МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»
(Самарский университет)

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МЕТОДОЛОГИЯ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ»

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве методических указаний к практическим занятиям для студентов, обучающихся по программе высшего образования по направлению подготовки 22.04.02 Металлургия

Самара
Издательство Самарского университета
2017

УДК 629.7(075)
ББК 34.3я7

Составитель ***Каргин Владимир Родионович***

Индивидуальные задания для самостоятельной работы по дисциплине «Методология научных исследований» : метод. указания к практич. занятиям / сост. *В.Р. Каргин*. – Самара: Изд-во Самарского ун-та, 2017. - 48 с.

Даны индивидуальные задания для обработки результатов научного эксперимента в области технических наук. Приведены краткие теоретические сведения, примеры выполнения и необходимый справочный материал.

Предназначены для студентов, обучающихся в магистратуре по направлению 22.04.02 Металлургия, при выполнении самостоятельной работы на практических занятиях и в сфере исследований, а также выпускной квалификационной работы магистра.

Подготовлены на выпускающей кафедре обработки металлов давлением.

УДК 629.7(075)
ББК 34.3я7

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ №1

Статистическая обработка результатов измерений

Дан протокол измерений случайной величины X (приложение Г). Для этой случайной величины требуется:

а) составить интервальную таблицу частот;

б) получить точечные оценки для математического ожидания и дисперсии;

в) найти доверительный интервал для математического ожидания;

г) построить гистограмму;

д) аппроксимировать гистограмму теоретическим нормальным законом распределения;

е) с помощью критерия χ^2 проверить согласованность теоретического и статистического законов распределения.

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Вариационные ряды и их характеристики

Вариационный ряд – это запись результатов измерений какой-либо случайной величины в виде последовательности чисел. Значения исследуемой случайной величины называют вариантами.

Упорядоченный вариационный ряд – это последовательность вариант, записанная в порядке возрастания (или убывания).

Для обработки результатов статистически наблюдений их удобно оформлять в виде таблиц частот.

Статистическое распределение – таблица частот, в которой указаны значения случайной величины x_i и соответствующие частоты m_i, показывающее, сколько раз в выборке встретилось данное значение случайной величины.

Для получения интервальной таблицы частот (интервального вариационного ряда) весь диапазон измерений значений случайной X делят на kинтервалов (α_i,α_{i+1}) и подсчитывают количество (m_i) значений случайной величины, попавших на соответствующий интервал. Кроме того, в таблице указывают также величину $\bar{x}_i$– середину i-ого интервала (таблица 1).

Таблица 1- Интервальная таблица частот

№ интервала	Интервал	Середина интервала	Частота
1	(α_1,α_2)	$\bar{x}_1$	m_1
2	(α_2 ,α_3)	$\bar{x}_2$	m_2
...	...	...	…
k	(α_k ,α_{k+})	$\bar{x}_k$	m_k

Здесь $m_1+ m_2 + ... +m_k= n$ (n– объём выборки, т.е. количество всех вариантов).

Иногда вместо таблицы частот составляют таблицу относительных частот

$w = \frac{m_1}{n}$,

(n- объём выборки), очевидно, $\sum_{i=1}^{k} w_i = 1$.

Для графического представления вариационных рядов используют **полигон, гистограмму, кумуляту**.

Полигон – это ломаная , соединяющая точки с координатами $(x_i; m_i)$.

Гистограмма– это ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основаниями которых служат отрезки оси, равные интервалам (α_i,α_{i+1}), а высоты пропорциональны частотам m_i, (или относительным частотам w_i).

Кумулята (кумулятивная кривая) – это ломаная, соединяющая точки с координатами $(x\,; m_i^н)$ или $(x\,; w_i^н)$, где $m_i^н = m_1 + m\ ... + m_i = \sum_{j=1}^{i} m_j$ - накопленная частота; $w_i^н = w_1 + w\ ... + w_i = \sum_{j=1}^{i} w_j$ – накопленная относительная частота.

При обработке вариационных рядов обычно подсчитывают их сводные числовые характеристики: средние величины и показатели вариации.

К средним относятся: среднее арифметическое, медиана и мода.

Среднее арифметическое всех вариант вычисляется по формуле $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} {}_{i}$ (1),

где x_i – значение вариант, n – общее количество вариант.

Медиана – это значение, которое делит упорядоченный вариационный ряд на две равные по количеству элементов части: $\tilde{x} = \begin{cases} (x \ + x_{k+1})/2 & при \quad n \quad 2k \\ x_{k+1}, & при \quad n = 2k \quad 1 \end{cases}$ (2)

Мода – это варианта, которой соответствует наибольшая частота.

К показателям вариации относятся: размах, выборочная дисперсия, выборочное среднее квадратичное отклонение.

Размах – это разность между наибольшим и наименьшим значениями вариант: $R = X_{\max} - X_{\min}$.

Дисперсия вычисляется по формуле

$D \quad \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \ x_j - \bar{x})^2$ (3)

Среднее квадратичное отклонение

$\sigma = \sqrt{D}$ (4)

Выборочный метод. Статистические оценки параметров генеральной совокупности

Генеральной совокупностью называется весь набор однородных объектов, изучаемых относительно некоторого качественного или количественного признака. Число всех изучаемых объектовNназывается объёмом генеральной совокупности.

Выборка- это та часть генеральной совокупности, элементы которой подвергаются статистическому обследованию. Число nвошедших в выборку элементов называется объёмом выборки.

Одна из задач математической статистики – оценка параметров генеральной совокупности по данным выборки.

Статистические оценки бывают точечные (определяемые одним числом) и интервальные (определяемые двумя числами – концами интервала). Точечные оценки дают представление о величине соответствующего параметра, а интервальные характеризуют точность и достоверность оценки.

Для достоверности результатов точечная оценка должна быть несмещённой, состоятельной и эффективной. Этим условиям удовлетворяют следующие оценки:

для математического ожидания генеральной совокупности –

выборочное среднее $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\bar{x}_i m_i$; (5)

для дисперсии генеральной совокупности –

выборочная дисперсия $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}(\bar{x} \quad \bar{x})\ m_i$; (6)

для среднего квадратичного отклонения генеральной совокупности –

стандартное отклонение $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}(\bar{x} - \bar{x})\ m_i}$. (7)

При выборке малого объёма точечная оценка может сильно отличаться от оцениваемого параметра. Поэтому при небольшом объёме выборки (чаще всего встречающемся на практике) пользуются интервальными оценками.

Интервальная оценка- это оценка, которая определяется двумя числами-концами интервала или доверительными границами.

Если θ^*- статическая оценка параметра θ, то говорят, что оценка вычислена с точностью δ, если $|\theta \quad \theta^*| < \delta$ (8),

то есть величина параметра θ попадает в интервал $(\theta^* - \delta; \theta^* + \delta)$.

Статистические методы позволяют говорить о вероятности выполнения неравенства (8), поэтому надёжностью (доверительной вероятностью)оценки называется вероятность γ, с которой осуществляется это неравенство.

Интервал $(\theta^* - \delta; \theta^* + \delta)$, который покрывает неизвестный параметр с заданной надёжностью γ, называется доверительным интервалом.

Доверительную вероятность (надёжность) γ выбирают обычно (в зависимости от важности оцениваемого признака) из значений 0.95; 0.99; 0.999.

Чтобы оценить среднее значение некоторого количественного признака X генеральной совокупности, строят доверительный интервал для математического ожидания с доверительной вероятностью (надёжностью) γ.

Если признак X распределен нормально и среднее квадратичное отклонение σ известно, то по выборке объёма n вычисляют среднее выборочное значение $\bar{x}$, а так же определяют такое значение аргумента t, что функция Лапласа $\Phi(t) = \gamma / 2$. Тогда доверительный интервал для математического ожидания имеет вид:

$$\left(- \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + \frac{\sigma}{\sqrt{\ }} \right) (9)$$

Если признак X распределен нормально и среднее квадратичное отклонение σ неизвестно, то для построения доверительного интервала по выборке объёма nвычисляют точечные оценки: $\bar{x}$ – выборочное среднее; s – выборочное среднее квадратичное отклонение ($s = \sqrt{D}$). Затем по справочной таблице значений величины t_γ, связанной с распределением Стьюдента, находят $t_\gamma = t(\gamma, n)$. В этом случае доверительный интервал для математического ожидания имеет вид :

$$- \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}; \bar{x} + \frac{t_\gamma s}{\sqrt{\ }} \Bigg) (10)$$

Замечание. Для выборок большого объёма можно вместо формулы (10) использовать формулу (9).

Проверка статистических гипотез

Статистической гипотезой называется любое предположение о виде или параметрах неизвестного распределения. Выдвинутую статистическую гипотезу, которую подвергают проверке, называют нулевой гипотезой и обозначают H_0. Каждая другая допустимая гипотеза, отличная от H_0, называется альтернативной и обозначается H_1.

В результате проверки гипотеза H_0 принимается или отвергается, причём возможны четыре случая:

а) H_0 верна, и её приняли; б) H_0 верна, но её не отвергли;

в) H_0 неверна, но её приняли; г) H_0 неверна, и её отвергли.

Очевидно, что в случаях б) и в) принятое решение было ошибочным. Ошибка, совершённая в случае б), когда отвергается правильная гипотеза, называется ошибкой первого рода; совершённая в случае в), когда принята неверная гипотеза, называется ошибкой второго рода.

Предположим, что для контроля технологической операции производится измерение некоторого параметра. При нормальной работе станка (нулеваягипотеза H_0) распределение контролируемого параметра не изменяется, если же произошла разладка станка (альтернативная гипотеза H_1), то характер распределения меняется. В этом случае ошибка первого рода - это пропуск бракованной продукции вследствие неправильно выбранного момента подналадки , а ошибка второго рода- это остановка для подналадки , когда станок работает нормально.

