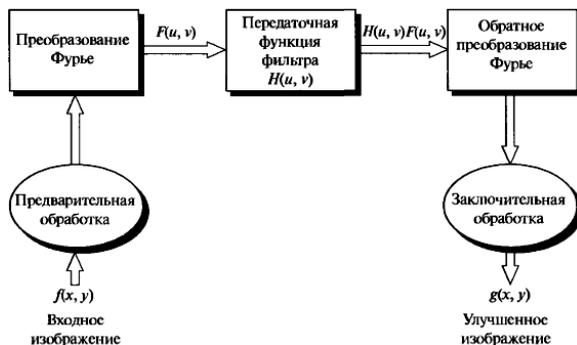


Рисунок 2 – Основные этапы фильтрации изображения в частотной области

### 1.3 Основные частотные фильтры и их свойства

Основными видами используемых фильтров являются: низкочастотный фильтр – ослабляет высокие частоты, одновременно, пропуская низкие частоты; высокочастотный фильтр – фильтр, обладающий противоположными свойствами. Низкие частоты Фурье-преобразования отвечают за возникновение превалирующих значений яркости на гладких участках изображения, в то время как высокие частоты отвечают преимущественно за контуры и шум. После применения низкочастотной фильтрации изображение, по сравнению с исходным изображением, содержит меньше резких деталей. После применения высокочастотной фильтрации на изображении уменьшаются изменения яркости в пределах больших гладких областей и выделяются переходные зоны быстрого изменения яркости, то есть контуры изображения, как правило, такое изображение обладает большей резкостью по сравнению с исходным.

В силу того, что высокочастотные фильтры почти полностью подавляют постоянную составляющую  $F(0, 0)$ , которая определяет среднюю яркость изображения, выходное изображения после обработки таким фильтром выглядит очень темным, для устранения указанного недостатка к передаточной функции фильтра добавляют константу, равную половине высоты фильтра.

Другим видом частотного фильтра является фильтр-пробка или режекторный фильтр, вырезающий определенное значения яркости из изображения, как правило, это значение яркости в точке начала координат – среднее

значение яркости изображения. Среднее значения яркости изображения не может быть строго равно нулю, поскольку для этого некоторые элементы изображения должны содержать отрицательные значения, а средства отображения графической информации не могут оперировать с отрицательными значениям яркости. Для устранения указанного противоречия наименьшее отрицательное значение приравнивают к нулю (уровень черного), а остальные значения пропорционально увеличивают.

#### ***1.4 Сглаживающие частотные фильтры***

Как отмечалось ранее, контуры и другие резкие перепады яркости на изображении, включая шумы, вносят значительный вклад в высокочастотные составляющие его Фурье-преобразования. Сглаживание изображения в частотной области достигается путем ослабления высокочастотных компонент определенного диапазона Фурье-образа данного изображения.

Модель фильтрации изображения в частотной области в обобщенном виде может быть описана следующим равенством:

$$G(u, v) = H(u, v) \cdot F(u, v)$$

где:  $F(u, v)$  – Фурье-образ изображения, которое подлежит операции фильтрации,  $H(u, v)$  – передаточная функция фильтра, которая ослабит высокочастотные компоненты  $F(u, v)$  и сформирует функцию  $G(u, v)$ .

Рассмотрим три вида низкочастотных фильтров: идеальный фильтр, фильтр Баттерворта и гауссов фильтр. Указанные фильтры по виду передаточной функции покрывают диапазон от очень резких фильтров (идеальный фильтр) до очень гладких фильтров (гауссов фильтр).

Фильтр Баттерворта является единственным из рассматриваемых, который характеризуется порядком фильтра – параметром, определяющим крутизну передаточной функции фильтра. При малых значениях порядка фильтра передаточная функция имеет гладкую форму, близкую по форме к передаточной характеристике гауссова фильтра; при высоких значениях фильтр характеризуется крутой передаточной функцией и приближается по форме к характеристикам идеального фильтра.