Вероятность совершить ошибку первого рода обозначают α и называют уровнем значимости или α-риском. Величина α обычно выбирается 0.05 (5%) или 0.01 (1%).

Вероятность совершить ошибку второго рода обозначают β и называют β-риском.

Однозначно определённый способ проверки статистических гипотез называется статистическим критерием. Обычно для проверки используют специальную случайную величину – статистику, распределение которой известно заранее. По данным выборок вычисляются частные значения входящей в критерий величины (статистики).

Совокупность значений статистики, при которой нулевая гипотеза отвергается , называется критической областью w, а множество значений статистики , при которой нулевая гипотеза принимается, образует область принятия гипотезы.

Обычно статистика K - это случайная величина, принимающая действительные значения , поэтому критическая область и область принятия гипотезы- это интервалы числовой оси, отделяющиеся друг от друга критическими точками.

Величина критической области w определяется уровнем значимости α. Вероятность попадания статистики в критическую область при условии, что справедлива альтернативная гипотеза H_1(то есть H_0 будет отвергнута , если верна H_1), называется мощностью критерия. Очевидно, мощность равна $P = 1 - \beta$. Мощность критерия – это вероятность не допустить ошибку второго рода.

При построении критической области стремятся уменьшить вероятности ошибок, однако при заданном объёме выборки невозможно уменьшить одновременно и α и β. Поэтому величины α и β выбирают в зависимости от « тяжести последствий» ошибок первого и второго рода для каждой конкретной задачи.

Принцип проверки статистической гипотезы не даёт логического доказательства её верности или неверности. Принятие гипотезы H_0 означает только то, что эта гипотеза не противоречит имеющимся выборочным данным.

Для проверки гипотезы о виде теоретического закона распределения обычно применяют критерии согласия. При этом выдвигается гипотеза H_0 о том, что исследуемая случайная величина X подчиняется определенному закону распределения, и вычисляют статистику Z меры расхождения теоретического (выбранного в гипотезе H_0) и эмпирического (полученного по экспериментальным данным) распределения. Закон распределения Z должен быть известен , и тогда для выбранного уровня значимости α легко установить $Z_{кр}$. Если вычисленная величина $Z > Z_{кр}$, то гипотезу H_0 отвергают, если $Z \le Z_{кр}$, то гипотезу H_0 принимают.

На практике наиболее часто применяют критерий согласия χ^2 - Пирсона. В этом критерии в качестве статистики Z берут $\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(m - np_i)^2}{np_i}$, которая при $n \to \infty$ имеет χ^2 - распределение с числом степеней свободы $r = k - l - 1$, где k - число интервалов эмпирического распределения (интервальной таблицы частот), l - число параметров теоретического распределения.

Замечание. Необходимо, чтобы в каждом интервале было не менее 5 наблюдений (m_i>5) , если это не соблюдается, что следует объединить соседние интервалы.

Критические точки распределения χ^2 приведены в Приложении В.

Алгоритм выполнения индивидуального задания

I. Простейшая статистическая обработка:

1) Упорядочить вариационный ряд (т.е. записать все значения вариант в порядке возрастания) (таблица 2).

2) Найти размах: $R = X_{\max} - X_{\min}$

3) Подобрать количество разрядов (интервалов):

$k = 1 + 3.32\lg(n) = 1.44\ln(n) + 1$, где n-объём выборки (количество разрядов должно быть целым числом).

4) Построить интервальную таблицу частот. Для этого находят длину интервала $\Delta x = R / k$ (если R не делится нацело на k, то можно слегка расширить диапазон значений случайной величины) и границы интервалов – точки $\alpha_1, ..., \alpha_{k+}$, где $\alpha_i = \alpha_1 + (i-1)\Delta x$. Затем подсчитывают частоты m_i - количество значений случайной величины (вариант), попавших на каждый интервал.

В таблицу 3 заносят границы интервалов $(\alpha_i; \ _{+1})$ среднее значение вариант на каждом интервале $\bar{x} = \dfrac{\alpha \ + \alpha_{i+1}}{2}$, частоты m_i и относительные частоты (частности) $w = \dfrac{m_i}{n}$ (столбцы 1-4).

II. Вычисления точечных оценок:

1)Вычислить выборочное среднее $\bar{x} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} \bar{x}_i m_i$ - оценку для математического ожидания.

2) Вычислить выборочную дисперсию $s^2 = \dfrac{1}{1-n}\sum_{i=1}^{k}(\bar{x} \quad \bar{x} \quad m_i$ - оценку для дисперсии.

3) Вычислить стандартное отклонение $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\dfrac{1}{1-n}\sum_{i=1}^{k}(\bar{x} - \bar{x} \quad m_i}$ - оценку для среднего квадратичного отклонения.

III. Построение доверительного интервала дляa:

1) зная доверительную вероятность (надёжность) γ, найти по таблице значений функции Лапласа $\varPhi(x = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{\frac{t^2}{2}} dt$ (см. Приложение А) соответствующее значениеt, для которого $\varPhi(t) = \dfrac{\gamma}{2}$.

2) Вычислить предельную ошибку $\Delta = t\dfrac{s}{\sqrt{n}}$, где s- стандартное отклонение , n- объем выборки.

3) Записать доверительный интервал для математического ожидания $(\bar{x} - \Delta; \bar{x} + \Delta)$

IV. Построение гистограммы:

Гистограмма – это столбиковая диаграмма, служащая для графического представления распределения частот. Площади столбцов пропорциональны частотам (или относительным частотам).

Для построения гистограммы относительных частот вычисляют высоты столбцов гистограммы $h = \frac{w_i}{\Delta x}$ (удобно добавить их в таблицу 3- столбец 5), на оси абсцисс отмечают тоски $\alpha_1,...,\alpha_{k+}$ и над каждым интервалом $(\alpha_i; \ _{+1})$ строят прямоугольник высотой h_1. В результате получается ступенчатая фигура, верхний контур которой приблизительно соответствует графику плотности распределения исследуемой случайной величины (рис.1) .

V. Аппроксимация гистограммы нормальным законом распределения:

1) Составить таблицу значений теоретического нормального закона с параметрами $a = \bar{x}, \sigma = s$: $f(\bar{x}_i) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\bar{x}_i - \bar{x} \ ^2}{2s^2}}$

Для удобства расчетов можно:

а) найти значения $u_i = \frac{\bar{x}_i - \bar{x}}{s}$;

б) по таблицу найти $\varphi(u_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \ ^{-\frac{u^2}{2}}$ (см. Приложение Б);

в) вычислить $f(\bar{x}_i) = \frac{1}{s}\varphi(u \ )$ (таблица 3).

2) Построить график теоретической кривой. На рисунке 3.1 отметить точки с координатами $(\bar{x}_i; f(\bar{x} \ ))$ и соединить их плавной кривой.

3) Сделать вывод о согласованности статического распределения (гистограммы) с теоретическим нормальным законом распределения , проанализировав полученный рисунок.

VI.Проверка согласованности статического и теоретического распределения:

1) Вычислить статистику $\chi \ : \chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(m \ - np_i \ ^2}{np_i}$,

где $p_i = \Phi\left(\frac{\alpha \quad -}{s}\right) - \Phi\left(\frac{_{i-1} - \bar{x}}{}\right)$; $\Phi(x)$ – функция Лапласа.

2) Определить число степеней свободы r=k-3.

3) Анализ результатов. Выбрав уровень значимости α(например, α =0,05), в таблице критических точек распределения χ^2 (Приложение 3), найти $\chi^2_{кр}$.

Если $\chi^2 < \chi_{кр}$, то можно принять гипотезу о нормальном распределение, т.е полученный теоретический закон хорошо аппроксимирует статическое распределение.

Если $\chi^2 > \chi_{кр}$, то гипотеза о выборе теоретического закона отвергается, т.е полученный закон не согласуется с экспериментальными данными.

Пример выполнения индивидуального задания

Вначале требуется записать содержание индивидуального задания. Затем расположив исходные данные выборки в порядке возрастания, получим следующий упорядоченный вариационный ряд (таблица 2):

Таблица 2 - Упорядоченный вариационный ряд

95	112	118	122	127
97	113	119	123	127
98	113	119	123	128
101	114	119	123	128
102	114	119	123	128
102	114	120	123	129
103	115	120	124	129
105	115	120	124	130
105	115	120	124	131
106	115	120	125	131
107	115	121	125	131
107	116	121	125	132

108	116	121	125	132
109	116	121	125	132
109	117	121	126	133
109	117	121	126	134
110	117	121	126	134
111	117	122	126	135
111	117	122	127	137
111	118	122	127	141

Найдём размах R=141-95=46

Так как объём выборки n=100 , а количество разрядов должно быть целым числом, то удобно брать k= 8 или k= 7. Расширим диапазон значений вариант до промежутка (94;142) и выберем k= 8.

Тогда длина интервала $\Delta x = (142 - 94)/8 = 6$.

Построим интервальную таблицу частот (таблица 3, столбцы 1-4). В ту же таблицу занесем вычисленные значения высот столбцов гистограмм.

Таблица 3 - Интервальная таблица частот

Границы интервалов $(\alpha_i,\ \ _{+1})$	Среднее значение $\overline{x}_i$	Частота m_i	Относительная частота w_i	Высота столбца гистограммы h_i
94-100	97	3	0,03	0,0050
100-106	103	7	0,07	0,0117
106-112	109	11	0,11	0,0183
122-118	115	20	0,20	0,0333
118-124	121	28	0,28	0,0467
124-130	127	19	0,19	0,0317
130-136	133	10	0,10	0,0167
136-142	139	2	0,02	0,0033

Вычислим числовые характеристики:

Выборочное среднее

$$\overline{x} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}\overline{x}_i m_i = (97\cdot 3 + 103\cdot 7 + 109\cdot 11 + 115\cdot 20 + 121\cdot 28 + 127\cdot 19 + 133\cdot 10 + 139\cdot 2)/100 = 119.2$$

Выборочная дисперсия

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}(\overline{x}_i - \overline{x})^2 m = ((97-119.2)^2\cdot 20 + (121-119.2)^2\cdot 28$$
$$+(127-119.2)^2\cdot 19 + (133-119.2)^2\cdot 10 + (139-119.2)^2\cdot 2)/99 = 87.48$$

Стандартное отклонение

$s = \sqrt{s^2}$ =9.35

Найдем доверительный интервал для математического ожидания.