##### ***1.4.1 Идеальные фильтры низких частот***

Идеальный фильтр низких частот представляют собой такой низкочастотный фильтр, который обрезает все высокочастотные составляющие

Фурье-образа, находящиеся на большем расстоянии от начала координат центрированного изображения, чем некоторое заданное расстояние  $D_0$ . Такой тип фильтра еще называется двумерным идеальным низкочастотным фильтром и имеет передаточную функцию:

$$H(u, v) = \begin{cases} 1, & \text{при } D(u, v) \leq D_0 \\ 0, & \text{при } D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

где  $D_0$  – заданная неотрицательная величина, точка профиля фильтра, в которой совершается переход от значений  $H(u, v)=1$  к значениям  $H(u, v)=0$ , называемая частотой среза;  $D(u, v)$  – расстояние от точки  $(u, v)$  до начала координат – центра частотного прямоугольника. В силу того, что Фурье-преобразование центрировано, расстояние  $D(u, v)$  определяется по формуле:

$$D(u, v) = [(u - m/2)^2 + (v - n/2)^2]^{0,5}$$

где:  $M$  и  $N$  – размеры исходного изображения.

На рисунке 3 представлен идеальный низкочастотный фильтр в виде изображения, а также радиальный профиль фильтра:

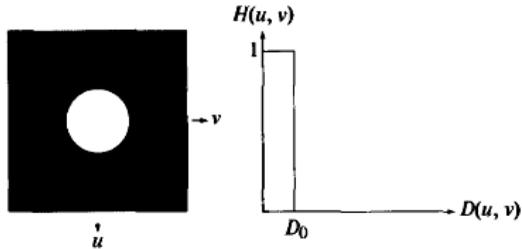


Рисунок 3 – слева: представление идеального низкочастотного фильтра в виде изображения, справа: радиальный профиль фильтра

Идеальность фильтра подчеркивается тем, что все частоты внутри круга радиуса  $D_0$  проходят без изменения, в то время как частоты вне круга подавляются полностью. Низкочастотный идеальный фильтр обладает свойством симметрии относительно начала координат, поэтому для того, чтобы однозначно задать фильтр достаточно построить один радиальный профиль – функция расстояния от начала координат. Передаточная функция фильтра в координатах  $H(u, v)$  получается вращением профиля на  $360^\circ$  вокруг начал координат.

Одним из способов выбора эталонного набора положений частот среза состоит в том, чтобы определить круги, в которых заключена заданная часть

полной энергии изображения  $P_T$ . Полная энергия будет определена как сумма компонент энергетического спектра во всех точках  $(u, v)$ ;  $u=0, 1, 1 \dots M-1$ ;  $v=0, 1, 1 \dots N-1$ .

$$P_T = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} P(u, v)$$

где величина  $P(u, v)$  определяется как:

$$P(u, v) = |F(u, v)|^2$$

где  $F(u, v)$  – Фурье-преобразование исходного изображения  $f(x, y)$ .

Частота  $r(\alpha)$  определяется как радиус круга с центром в центре частотного прямоугольника, содержащего  $\alpha$  процентов энергии спектра изображения, т.е.:

$$\alpha = 100 \frac{\sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} P(u, v)}{P_T}$$

Выбор неоптимального значения частоты среза фильтра может привести к значительным искажениям обрабатываемого изображения: выбор слишком малого значения частоты среза приведет к устранению большинства деталей изображения. В то время как выбор относительно большого значения частоты среза приведет к тому, что выходное изображение будет незначительно отличаться от исходного, при этом уровень шума также не изменится.

При использовании идеального фильтра низких частот возникают нежелательные эффекты, такие как эффекты размывания и появления ложных контуров, при этом при уменьшении ширины используемого фильтра в частотной области эффекты размытия изображений усиливаются.

Возникающие нежелательные эффекты при использовании идеального фильтра низких частот получили название “звон” (или эффект Гиббса), выражающийся в появлении ложных контуров вокруг реальных контуров. Структура ложных контуров становится тоньше по мере уменьшения энергии отсекаемой высокочастотной составляющей.

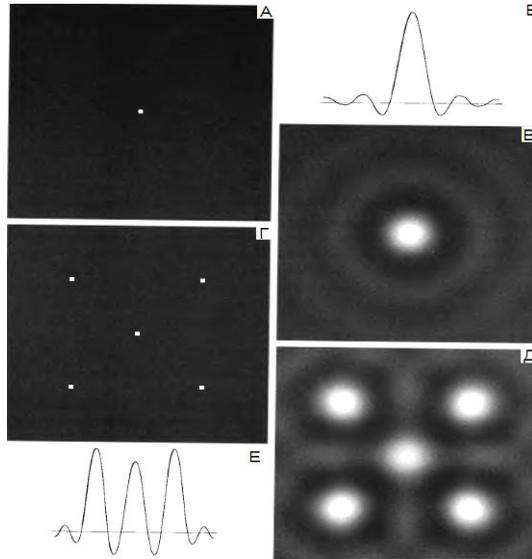


Рисунок 4 – А – изображение идеального фильтра низких частот, Б – профиль яркости в пространственной области, В – изображение идеального низкочастотного фильтра в пространственной области, Г – условное изображение, состоящее из 5 ярких точек в пространственной области, Д – свертка изображений В и Г, Е – профиль яркости отфильтрованного изображения Д