Пусть доверительная вероятность $\gamma =$ 0.95. Тогда по таблице (Приложение 1) находим, что если $\Phi(t) = 0,475$, то $t = 1,96$. Вычислим предельную ошибку $\Delta = t\frac{s}{\sqrt{n}} : \Delta = 1,96\cdot 9,35/10 = 1,833$.

Таким образом, границы доверительного интервала 119,2-1,833 и 119,2+1,833, т.е. доверительный интервал для математического ожидания имеет вид (117,367; 121,033).

Составим таблицу значений теоретического нормального закона (таблица 4).

Таблица 4 - Значения теоретического нормального закона

Среднее Значение $\overline{x}_i$	$u_i = \dfrac{\overline{x}_i - \overline{x}}{s}$	$\varphi(u_i) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}^{-\frac{u_i^2}{2}}$	$f(\overline{x}_i) = \dfrac{1}{s}\varphi(u\ )$
97	-2,37	0,0241	0,0026
103	-1,73	0,0893	0,0096
109	-1,09	0,2203	0,0236
115	-0,45	0,3605	0,0386
121	0,19	0,3918	0,0419
127	0,83	0,2827	0,0302
133	1,48	0,1334	0,0143
139	2,12	0,0422	0,0045

Построим гистограмму и кривую теоретического нормального закона распределения (рисунок 1).

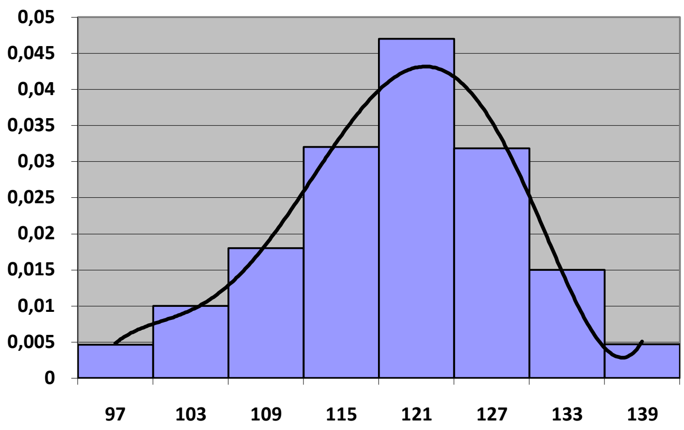

Рисунок 1 - Гистограмма и теоретическая линия

Проверим согласованность статистического и выбранного теоретического распределения с помощью критерия χ^2.

Вычислим значение p_i (таблица 5)

Границы интервалов (α_i, α_{i+1})	Частота m_i	$p_i = \Phi\left(\frac{\alpha_{i+1} - \bar{x}}{s}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha_{i-1} - \bar{x}}{s}\right)$	$\frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}$
94-100	3	Ф(-2,05) - Ф(-2,69) = 0,0166	1,082
100-106	7	Ф(-1,41) - Ф(-2,05) = 0,0592	0,197
106-112	11	Ф(-0,77) – Ф(-1,41) = 0,1413	0,693
112-118	20	Ф(-0,13) – Ф(-0,77) = 0,2284	0,353
118-124	28	Ф(0,51) – Ф(-0,13) = 0,2470	0,441
124-130	19	Ф(1,155) – Ф(0,51) = 0,180	0,055
130-136	10	Ф(1,797) – Ф(1,155) = 0,088	0,164
136-142	2	Ф(2,44) – Ф(1,797) = 0,0286	0,259
			$\sum = 3,244$

Вычислим статистику $\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i} = 3.244$

Подсчитаем число степеней свободыr = 8 - 3=5 .

Выбрав уровень значимости α=0,05 в таблице (Приложение 3) найдем $\chi^2_{кр}(5; 0,05) = 11,1$. Так как $\chi^2 = 3,244 < 11,1 = \chi^2_{кр}$, то можно принять гипотезу о нормальном распределение, т.е. в данном случае полученный теоретический закон хорошо аппроксимирует статистическое распределение.

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ №2

Аппроксимация экспериментальных данных

Произвести математическую обработку результатов измерений, представленных в индивидуальном задании №1 в виде таблицы:

i (номер интервала)	x_i	$y_{эi}$
1		
2		
…		
8		

где $y_{эi} = m_i$, $x_i = \frac{1}{10}\bar{x}_i$, $i = 1, \dots 8$

1) подобрать формулу, аппроксимирующую зависимость$y = y(x)$в виде $y_i = ax_i^2 + bx_i + c$с помощью метода наименьших квадратов;

2) изобразить экспериментальные точки и аппроксимирующую зависимость на графике в масштабе;

3) найти величину среднеквадратического отклонения отдельных замеров от аппроксимирующей кривой и величину среднеквадратического отклонения от кривой в целом

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{8}(y_i - y_{iэ})^2}{n}}$$

$$\bar{S}_y = \frac{S_y}{\sqrt{n}}$$

Аппроксимация экспериментальных данных по методу наименьших квадратов

Методы аппроксимации осуществляют путем подбора, по возможности, простых аналитических формул, с достаточной степенью точности отображающих экспериментально полученные зависимости. Чаще всего вид общей формулы заранее неизвестен.

По характеру расположения экспериментальных точек на графике или анализа теоретической информации всегда можно установить примерный вид изучаемой зависимости.

Результаты экспериментов содержат случайные ошибки, поэтому нельзя требовать, чтобы подобранная формула точно соответствовала всем экспериментальным точкам. Другими словами, график искомой функции не должен проходить через все точки. Желательно, чтобы отклонения результатов эксперимента, от значений, вычисленных по формуле, были как можно меньше.

Пусть в результате эксперимента получен ряд измерений, величин $Y_{э1}, Y_{э2}, Y_{э3}, \ldots, Y_{эn}$, соответствующим значениям аргумента X_1, X_2, $X_3, \ldots$ X_n, которые на графике представлены в виде точек. Необходимо установить эмпирическую зависимость между X и Y при этом принимают следующие допущения:

1) все значения переменной X_i являются точными, т.е. ошибками в их экспериментальном определении можно пренебречь.

2) результаты эксперимента $Y_э, Y_{э1}, Y_{э2}, \ldots, Y_{эn}$ являются независимыми случайными величинами, подчиняющимися нормальному закону распределения.

Уравнения, связывающие случайную величину Y с неслучайной X, называются уравнениями регрессии по предложению Френсиса Гамильтона.

Метод наименьших квадратов

По методу наименьших квадратов (МНК), разработанному Гауссом более 170 лет назад, требуется, чтобы сумма квадратов разностей между значениями искомой величины, определенными по найденной формуле, и экспериментальными ее значениями была минимальной:

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_{эi} - Y_i)^2 => min$$

Для уравнения прямой видаУ$_i = \alpha X_i$по методу наименьших квадратов

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_{эi} - Y_i)^2 = \sum(Y_{эi} - aX_i)^2 => min$$

Для определения значенияa надо взять производную поaот этой суммы и приравнять к нулю (n-число измерений):

$$\frac{d}{da}\sum_{i=1}^{n}(Y_{эi} - aX_i)^2 = 0; \qquad \sum_{i=1}^{n}(Y_{эi} - aX_i)X_i \quad = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n}Y_{эi}X_i = a\sum_{i=1}^{n}X_i^2; \qquad a = \frac{\sum_{i=1}^{n}Y_{эi}X_i}{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}$$

Для уравнения прямой вида У$_i$ = αX_i+b по методу наименьших квадратов

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_{эi} - aX_i)^2 = \sum(Y_{эi} - (aX_i + b))^2 => min$$

Минимум этой функции достигается при одновременном равенстве нулю частных производных по a и b:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{da}\sum_{i=1}^{n}(Y_{эi} - (aX_i + b))^2 = 0 \\ \dfrac{d}{db}\sum_{i=1}^{n}(Y_{эi} - (aX_i + b))^2 = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}(Y_{эi} - (aX_i + b))X_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n}(Y_{эi} - (aX_i + b)) \quad = 0 \end{cases}$$

После преобразований получаем

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_{эi} x_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_{эi} \end{cases}$$

Окончательные формулы для вычисления коэффициентов a и b можно найти с помощью определителей методом Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & n; \end{vmatrix} \Delta_a = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_{эi} & \sum_{i=1}^{n} x \\ \sum_{i=1}^{n} y_{эi} & n; \end{vmatrix} \Delta_b = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} y_{эi} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} y_{эi}; \end{vmatrix}$$

$$a = \frac{\Delta_a}{\Delta} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} y_{эi} x_i - \sum_{i=1}^{n} y_{эi} \sum_{i=1}^{n} x_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\ \right)^2}$$

$$b = \frac{\Delta_b}{\Delta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_{эi} - \sum_{i=1}^{n} y_{эi} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\ \right)^2}$$

При нахождении параметров нелинейной зависимости имеем

$$\sum_{i=1}^{n} (y_{эi} - a{x_i}^2 - bx_i - c)^2 => min.$$

Дифференцируя это соотношение по a, b и c, получаем соответственно уравнения

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} (y_{эi} - ax_i^2 - bx_i - c)x_i^2 = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} \left(y_{эi} - ax_i^2 - bx_i - c\right)x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} (y_{эi} - ax_i^2 - bx_i - c) = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i + cn = \sum_{i=1}^{n} y_{эi} \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_{эi}x_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_{эi}x_i^2 \end{cases}$$

Из этой схемы можно найти значения a, b и c используя методы решения системы линейных уравнений: метод Крамера (определители), метод Гаусса (последовательное исключение переменных), метод обратной матрицы.