Природа появления ложных контуров может быть объяснена при помощи теоремы о свертке, согласно которой, существует пространственный аналог идеального фильтра низких частот. Пространственная функция такого фильтра может быть определена с помощью обратного преобразования Фурье от передаточной функции низкочастотного фильтра и представляет собой последовательность круговых концентрических колец различной яркости, приводящих главным образом к появлению ложных контуров: рисунок 4 иллюстрирует проявление эффекта Гиббса при использовании идеального фильтра низких частот.

Под понятием профиль яркости подразумевается зависимость изменения яркости пикселей от номера пикселей, расположенных на горизонтальной прямой, как правило, проходящей через центр изображения; отсчет пикселей по прямой начинается с крайнего левого пикселя и заканчивается крайним правым пикселем.

Таким образом, приведенные результаты фильтрации с помощью идеального низкочастотного фильтра показывают, что идеальные фильтры низких частот не имеют большого практического применения.

### 1.4.2 Фильтры низких частот Баттерворта

Передаточная функция низкочастотного фильтра Баттерворта порядка  $n$  с частотой среза на расстоянии  $D_0$  от начала координат задается формулой:

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D(u, v) / D_0]^{2n}}$$

Радиальные профили передаточной функции низкочастотного фильтра Баттерворта в зависимости от порядка фильтра представлены на рисунке 5.

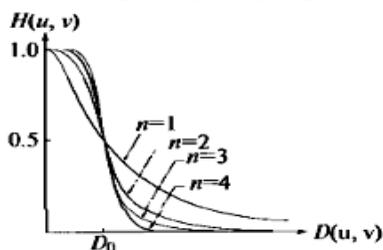


Рисунок 5 – Радиальные профили передаточной функции низкочастотного фильтра Баттерворта в зависимости от порядка фильтра

В отличие от идеального низкочастотного фильтра передаточная функция низкочастотного фильтра Баттерворта не имеет разрыва, который устанавливает точную границу между пропускаемыми и обрезаемыми частотами. К преимуществам низкочастотных фильтров Баттерворта относится намного меньшее проявление нежелательных эффектов размытия и появления ложных контуров, по сравнению с идеальными низкочастотными фильтрами. С увеличением порядка низкочастотного фильтра Баттерворта возрастает проявление эффектов размытия, принято считать, что низкочастотный фильтр Баттерворта второго порядка является оптимальным с точки зрения компромисса между эффективностью низкочастотной фильтрации и приемлемым уровнем проявления ложных контуров и общего размытия изображения.

На рисунке 6 приведены профили яркости изображений низкочастотных фильтров Баттерворта с одинаковой частотой среза порядка 1, 2, 5 и 20 соответственно.

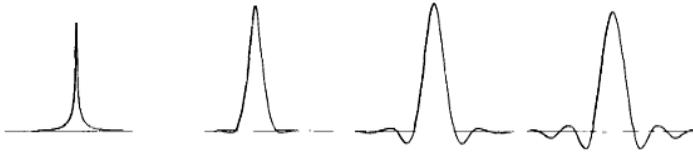


Рисунок 6 – слева направо: профили яркости низкочастотных фильтров Баттерворта с одинаковой частотой среза порядка 1, 2, 5 и 20 соответственно

### 1.4.3 Гауссовы фильтры низких частот

В двумерном случае гауссовы фильтры низких частот задаются формулой:

$$H(u, v) = e^{-\frac{D^2(u, v)}{2\sigma^2}}$$

где  $D_0$  – частота среза фильтра.

При величине  $D(u, v) = D_0$ , значение передаточной функции фильтра составляет 0,667 от своего максимального значения. На рисунке 7 приведены радиальные профили гауссова фильтра при различных значениях  $D_0$ .

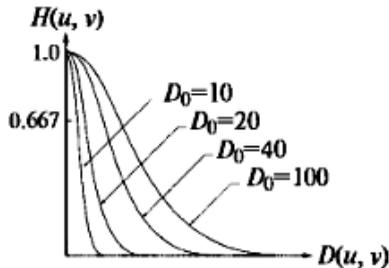


Рисунок 7 – Радиальные профили передаточной функции низкочастотного гауссова фильтра при различных значениях частоты среза  $D_0$

Как известно, обратное преобразование Фурье от гауссовой функции является также гауссовой функцией. Пространственный гауссов фильтр низких частот, полученный с помощью обратного преобразования Фурье от передаточной функции частотного гауссова фильтра, будет положительным, и не будет иметь концентрических колец, что приведет к полному отсутствию

проявлений эффекта Гиббса на обрабатываемом изображении, что является основным преимуществом гауссовых низкочастотных фильтров по сравнению с фильтрами Баттерворта. Тем не менее, применение низкочастотного гауссова фильтра обеспечивает зачастую меньшее сглаживание при одинаковой частоте среза по сравнению с фильтрами Баттерворта, поэтому в тех случаях, когда требуется жесткий контроль переходной зоны от низких частот к высоким частотам, фильтры Баттерворта представляются более подходящим выбором. В задачах обработки биомедицинских изображений отсутствие ложных контуров и недопустимость проявления артефактов любого рода предпочтительным является использование гауссовых фильтров.

### ***1.5 Частотные фильтры повышения резкости***

Контурные и другие скачкообразные изменения яркости на изображении связаны с высокочастотными составляющими Фурье-преобразования изображения. Повышение резкости изображения может быть достигнуто в частотной области при помощи процедуры высокочастотной фильтрации, которая подавляет низкочастотные составляющие и не затрагивает высокочастотную часть Фурье-преобразования.

Передаточная функция высокочастотных фильтров может быть получена при помощи следующего соотношения:

$$H_{hp}(u, v) = 1 - H_{lp}(u, v)$$

где:  $H_{lp}(u, v)$  – передаточная функция соответствующего низкочастотного фильтра.

Рассмотрим следующие виды высокочастотных фильтров: идеальные высокочастотные фильтры, высокочастотные фильтры Баттерворта и гауссовы высокочастотные фильтры.

#### ***1.5.1 Идеальные фильтры высоких частот***

Двумерные идеальные высокочастотные фильтры определяются формулой:

$$H(u, v) = \begin{cases} 0, & \text{при } D(u, v) \leq D_0 \\ 1, & \text{при } D(u, v) > D_0 \end{cases}$$

где  $D_0$  – частота среза,  $D(u, v)$  – расстояние от точки с координатами  $(u, v)$  до центра частотного прямоугольника (начала координат).

На рисунке 8 приведен радиальный профиль передаточной функции идеального высокочастотного фильтра, функция идеального высокочастотного фильтра в пространственной области и соответствующий профиль яркости.

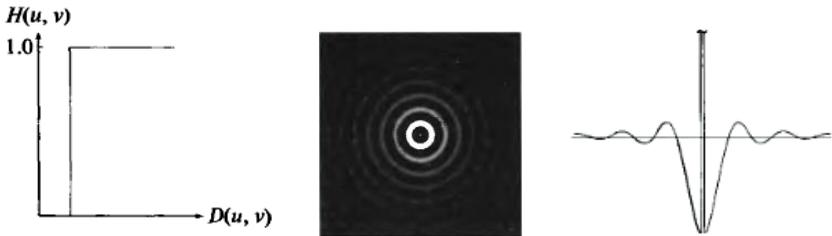


Рисунок 8 – Слева направо: радиальный профиль передаточной функции идеального высокочастотного фильтра; функция идеального высокочастотного фильтра в пространственной области; соответствующий профиль яркости

Идеальным высокочастотным фильтрам, точно также как и идеальным низкочастотным фильтрам, присущ эффект Гиббса, который приводит к появлению “звона” на обрабатываемом изображении.

По аналогии с идеальными низкочастотными фильтрами идеальные высокочастотные фильтры также почти не имеют реального практического применения.

### 1.5.2 Фильтры высоких частот Баттерворта

Передаточная функция высокочастотного фильтра Баттерворта порядка  $n$  с частотой среза на расстоянии  $D_0$  от начала координат определяется выражением:

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D_0 / D(u, v)]^{2n}}$$

На рисунке 10 приведены радиальный профиль передаточной функции высокочастотного фильтра Баттерворта второго порядка, функция высокочастотного фильтра Баттерворта в пространственной области, а также профиль яркости пространственной функции фильтра.