Результаты вычислений сводят в таблицу:

i	X_i	$Y_{эi}$	X_i^2	X_i^3	X_i^4	$y_{эi}x_i$	$y_{эi}x_i^2$
1 2 … n							
$\sum_{i=1}^{n}$							

Метод наименьших квадратов позволяет находить константы более сложных зависимостей, например, экспоненциальных: $y = ae^{-bx}, z = cx^a y^\beta$

После логарифмирования пришли к линейному уравнению

$\ln y = \ln a - bx$ или $y^* = a^* - bx$, где $y^* = \ln y, a^* = \ln a$.

Пример выполнения индивидуального задания № 2

Произвести математическую обработку результатов измерений, представленных в индивидуальном задании №1 в виде таблицы 1.

Таблица 1 - Экспериментальные данные

i (номер интервала)	x_i	$y_{эi}$
1	61,45	3
2	63,35	7
3	65,25	10
4	67,15	27
5	69,05	16
6	70,95	19
7	72,85	12
8	74,75	6

Здесь $y_{эi}=m_i$, $x_i=\frac{1}{10}\bar{x_i}$, $i=1,\ldots8$

Построим график расположения экспериментальных точек по данным таблицы 1 в координатах x и y , рисунок 1.

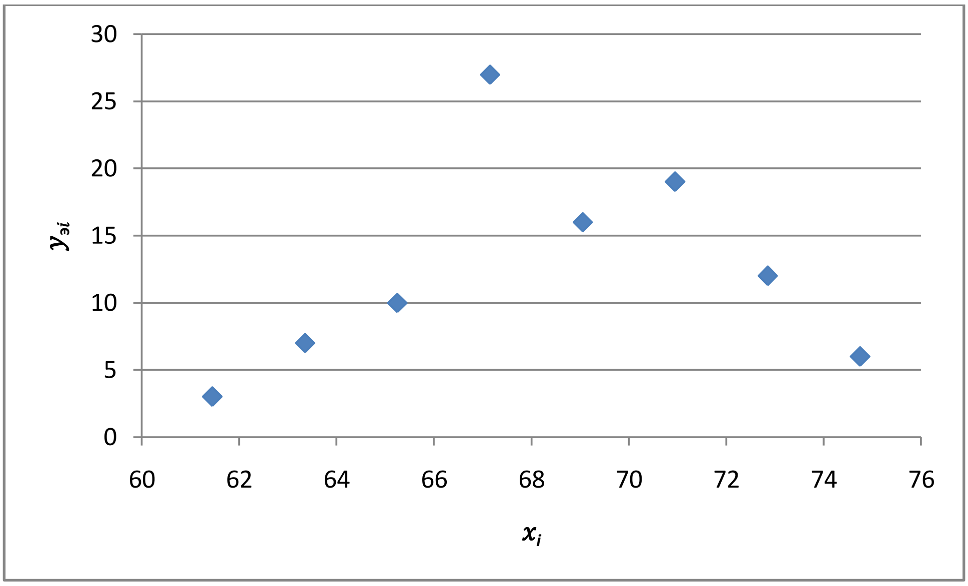

Рисунок 1 - Экспериментальный график изменения $y_{эi}$ в зависимости от x_i.

По характеру распределения экспериментальных точек на графике (рис.1) найдем примерный вид аналитической аппроксимирующей зависимости. Это квадратичная зависимость, которую можно описать формулой:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов a, b и c используем систему трех линейных уравнений, полученных методом наименьших квадратов:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i + cn = \sum_{i=1}^{n} y_{эi} \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_{эi}x_i \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_{эi}x_i^2 \end{cases} \quad (1)$$

Результаты вычислений величинx_i^2, x_i^3, x_i^4, $y_{эi}x_i$, $y_{эi}x_i^2$ сведем в таблицу 2.

Таблица 2 - Результаты вычислений

i	x_i	$y_{эi}$	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$y_{эi}x_i$	$y_{эi}x_i^2$
1	61,45	3	3776,103	232041,499	14258950,1	184,35	11328,308
2	63,35	7	4013,223	254237,645	16105954,8	443,45	28092,558
3	65,25	10	4257,563	277805,953	18126838,4	652,5	42575,625
4	67,15	27	4509,123	302787,576	20332185,7	1813,1	121746,31
5	69,05	16	4767,903	329223,668	22732894,2	1104,8	76286,44
6	70,95	19	5033,903	357155,382	25340174,4	1348,1	95644,148
7	72,85	12	5307,123	386623,874	28165549,2	874,2	63685,47
8	74,75	6	5587,563	417670,297	31220854,7	448,5	33525,375
Σ	544,8	100	37252,5	2557545,8940	176283401,6369	6868,9	472884,23

После подстановки результатов вычислений в уравнение (1) получим:

$$\begin{cases} 37252{,}5a + 544{,}8b + 8c = 100 \\ 2557545{,}894a + 37252{,}5b + 544{,}8c = 6868{,}9 \\ 176283401{,}6369a + 2557545{,}894b + 37252{,}5c = 472884{,}23 \end{cases} \quad (2)$$

Решим систему уравнений (2) методом определителей по формулам Крамера. Найдем главный определитель системы для матрицы А по правилу треугольников (правило Сарруса):

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$\Delta = |A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$.

Вычислим определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 37252{,}5 & 544{,}8 & 8 \\ 2557545{,}89 & 37252{,}5 & 544{,}8 \\ 176283401{,}64 & 2557545{,}89 & 37252{,}5 \end{vmatrix} = -2655645{,}9688$$

Так как $\Delta \neq 0$, то по теореме Крамера система (1) имеет единственное решение.

Вычислим вспомогательные определители Δa, Δb и Δc, полученные из матрицы A, заменой соответственно первого, второго и третьего столбцов столбцом свободных членов:

$$\Delta a = \begin{vmatrix} 100 & 544{,}8 & 8 \\ 6868{,}9 & 37252{,}5 & 544{,}8 \\ 472884{,}23 & 2557545{,}89 & 37252{,}5 \end{vmatrix} = 963332{,}8320$$

$$\Delta b = \begin{vmatrix} 37252{,}5 & 100 & 8 \\ 2557545{,}89 & 6868{,}9 & 544{,}8 \\ 176283401{,}64 & 472884{,}23 & 37252{,}5 \end{vmatrix} = -132237573{,}6270$$

$$\Delta c = \begin{vmatrix} 37252{,}5 & 544{,}8 & 100 \\ 2557545{,}89 & 37252{,}5 & 6868{,}9 \\ 176283401{,}64 & 2557545{,}89 & 472884{,}23 \end{vmatrix} = 4486363649{,}2500$$

Теперь по формулам Крамера:

$$a = \frac{\Delta a}{\Delta} = \frac{79020{,}70}{-445322832{,}95} = -0{,}3627$$

$$b = \frac{\Delta b}{\Delta} = \frac{-13590322{,}17}{-445322832{,}95} = 49{,}7949$$

$$c = \frac{\Delta c}{\Delta} = \frac{4486371708{,}63}{-445322832{,}95} = -1689{,}3681$$

Сделаем проверку, подставив найденные значения в уравнения системы (2), и увидим, что они обратились в верные равенства:

$$\begin{cases} 37252{,}5 \cdot (-0{,}3627) + 544{,}8 \cdot 49{,}7949 - 8 \cdot 1689{,}3681 = 100 \\ 2557545{,}89 \cdot (-0{,}3627) + 37252{,}5 \cdot 49{,}7949 - 544{,}8 \cdot 1689{,}3681 = 6868{,}9 \\ 176283401{,}64 \cdot (-0{,}3627) + 2557545{,}89 \cdot 49{,}7949 - 37252{,}5 \cdot 1689{,}3681 = 472884{,}23 \end{cases}$$

$$37252{,}5 \cdot (-0{,}3627) + 544{,}8 \cdot 49{,}7949 - 8 \cdot 1689{,}3681 = 99{,}99999886$$

$$2557545{,}89 \cdot (-0{,}3627) + 37252{,}5 \cdot 49{,}7949 - 544{,}8 \cdot 1689{,}3681 = 6868{,}899922$$

$$176283401{,}64 \cdot (-0{,}3627) + 2557545{,}89 \cdot 49{,}7949 - 37252{,}5 \cdot 1689{,}3681 = 472884{,}2246$$

Таким образом, получена конкретная формула, аппроксимирующая экспериментальную зависимость:

$$y = -0{,}3627x^2 + 49{,}7949x - 1689{,}3681c$$

Расчеты по формуле (3) дали следующие результаты, приведенные в таблице 2 и на графике (рисунок 2).

Таблица 3 - Расчетные данные

x	61,45	63,25	65,25	67,15	69,05	70,95	72,85	74,75
y	0,9361	9,543	15,5312	18,9007	19,6515	17,8366	13,297	6,1918

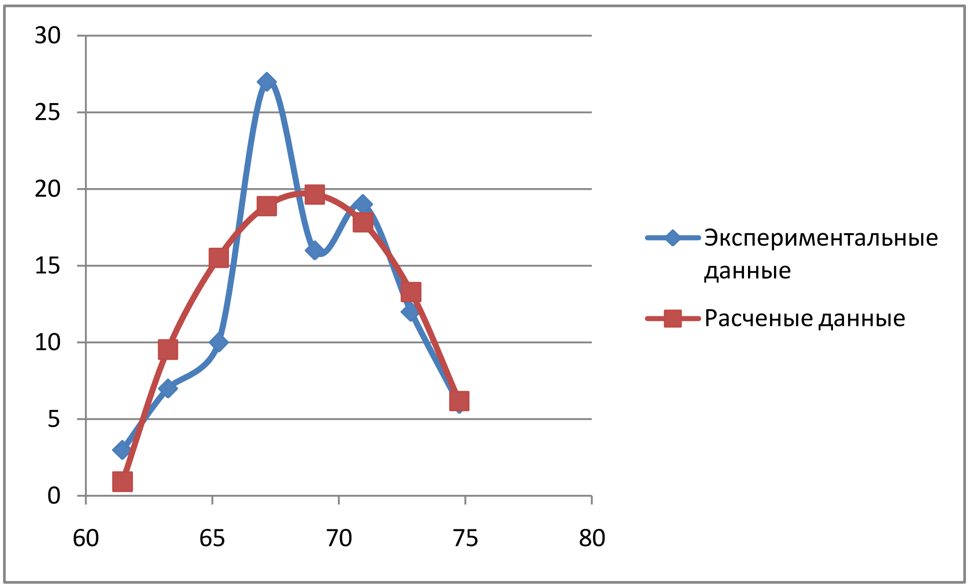

Рисунок 2 - Аппроксимация экспериментальных данных

Найдем величину среднеквадратичного отклонения отдельных замеров от аппроксимирующей кривой и величину среднеквадратического отклонения от кривой в целом:

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{8}(y_i - y_{iэ})^2}{n}} = 1{,}1092$$

$$\bar{S}_y = \frac{S_y}{n} = 0{,}0111.$$

ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ №3

Оценка погрешности экспериментального определения физической величины

Прибором измерено 10 отсчетов физической величины, Класс точности прибора 2,5, максимальное значение шкалы А =200 В. Необходимо обработать результаты измерений, обеспечив 98% надежности оценки напряжения. Варианты индивидуальных заданий приведены в приложении А.

Элементы теории измерений

Всякое экспериментальное исследование процесса обработки металлов давлением состоит из одного или нескольких измерений каких-то параметров a_1, a_2, $a_3 \ldots a_n$ с некоторой точностью.

Под измерением понимают сравнение измеряемой величины с другой величиной, принятой за единицу измерения (эталон). Результат измерения выражается числом.

Измерения разделяются на прямые и косвенные (рисунок 1).

При прямых измерениях определенная величина сравнивается с единицей измерения непосредственно или при помощи измерительного прибора. Примеры прямых измерений: измерение длин линейкой, штангенциркулем, масс с помощью гирь, времени посредством часов.

При косвенных измерениях измеряемая величина определяется из результатов прямых измерений других величин, которые связаны с измеряемой величиной определенной функциональной зависимостью. Например, объем цилиндрического тела высотой H и диаметром D:$V = \frac{\pi}{4} D^2 H$, плотность тела массой M и объемом V:$p = \frac{M}{V}$.

При измерении любой величины мы никогда не получаем истинного значения этой величины. Результат измерения дает лишь приближенное значение. Поэтому любые измерения всегда производятся с какими-то погрешностями (ошибками). Ошибки подразделяются на две группы: систематические и случайные (рисунок 1).

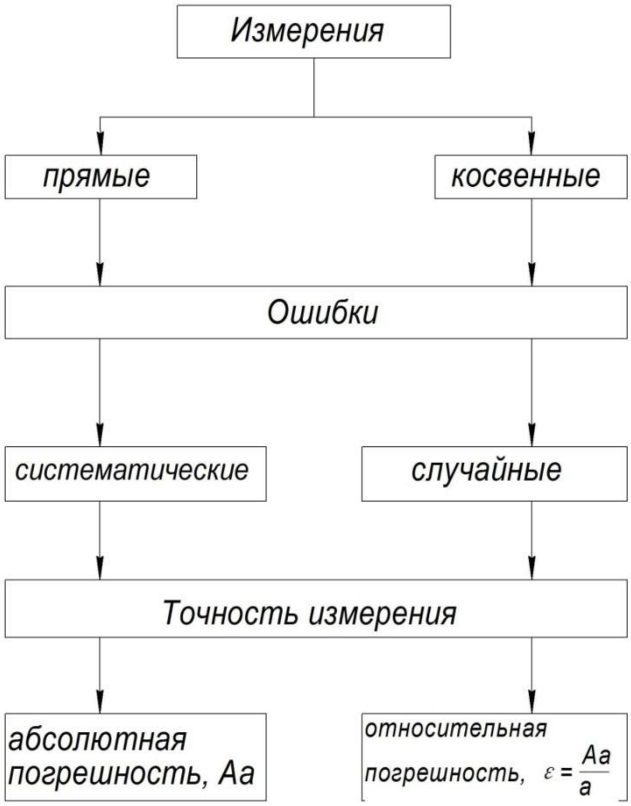

Рисунок 1 - Виды измерений, ошибки и погрешность

Систематические ошибки – это ошибки, связанные с ограниченной точностью изготовления прибора, неправильным выбором метода измерений, неправильной установкой прибора. Систематические ошибки вызываются вполне определенными причинами. Их величина при повторных измерениях остается постоянной (рисунок 2), либо измеряется по определенному закону. Примеры: положение нуля термометра может не соответствовать нулевой температуре, капилляр термометра в разных участках может иметь разное сечение и т. д.

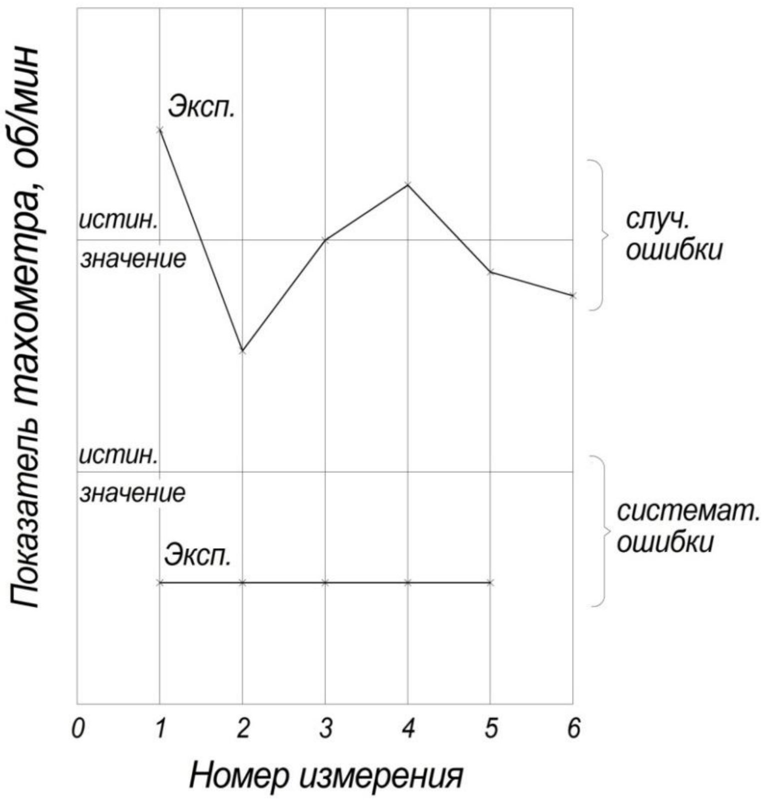

Рисунок 2 - Различие между случайной и систематической ошибками

Если известны причины вызывающие систематические ошибки, последние могут быть исключены путем введения поправок при измерениях.

Случайные ошибки вызываются большим числом случайных причин, действие которых на каждое измерение различно и не может быть учтено. Поэтому при последовательных измерениях одной и той же величины получают различные числовые значения.

Исключить случайные ошибки нельзя, но оценить ошибки, с которыми получен результат, возможно. Ошибки такого типа подчиняются законам теории вероятностей, установленным для случайных явлений.

В основе теории погрешностей лежат два предположения, подтверждаемые опытом.

При большом числе измерений случайные ошибки одинаковой величины, но разного знака, встречаются одинаково часто.

Большие по абсолютной величине погрешности встречаются реже, чем малые.

Абсолютная и относительная погрешности характеризуют измерительное средство (прибор) только при одном его показании. Полностью оценить качество прибора можно по его *приведённой погрешности*: $\gamma\ = \Delta x/x_{\text{н}}$, где $x_{\text{н}}$– нормирующее значение (условно принятое значение, которое может быть равно верхнему пределу или диапазону шкалы и т.д.). По приведённой погрешности указывается *класс точности прибора* и обозначается на их шкале. Для определения соответствия прибора его классу точности, прибор периодически подвергают поверке, при которой определяют максимальное значение приведённой погрешности и *вариацию показаний*$\varepsilon = \delta x/x,$ где δx– максимальная разность между показаниями прибора при прямом и обратном ходе; x – нормирующее значение. Вариация прибора должна быть меньше его приведённой погрешности (класса точности). Класс точности указан на панели прибора и может принимать следующий ряд значений: 0,05; 0,1; 0,2; 0,5 – прецизионные; 1,0; 1,5; 2,5; 4,0 – технические приборы. Менее точные приборы обозначения класса не имеют. Если на приборе указан класс точности 0,5, то это значит, что показания прибора правильны с точностью до 0,5 % от всего диапазона измерений по шкале прибора. Например, если вольтметр имеет шкалу, градуированную до 150В, класс точности 0,5, то он даёт абсолютную основную погрешность не более ±0,75 В.

Максимальные погрешности, даваемые измерительными линейками, микрометрами и некоторыми другими приборами, иногда наносятся на самом приборе или указываются в прилагаемом к нему паспорте. Если таких указаний нет, точность измерений составляет не менее 0,2 цены деления шкалы прибора.