Фильтры Баттерворта высоких частот приводят к гораздо меньшим искажениям границ объектов, чем идеальные высокочастотные фильтры Баттерворта. С увеличением порядка высокочастотного фильтра Баттерворта искажения границ объектов заметно увеличиваются.

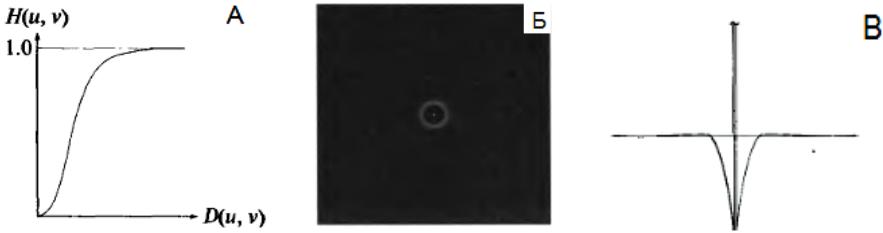


Рисунок 9 – А – радиальный профиль передаточной функции высокочастотного фильтра Баттерворта второго порядка, Б – функция высокочастотного фильтра Баттерворта в пространственной области, В – профиль яркости пространственной функции фильтра

### 1.5.3 Гауссовы фильтры высоких частот

Передаточная функция гауссова фильтра высоких частот с частотой среза, расположенной на расстоянии  $D_0$  от начала координат, задается выражением:

$$H(u, v) = 1 - e^{-\frac{D^2(u, v)}{2D_0^2}}$$

На рисунке 10 приведены: радиальный профиль передаточной функции гауссова фильтра высоких частот, функция высокочастотного гауссова фильтра в пространственной области, а также профиль яркости пространственной функции гауссова фильтра.

Высокочастотный гауссов фильтр обеспечивает высокое качество фильтрации даже для маленьких объектов и тонких полос, характеризуется полным отсутствием искажений.



Рисунок 10 – А – радиальный профиль передаточной функции высокочастотного гауссова фильтра, Б – функция высокочастотного гауссова фильтра Баттерворта в пространственной области, В – профиль яркости пространственной функции фильтра

### **1.6 Нерезкое маскирование. Высокочастотная фильтрация с подъемом частотной характеристики**

Изображения, получаемые в результате высокочастотной фильтрации, имеют среднее значение яркости фона близкое к нулю, так как высокочастотные фильтры, применяемые для обработки данных изображений, уничтожают постоянную составляющую (нулевую компоненту) их Фурье-преобразования. Для устранения данного недостатка можно к результату фильтрации добавить некоторую долю исходного изображения в качестве, так называемой “подложки изображения”. В ряде случаев представляется необходимым увеличить вклад, приносимый исходным изображением в итоговый результат фильтрации. Такой подход называется методом высокочастотной фильтрации с подъемом частотной характеристики и представляет собой обобщение метода нерезкого маскирования.

Нерезкое маскирование состоит в формировании резкого изображения путем вычитания из оригинала его сглаженной копии. В терминах частотных преобразований это означает, что имеет место высокочастотная фильтрация, которая достигается вычитанием из исходного изображения  $f(x, y)$  результата его низкочастотной фильтрации  $f_{lp}(x, y)$ :

$$f_{hp}(x, y) = f(x, y) - f_{lp}(x, y)$$

Обобщением последнего выражения является следующее выражение, описывающее высокочастотную фильтрацию с подъемом частотной характеристики:

$$f_{hb}(x, y) = A f(x, y) - f_{lp}(x, y)$$

Фильтрация с подъемом частотной характеристики позволяет изменять вклад, вносимый исходным изображением в конечный результат обработки.

### **1.7 Фильтрация с усилением высоких частот**

При решении некоторых задач обработки изображений выгодно усилить его высокочастотную составляющую. Передаточная функция фильтра с усилением высоких частот задается выражением:

$$H_{hfe}(u, v) = a + b \cdot H_{lp}(u, v)$$

где:  $H_{lp}(u, v)$  – передаточная функция низкочастотного фильтра

Характерные значения  $a$  находятся в диапазоне от 0,25 до 0,5; характерные значения  $b$  – в диапазоне от 1,5 до 2,5 (при этом важно отметить, что

$b > a$ ). При значениях  $b > 1$  происходит усиление высоких частот, откуда и происходит название метода.