Методика обработки прямых измерений

Наилучшей оценкой истинного значения величины X является выборочное среднее значение

$$\langle x\rangle = \frac{\int_{n=1}^{N} x_N}{N} \tag{1}$$

где x_N– отсчёт величины X; N– число отсчётов.

Для оценки разброса отсчётов при измерении используется выборочное среднее квадратичное отклонение отсчётов

$$S_x = \sqrt{\frac{\int_{n=1}^{N}(x_N - \langle x \rangle)^2}{N-1}} \quad (2)$$

Выборочное среднее значение является случайной величиной и егоразброс относительно истинного значения измеряемой величины оценивается*выборочным средним квадратичным отклонением среднего значения*

$$S_{\langle x \rangle} = \frac{S_x}{\sqrt{N}} \quad (3)$$

Доверительным интервалом называется интервал$[\langle x \rangle - \Delta, \langle x \rangle + \Delta\ ]$,который с заданной степенью достоверности включает в себяистинное значение измеряемой величины.

Доверительной вероятностью (надёжностью) результата серии наблюдений называется вероятность α, с которой доверительный интервал включает истинное значение измеряемой величины.

Случайную составляющую погрешности принято выражать как полуширину доверительного интервала. Размер доверительного интервала обычно задают в виде кратного$S_{\langle x \rangle}$значения.

Тогда случайная составляющая погрешности многократных измерений определяется как:

$$\Delta_x = t_\alpha S_{\langle x \rangle} \quad (4)$$

где t_α– безразмерный коэффициент доверия (коэффициент Стьюдента).

Таблица 1 - Значения коэффициента Стьюдента в зависимости от числа измерений

Число измерений	Надёжность					
1	0,5	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
2	1	6,3	12,7	31,8	63,7	636,6
3	0,82	2,9	4,3	7,0	9,9	31,6
4	0,77	2,4	3,2	4,5	5,8	12,9
5	0,74	2,1	2,8	3,7	4,6	8,6
6	0,73	2,0	2,6	3,4	4,0	6,9
7	0,72	1,9	2,4	3,1	3,7	6,0
8	0,71	1,9	2,4	3,0	3,5	5,4
9	0,71	1,9	2,3	2,9	3,4	5,0
10	0,70	1,8	2,3	2,8	3,2	4,8
20	0,69	1,7	2,1	2,5	2,8	3,8
>20	0,67	1,6	2,0	2,5	2,8	3,3

Коэффициент t_αпоказывает, во сколько раз нужно увеличить $S_{\langle x\rangle}$,чтобы при заданном числе измерений получить заданную надёжность их результата. Коэффициент t_αопределяют по статистическим таблицам (таблица 1).

Полная погрешность Δx *прямых измерений* равна квадратичной сумме её составляющих: инструментальной Δ_a и случайной Δ_x, т.е.

$$\Delta x = \sqrt{{\Delta_a}^2 + {\Delta_x}^2}$$

Обработку прямых измерений рекомендуется начинать с проверки отсчётов на наличие *промахов*. Из полученного ряда, содержащего *N*отсчётов, выбирается аномальный отсчёт x_kи вычисляется модуль его отклонения от среднего значения в долях выборочного среднего квадратичного отклонения:

$$\Delta Z = \frac{|x_k - \langle x\rangle|}{S_x}$$

5)

Затем вычисляется вероятность этого отклонения, а также ожидаемое число *n*измерений, которые дадут отсчёты, имеющие отклонение *Z*не меньшее, чем испытуемый. Если получено n< 0,5 (при округлении до целого n= 0), то отсчётx_kсчитается промахом. Эту процедуру можно изменить и вычислить ожидаемое число *M*отсчётов, среди которых будет хотя бы один аномальный.

Если M>N,то отсчёт x_k считается промахом. Связь между Mи Zприведена в таблице 2:

Таблица 2 - Отбор промахов по критерию Шовене

Z	M	Z	M	Z	M	Z	M	Z	M
1,00	2	1,40	3	1,80	7	2,20	18	2,60	54
1,02	2	1,42	3	1,82	7	2,22	19	2,62	57
1,04	2	1,44	3	1,84	8	2,24	20	2,64	60
1,06	2	1,46	3	1,86	8	2,26	21	2,66	64
1,08	2	1,48	4	1,88	8	2,28	22	2,68	68
1,10	2	1,50	4	1,90	9	2,30	23	2,70	72
1,12	2	1,52	4	1,92	9	2,32	25	2,72	77
1,14	2	1,54	4	1,94	10	2,34	26	2,74	81
1,16	2	1,56	4	1,96	10	2,36	27	2,76	87
1,18	2	1,58	4	1,98	10	2,38	29	2,78	92
1,20	2	1,60	5	2,00	11	2,40	30	2,80	98
1,22	2	1,62	5	2,02	12	2,42	32	2,82	104
1,24	2	1,64	5	2,04	12	2,44	34	2,84	111
1,26	2	1,66	5	2,06	13	2,46	36	2,86	118
1,28	2	1,68	5	2,08	13	2,48	38	2,88	126
1,30	3	1,70	6	2,10	14	2,50	40	2,90	134
1,32	3	1,72	6	2,12	15	2,52	43	2,92	143
1,34	3	1,74	6	2,14	16	2,54	45	2,94	152
1,36	3	1,76	6	2,16	16	2,56	48	2,96	163
1,38	3	1,78	7	2,18	17	2,58	51	2,98	173

Алгоритм обработки прямых измерений:

1. Определить инструментальную погрешность.
2. Вычислить среднее значение серии измерений по формуле (1).
3. Вычислить среднее квадратичное отклонение отсчёта по формуле (2). Если промах устранён, то перейти к формуле (4), иначе к (3).
4. Проверить отсчёты на наличие промаха:

- отобрать аномальный отсчёт;
- вычислить его относительное отклонение по формуле (5);
- определить ожидаемое число отсчётов, среди которых может быть аномальный, если это число больше числа отсчётов, то исключить аномальный

отсчёт и перейти к формуле (1); иначе перейти к (4).

5. Вычислить выборочное среднее квадратичное отклонение среднего значения по формуле (3).

6. Определить коэффициент доверия для заданной надёжности и полученного числа отсчётов.

7. Вычислить случайную погрешность по формуле (4).

8. Вычислить полную погрешность.

9. После округлений результат обработки измерений записать в форме:

$$\mathrm{x} = (\langle \mathrm{x} \rangle \pm \Delta \mathrm{x})/\mathrm{Y};\ \delta = (\Delta \mathrm{x}/\langle \mathrm{x} \rangle) \cdot 100\%;\ \alpha.$$

Пример выполнения индивидуального задания № 3

Вольтметром измерено 10 отсчётов напряжения *U*в электрической цепи. Вольтметр, класс точности которого *K*= 2,5, имеет максимальное значение шкалы, равное *A*= 200 В. Результаты измерений представлены в таблице 3. Необходимо обработать результаты измерений, обеспечив 98 % надёжность оценки напряжения.

Таблица 3 – Результаты измерения напряжения

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
U, В	**145**	**140**	**145**	**105**	**130**	**150**	**150**	**155**	**175**	**160**

Вычисляем инструментальную погрешность:

$$\Delta a = \frac{\text{КА}}{100} = \frac{2{,}5 \cdot 200}{100} = 5\ \text{В}$$

Для заданной доверительной вероятности α = 98% и количества отсчётов $\mathrm{N} = 10$определяем коэффициент доверия $t_{98,\,10}$ = 2,8 (см. таблица 1). Вычисляем среднее значение $\langle \mathrm{U} \rangle = 146$ В. Вычисляем среднее квадратичное отклонение отсчётов

$$S_U = \sqrt{\frac{\int_n^N (U_n - \langle U \rangle)^2}{N-1}} = 18{,}6\ \text{В}$$

Проверяем отсчёты на наличие промахов. Аномальным отсчётом является отсчёт № 4. Вычисляем нормированное отклонение Uот среднего значения

$$z = \frac{|U_4 - \langle U \rangle|}{S_U} = \frac{|105 - 146|}{18{,}6} = 2{,}17$$

Согласно таблице 2, количество опытов, при котором полученный отсчёт нельзя считать промахом, равно 17. Это число больше, чем N= 10. Следовательно, отсчёт № 4 является промахом и его нужно удалить из обрабатываемого ряда. Для нового ряда отсчётов напряжения вычисляем новое среднее значение и среднее чайную составляющую погрешности

$$\mathrm{S}_{\langle \mathrm{U} \rangle} = \frac{\mathrm{S_U}}{\sqrt{\mathrm{N}}} = \frac{12{,}7}{\sqrt{9}} = 4{,}23 \text{ В}, \qquad \Delta_{\langle \mathrm{U} \rangle} = t_{\alpha,N} \cdot \mathrm{S}_{\langle \mathrm{U} \rangle} = 2{,}9 \cdot 4{,}23 = 12{,}2 \text{ В}.$$

Вычисляем полную погрешность: абсолютную $\Delta U = \sqrt{5^2 + 12{,}2^2} = 13{,}18$ после округления $\Delta U = 10$ В и относительную $\delta U = \frac{\Delta \mathrm{U}}{\langle \mathrm{U} \rangle} = 10/150 = 6{,}6$ %. После округлений результат измерения напряжения записываем в виде:

U= 150 ± 10 В, $\alpha = 98\%$, $\delta = 7\%$.

Рекомендуемая литература

1.ГОСТ 7.32-2001 (ИСО 5966-82). Отчет о научно-исследовательской работе. Структура и правила оформления.

2. Кассандрова, О.Н. Обработка результатов наблюдений [Текст] / О.Н. Кассандрова, В. В. Лебедев. - М.: Наука, 1970.

3. Каргин, В.Р. Основы инженерного эксперимента [Текст]: учеб. пособие / В.Р. Каргин, В.М. Зайцев. - Самара: СГАУ, 2001.

4. Шейк, Х. Теория инженерного эксперимента [Текст] / Х. Шейк-М. - Мир, 1972.

5. Ванин, В.А. Научные исследования в технологии машиностроения [Текст] / В.А. Ванин, В.Г. Однолько, С.И. Пестрецов, В.Х. Фидаров, А.Н. Колодин. - Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2009. - 232 с.

6. Зайдель, А.М. Ошибки измерения физических величин [Текст] / А.М. Зайдель. - Л.: Наука, 1974. - 108 с.

7. Румшинский, Л.З. Математическая обработка результатов эксперимента [Текст] / Л.З. Румшинский. - М.: Наука, 1971. - 192 с.

8. Кремер, Н.Ш. Теория вероятности и математическая статистика: учебник для вузов [Текст] / Н. Ш. Кремер. - М.: ЮНИТА-ДАНА, 2001. - 543 с.

9. Круглов, В.И. Методология научных исследований в авиа-и ракетостроении: учеб. пособие [Текст] / В.И. Крутов, В.И. Ершов, А.С. Чумадин, В.В. Курицына. - М.: Логос, 2011. - 432 с.

10. Каргин, В. Р. Методология экспериментальных исследований: учеб. Пособие [Текст] / В.Р. Каргин, Б.В. Каргин, А.Е. Афанасьев. - Самара: Изд-во СГАУ, 2015. - 84 с.

11. Большев, Л.Н. Таблицы математической статистики [Текст] / Л.Н. Большев, Н.В. Смирнов. - М.: Наука, 1983. - 416 с.

12. Мельниченко, А.С. Анализ данных В материаловедении. Часть1 [Текст] / А. С. Мельниченко. - М.: Изо. Дом МИСиС, 2013. - 72 с.

13. Мельниченко, А.С. Анализ данных в материаловедении. Часть 2. [Текст] / А.С. Мельниченко. - М.: Изо. Дом МИСиС, 2014. - 87 с.

Приложение А

Таблица значений функции $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,24	0,0948	0,48	0,1844	0,72	0,2642
0,01	0,0040	0,25	0,0987	0,49	0,1879	0,73	0,2673
0,02	0,0080	0,26	0,1026	0,50	0,1915	0,74	0,2703
0,03	0,0120	0,27	0,1064	0,51	0,1950	0,75	0,2734
0,04	0,0160	0,28	0,1103	0,52	0,1985	0,76	0,2764
0,05	0,0199	0,29	0,1141	0,53	0,2019	0,77	0,2794
0,06	0,0239	0,30	0,1179	0,54	0,2054	0,78	0,2823
0,07	0,0279	0,31	0,1217	0,55	0,2088	0,79	0,2852
0,08	0,0319	0,32	0,1255	0,56	0,2123	0,80	0,2881
0,09	0,0359	0,33	0,1293	0,57	0,2157	0,81	0,2910
0,10	0,0398	0,34	0,1331	0,58	0,2190	0,82	0,2939
0,11	0,0438	0,35	0,1368	0,59	0,2224	0,83	0,2967
0,12	0,0478	0,36	0,1406	0,60	0,2257	0,84	0,2995
0,13	0,0517	0,37	0,1443	0,61	0,2291	0,85	0,3023
0,14	0,0557	0,38	0,1480	0,62	0,2324	0,86	0,3051
0,15	0,0596	0,39	0,1517	0,63	0,2357	0,87	0,3078
0,16	0,0636	0,40	0,1554	0,64	0,2389	0,88	0,3106
0,17	0,0675	0,41	0,1591	0,65	0,2422	0,89	0,3133
0,18	0,0714	0,42	0,1628	0,66	0,2454	0,90	0,3159
0,19	0,0753	0,43	0,1664	0,67	0,2486	0,91	0,3186
0,20	0,0793	0,44	0,1700	0,68	0,2517	0,92	0,3212
0,21	0,0832	0,45	0,1736	0,69	0,2549	0,93	0,3238
0,22	0,0871	0,46	0,1772	0,70	0,2580	0,94	0,3264
0,23	0,0910	0,47	0,1808	0,71	0,2611	0,95	0,3289
0,96	0,3315	1,37	0,4147	1,78	0,4625	2,36	0,4909
0,97	0,3340	1,38	0,4162	1,79	0,4633	2,38	0,4913
0,98	0,3365	1,39	0,4177	1,80	0,4641	2,40	0,4918
0,99	0,3389	1,40	0,4192	1,81	0,4649	2,42	0,4922
1,00	0,3413	1,41	0,4207	1,82	0,4656	2,44	0,4987
1,01	0,3438	1,42	0,4222	1,83	0,4664	2,46	0,4931
1,02	0,3461	1,43	0,4236	1,84	0,4671	2,48	0,4934
1,03	0,3485	1,44	0,4251	1,85	0,4678	2,50	0,4938
1,04	0,3508	1,45	0,4265	1,86	0,4686	2,52	0,4941
1,05	0,3531	1,46	0,4279	1,87	0,4693	2,54	0,4945
1,06	0,3554	1,47	0,4292	1,88	0,4699	2,56	0,4948
1,07	0,3577	1,48	0,4306	1,89	0,4706	2,58	0,4951
1,08	0,3599	1,49	0,4319	1,90	0,4713	2,60	0,4953
1,09	0,3621	1,50	0,4332	1,91	0,4719	2,62	0,4956
1,10	0,3643	1,51	0,4345	1,92	0,4726	2,64	0,4959
1,11	0,3665	1,52	0,4357	1,93	0,4732	2,66	0,4961
1,12	0,3686	1,53	0,4370	1,94	0,4738	2,68	0,4963
1,13	0,3708	1,54	0,4382	1,95	0,4744	2,70	0,4965

1,14	0,3729	1,55	0,4394	1,96	0,4750	2,72	0,4967
1,15	0,3749	1,56	0,4406	1,97	0,4756	2,74	0,4969
1,16	0,3770	1,57	0,4418	1,98	0,4761	2,76	0,4971
1,17	0,3790	1,58	0,4429	1,99	0,4767	2,78	0,4973
1,18	0,3810	1,59	0,4441	2,00	0,4772	2,80	0,4974
1,19	0,3830	1,60	0,4452	2,02	0,4783	2,82	0,4976
1,20	0,3849	1,61	0,4463	2,04	0,4793	2,84	0,4977
1,21	0,3869	1,62	0,4474	2,06	0,4803	2,86	0,4979
1,22	0,3883	1,63	0,4484	2,08	0,4812	2,88	0,4980
1,23	0,3907	1,64	0,4495	2,10	0,4821	2,90	0,4981
1,24	0,3925	1,65	0,4505	2,12	0,4830	2,92	0,4982
1,25	0,3944	1,66	0,4515	2,14	0,4838	2,94	0,4984
1,26	0,3962	1,67	0,4525	2,16	0,4846	2,96	0,4985
1,27	0,3980	1,68	0,4535	2,18	0,4854	2,98	0,4986
1,28	0,3997	1,69	0,4545	2,20	0,4861	3,00	0,4986
1,29	0,4015	1,70	0,4554	2,22	0,4868	3,20	0,4993
1,30	0,4032	1,71	0,4564	2,24	0,4875	3,40	0,4996
1,31	0,4049	1,72	0,4573	2,26	0,4881	3,60	0,4998
1,32	0,4066	1,73	0,4582	2,28	0,4887	3,80	0,4999
1,33	0,4082	1,74	0,4591	2,30	0,4893	4,00	0,4999
1,34	0,4099	1,75	0,4599	2,32	0,4898	4,50	0,4999
1,35	0,4115	1,76	0,4608	2,34	0,4904	5,00	0,4999
1,36	0,4131	1,77	0,4616				

Приложение Б

Таблица значений функции $\varphi(x \ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \ ^{-x^3/2}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3956	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3885	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,35802	0,3790	0,3778	0,3778	0,3752	0,3739	0,3726	0,3712	0,3697
0,4	0,3689	0,3668	0,3652	0,3637	0,3637	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3467	0,3429	0,3410	0,3391	0,3166	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3271	0,3230	0,3209	0,3187	0,2943	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1,0	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2331	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2,0	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0897	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3,0	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001

Приложение В

Критические точки распределения χ^2

Число степеней свободы k	Уровень значимости α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,89
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,544
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56

Приложение Г

Варианты индивидуального задания № 1

Выборка 1

340	355	316	347	313	340	337	360	315	313
311	317	320	281	325	328	370	347	313	374
336	328	337	342	341	343	354	335	337	343
313	359	343	349	331	340	300	353	336	314
356	326	398	327	346	344	353	376	315	304
341	328	342	348	337	303	344	342	343	334
298	378	287	339	386	293	357	336	388	357
320	339	362	358	341	328	329	352	372	300
358	350	324	355	322	336	288	337	348	316
315	303	320	358	380	358	354	350	326	382

Выборка 2

58	78	84	62	63	100	55	90	102	70	66	89
71	92	71	93	83	42	110	110	56	96	95	87
88	102	104	88	64	96	92	67	78	95	71	105
50	66	73	76	100	72	86	46	102	95	98	84
82	46	60	94	109	93	79	74	62	97	94	91
81	71	89	78	85	80	93	64	65	109	89	55
103	98	108	68	65	71	82	70	84	73	65	79
99	81	92	76	82	92	75	45	94	81	84	68
77	90	103	119	57	102	100	83	68	69	68	81
83	69	90	99	69	85	84	70	80	117	76	104
78	114	79	70	56	62	73	71	77	98	86	82
54	62	82	103	91	61	93	68	109	96	67	110
84	82	56	78	80	88	66	78	65	50	88	72
94	92	89	109	69	58	75	72	101	92	75	77
85	76	85	84	68	74	78	87	69	75	61	53