Основная сфера применения фильтрации с усилением высоких частот в задачах обработки биомедицинских изображений является повышение резкости рентгенографических изображений. Рентгеновские лучи не могут быть сфокусированы с помощью линз, как световые лучи, поэтому большинство рентгеновских снимков выглядят расплывчато. Зачастую яркость рентгенографических изображений сдвинута в темную область, поэтому также необходимо использовать методы обработки изображения для увеличения яркости контрастности изображения.

### ***1.8 Реализация методов частотной фильтрации в системе компьютерных вычислений MATLAB***

Для выполнения прямого преобразования Фурье в пакете MATLAB используется функция **fft2**, которая имеет следующий синтаксис:

$$\mathbf{F} = \text{fft2}(\mathbf{f})$$

где:  $\mathbf{f}$  – исходное изображение,  $\mathbf{F}$  – преобразование Фурье двумерной функции  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ .

Для получения спектра изображения необходимо выполнить следующую команду:

$$\mathbf{S} = \text{abs}(\mathbf{F})$$

Команда **abs** вычисляет абсолютную величину (модуль) комплексной функции  $\mathbf{F}$ .

Для смещения начала координат Фурье-преобразования в центр частотной области используется функция **fftshift** со следующим синтаксисом:

$$\mathbf{F}_c = \text{fftshift}(\mathbf{F})$$

где:  $\mathbf{F}_c$  – центрированное Фурье-преобразование.

В силу того, что динамический диапазон изображения Фурье-преобразования очень широкий необходимо выполнять операции преобразования диапазона яркости для корректного отображения Фурье-преобразования на дисплее. Данную операцию можно выполнить с помощью логарифмического преобразования следующим образом:

$$\mathbf{S}_2 = \text{log}(1 + \text{abs}(\mathbf{F}_c))$$

Обратное преобразование Фурье выполняется с помощью функции **ifft2**, которая имеет следующий синтаксис:

$$\mathbf{f}=\text{ifft2}(\mathbf{F})$$

где:  $\mathbf{F}$  – преобразование Фурье,  $\mathbf{f}$  – соответствующее изображение.

После выполнения обратного Фурье-преобразования необходимо выделить вещественную часть результата с помощью команды следующего вида:

$$\mathbf{f}=\text{real}(\text{ifft2}(\mathbf{F}))$$

В среде MATLAB существуют специальные функции для составления матриц и векторов. Простейшим способом задать одномерный массив (вектор) является запись команды следующего вида:

$$[\text{name}]=\mathbf{X1:dX:Xk}$$

где: **name** – имя переменной, которое будет присвоено сформированному массиву,  $\mathbf{X1}$  – значение первого элемента массива,  $\mathbf{Xk}$  – значение последнего элемента,  $\mathbf{dX}$  – шаг с помощью которого формируется каждый следующий элемент (по умолчанию равен 1). Данная запись формирует вектор-строку. Для того, чтобы сформировать вектор-столбец необходимо использовать следующую запись:

$$[\text{name}]=[\mathbf{X1:dX:Xk}]'$$

где символ ' обозначает транспонирование матрицы.

При решении задач цифровой обработки изображений необходимо формировать двумерные массивы координатной сетки. С этой целью в системе MATLAB удобно использовать функцию **meshgrid**, которая формирует выходные массивы, определяющие координаты узлов прямоугольника, задаваемого входными векторами. Формируемый прямоугольник задает область определения функции от двух переменных. Функция **meshgrid** имеет следующий синтаксис:

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]=\text{meshgrid}(x, y)$$

Строки матрицы  $\mathbf{X}$  являются копиями вектора  $x$ , а столбцы матрицы  $\mathbf{Y}$  – копиями вектора  $y$ . Формирование таких массивов упрощает вычисление функций двух переменных, позволяя применять операции над массивами.

Пример: пусть  $x=(0, 1, 2)$   $y=(0, 1)$ . Тогда  $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

Формирование таких массивов упрощает вычисление функций двух переменных, позволяя применять операции над массивами.

Таким образом, для осуществления частотной фильтрации исходного изображения  $f(x, y)$  необходимо выполнить следующую последовательность операций:

- 1) определить размеры изображения  $f(x, y)$  с помощью команды **size**; сформировать векторы частотных координат  $u$  и  $v$  размеры которых, равны размерам векторов соответствующих пространственных координат  $x$  и  $y$ .
- 2) выполнить прямое преобразование Фурье исходного изображения с помощью команды **fft2** и получить частотное представление  $F(u, v)$ ;
- 3) задать значение частоты среза в пикселях (как правило, определяется единицами процентов от максимального горизонтального или вертикального размера изображения); сформировать передаточную характеристику требуемого фильтра  $H(u, v)$ , представляющую собой двумерную матрицу, размеры которой совпадают с размерами матрицы исходного изображения;
- 4) получить частотное представление отфильтрованного изображения  $G(u, v)$  путем выполнения операции поэлементного умножения передаточной характеристики фильтра  $H(u, v)$  и Фурье преобразования исходного изображения  $F(u, v)$ ;
- 5) получить пространственное представление отфильтрованного изображения  $g(x, y)$  путем выполнения процедуры обратного преобразования Фурье от частотного представления  $G(u, v)$  с помощью команды **ifft2**.
- 6) Выделить вещественную часть результата, полученного на предыдущем этапе с помощью команды **real**.

## 2 ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

1. Загрузите изображение рентгеновского снимка грудной клетки **xraychest.jpg**. Выполните Фурье-преобразование исходного изображения, получите изображение спектра в частотной области. Для улучшения визуального восприятия воспользуйтесь градационным логарифмическим преобразованием.
2. Примените методику высокочастотной фильтрации с подъемом частотной характеристики исходного изображения рентгеновского снимка грудной клетки **xraychest.jpg**.

- 2.1. Выполните операцию низкочастотной фильтрации исходного изображения рентгеновского снимка грудной клетки **xraychest.jpg**.
- 2.2. Подбором параметра **A** добейтесь наилучшего результата повышения резкости с помощью подъема частотной характеристики.
- 2.3. Изображение, полученное в результате выполнения пункта 2.2, подвергните процедуре гистограммной эквализации. Для получения справочной информации системы MATLAB по выполнению данной процедуры используйте команду **doc histeq**.
3. Примените методику фильтрации с усилением высоких частот к исходному изображению рентгеновского снимка грудной клетки **xraychest.jpg** с целью повышения резкости изображения.
  - 3.1. Выполните операцию высокочастотной фильтрации исходного изображения рентгеновского снимка грудной клетки **xraychest.jpg**.
  - 3.2. Подбором параметров **a** и **b** добейтесь усиления высоких частот.
  - 3.3. Изображение, полученное в результате выполнения пункта 3.2, подвергните процедуре гистограммной эквализации.
4. Сравните изображения, полученные в результате выполнения второго и третьего пунктов задания. Сделайте выводы о полученных результатах.

### 3 СОДЕРЖАНИЕ ОТЧЕТА

1. Цель работы.
2. Листинги написанных программ (М-файлов) в среде MATLAB для каждого задания.
3. Сводная таблица результатов, содержащая полученные в результате проведенных исследований изображения в сравнении с исходными изображениями.
4. Выводы о полученных результатах, сопоставление с теорией.

### 4 КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Двумерное Фурье-преобразование изображений.
2. Основы частотной фильтрации изображений.
3. Сглаживающие частотные фильтры.
4. Частотные фильтры повышения резкости.

5. Нерезкое маскирование. Высокочастотная фильтрация с подъемом частотной характеристики.

6. Фильтрация с усилением высоких частот.

### **БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК**

1. Гонсалес, Р. Цифровая обработка изображений [Текст] / Р. Гонсалес, Р. Вудс. – М.: Техносфера, 2006. – 1072 с.
2. Гонсалес, Р. Цифровая обработка изображений в среде Matlab [Текст] / Р. Гонсалес, Р. Вудс, С. Эддинс. – М.: Техносфера, 2006. – 616 с.
3. Алексеев, Е.Р. MATLAB 7 [Текст] / Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В. – М.: NT Press, 2006. – 464 с.



*Учебное издание*

**ЧАСТОТНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ  
МЕДИЦИНСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ**

*Методические указания*

Составители: Федотов Александр Александрович  
Акулов Сергей Анатольевич  
Акулова Анна Сергеевна

Самарский национальный исследовательский университет  
имени академика С.П. Королева  
443086 Самара, Московское шоссе, 34