70	106	68	81	61	64	100	73	44	57	63	102
96	80										

Выборка 3

354	427	489	448	503	460	551	519	321	444
460	533	481	378	473	409	506	328	489	370
469	403	395	417	460	450	378	471	547	414
396	397	368	475	486	419	417	411	400	431
484	458	519	520	446	396	447	387	464	352
412	369	459	436	417	416	467	392	377	396
397	440	419	400	382	434	418	433	429	377
514	393	437	452	432	481	454	444	384	347
370	426	436	439	437	460	431	493	422	454
507	435	510	470	408	413	400	418	343	492

Выборка 4

61	59	60	50	58	71	57	61	55	75	68	65	63	68	60
66	52	70	69	62	58	56	54	65	61	67	64	58	61	64
71	60	51	54	57	56	55	57	65	56	61	49	67	64	59
65	63	72	67	54	53	58	69	63	66	55	57	68	53	61
55	69	54	65	54	61	66	65	57	60	72	62	68	61	62
52	62	55	70	72	64	71	54	58	71	66	65	66	62	68
60	64	63	61	60	64	65	68	64	66	69	53	57	59	62
55	65	56	57	72	53	62	68	63	57	55	68	59	61	63
62	63	62	59	67	56	65	67	56	69	63	53	55	67	61
54	68	59	63	67	57	64	68	76	64	64				

Выборка 5

371	377	405	319	330	368	371	356	366	339
344	400	368	363	360	385	346	416	366	384
455	230	332	319	309	325	361	298	284	309
268	321	346	361	354	352	301	324	283	426

423	343	291	453	385	361	371	412	333	357
385	335	335	331	394	413	361	363	416	357
393	331	312	437	269	327	300	354	411	329
352	279	350	308	444	386	378	430	351	397
290	414	379	388	247	306	460	377	351	364
436	343	413	426	350	292	448	454	377	327

Выборка 6

135	133	124	132	104	152	134	130	129	120	122	124
117	123	123	129	121	122	125	131	147	124	137	112
126	128	111	129	115	147	131	132	137	119	125	120
129	125	123	127	132	118	133	132	132	134	131	120
135	132	125	132	108	114	121	133	133	135	131	125
114	115	122	131	125	132	120	126	115	117	118	118
132	134	127	127	124	135	128	127	115	144	129	120
137	127	125	116	132	120	117	127	118	109	127	122
120	135	116	118	133	136	125	126	119	126	129	127
129	124	127	132	126	131	127	130	126	124	135	127
124	123	123	130	132	143	122	139	120	134	108	132
121	111	123	140	137	120	125	131	118	120	120	136
129	127	116	138	128	133	122	131	128	140	138	134
120	126	109	137	111	115	117	130	113	126	115	124
125	118	115	128	123	129	128	120	115	134	118	135
134											

Выборка 7

584	641	606	528	610	668	517	633	632	625
692	668	634	578	523	576	646	654	485	657
578	660	609	572	725	660	579	599	647	676
521	712	566	579	487	688	646	739	560	683
557	630	615	585	593	698	763	660	551	699
632	569	581	614	563	554	611	547	688	521
646	624	626	622	674	621	535	602	694	672
605	656	618	765	750	574	438	638	641	593
805	629	625	547	684	619	675	580	516	617
551	638	551	515	660	638	744	600	585	568

Выборка 8

71	62	43	80	70	44	42	25	48	55	58	44	74	55	56
49	54	63	60	57	70	52	74	65	61	60	72	69	68	47
30	62	81	56	55	38	68	55	74	50	29	35	55	52	27
58	50	62	80	49	68	68	81	66	64	41	45	48	68	79
56	82	76	84	47	44	72	58	58	80	61	55	66	36	69
44	88	88	73	39	70	70	35	51	69	50	59	35	43	71
54	65	85	63	59	52	88	64	60	61	31	64	48	49	50
41	62	42	76	81	76	70	76	75	53	66	87	74	61	68
73	44	61	53	46	69	71	58	63	73	56	65	53	77	39
83	45	55	77	61	42	72	49	52	67	62	68	72	46	76
67	53	70	76	56	62	38	59	53	50	76	52	73	34	51
60	61													

Выборка 9

704	639	703	718	678	727	682	685	649	701
628	674	647	707	754	677	751	684	750	680
650	667	692	676	716	707	647	680	681	662
685	688	637	698	606	716	676	689	667	694
707	719	661	641	733	745	643	680	706	644
721	668	669	612	686	664	644	670	605	689
685	680	679	673	726	647	679	732	701	705
670	670	681	748	640	668	672	702	711	721
722	735	736	722	717	660	667	732	682	693
703	741	638	697	725	682	717	712	667	673

Выборка 10

484	394	375	318	471	308	252	269	390	251
352	287	464	417	304	448	291	379	315	469
381	400	342	456	383	442	365	393	385	284
274	339	322	194	377	230	332	339	414	392
244	426	311	398	404	216	373	288	297	279
457	455	320	287	484	182	322	326	322	365
359	379	378	319	251	362	298	261	339	329

251	403	417	268	375	282	403	381	306	381
377	410	182	266	308	470	363	370	327	375
525	371	295	307	408	260	395	468	252	297

Выборка 11

493	454	451	584	480	467	574	551	474	523
470	519	456	459	467	501	486	554	452	471
507	442	474	481	455	595	404	500	454	445
493	487	578	481	599	584	474	415	515	479
441	534	525	443	485	480	495	510	471	468
425	506	454	410	565	506	484	485	458	461
489	512	470	486	436	486	569	484	435	499
443	432	505	463	575	493	410	489	548	462
438	505	520	454	404	418	500	437	380	439
498	474	543	491	506	529	486	451	475	354

Выборка 12

58	49	46	53	63	64	53	46	59	64	50	55	57	55	68
48	58	54	59	66	61	69	70	51	60	47	50	43	62	48
40	51	46	58	63	51	65	55	55	61	45	50	44	45	57
65	52	60	58	27	41	60	44	38	44	59	72	43	60	50
55	53	51	33	53	70	55	60	50	51	50	55	57	58	61
52	46	56	65	52	61	52	65	51	58	54	55	64	58	68
52	52	47	48	55	58	72	53	59	42	41	59	56	28	50
47	54	52	60	47	55	48	64	63	72	51	55	50	65	66
42	63	59	60	70	54	40	58	49	66	59	55	50	46	58
73	41	68	54	48	52	52	50	67	59	43	64	57	71	67
54	63	63	65	60	47	72	58	55	52	53	49	59	43	45
45	40	54	77	49	56	45	64	69	57	50	59	74	47	38
54	57	52	63	42	41	57	60	60	52	49	46	60	71	57
47	52	51	59	42	56	43	50	44	45	59	54	56	71	63
50	46	42	48	59	53	64	53	54	72	55				

Выборка 13

295	451	332	332	420	341	315	300	314	388
354	364	367	295	404	323	343	303	350	318
283	287	360	337	319	351	361	335	313	338

362	350	355	319	366	355	300	374	357	337
398	371	347	355	328	390	396	347	332	334
323	455	318	353	400	364	316	349	420	370
327	302	361	275	410	319	397	327	354	381
378	277	376	358	422	322	362	367	351	368
318	413	361	356	357	344	353	311	343	335
393	329	347	334	393	350	327	316	359	352

Выборка 14

615	598	541	647	531	658	591	584	617	599
558	601	548	582	512	639	574	616	550	616
587	589	595	620	605	573	597	548	518	745
502	637	559	626	562	541	611	623	688	531
567	601	649	576	583	584	548	593	547	556
511	531	607	436	663	565	589	498	704	513
581	613	500	643	513	556	557	583	635	599
539	693	592	527	583	581	571	506	599	644
659	609	576	582	644	562	614	434	496	614
557	496	501	555	471	565	511	530	614	636

Выборка 15

610	556	671	690	617	472	643	426	547	535
577	412	604	474	702	516	605	639	579	731
432	683	592	582	559	505	542	636	545	572
597	706	612	689	621	597	487	525	562	626
558	562	627	534	510	655	688	579	479	559
592	514	456	595	625	534	604	561	626	542
593	544	452	535	473	738	637	564	640	643
539	636	543	499	614	603	605	550	562	621
511	662	552	552	502	422	626	631	502	512
525	661	498	565	566	606	650	465	689	630

Выборка 16

174	166	157	161	165	162	161	164	172	158	161	163
160	154	171	160	168	171	161	162	168	164	166	159
172	154	154	154	153	159	160	173	150	166	157	177
165	168	152	168	164	158	153	164	174	179	159	165
167	169	164	168	151	174	166	169	170	159	168	153
175	178	157	170	174	169	159	154	165	167	161	168
157	182	175	170	155	164	174	167	170	159	160	153
151	169	155	143	163	155	173	166	164	186	161	158
150	159	167	163	166	155	149	157	164	166	171	172
154	161	169	164	173	164	162	171	156	155	160	156
165	149	175	150	162	179	154	167	158	155	147	161
161	173	166	156	171	158	164	168	173	166	148	174
179	173	167	162	166	167	164	158	160	163	161	154
151	156	150	157	163	168	170	165	174	149	161	162
155	164	156	157	170	173	165	160	166	166	160	165
159	157	162	173	173	151	151	169	167	145	166	168
161	169	170	172	159	161	162	151	165	161	151	156
167	148	167	170	149	162	169	157	167	169	174	163
164	169	161	164	172	160	154	156	166	170	164	160
161	149	158	168	176	155						

Выборка 17

52	40	47	54	40	54	41	74	45	45	51	76	58	37	40
42	53	54	65	46	65	61	55	38	66	42	56	54	40	60
43	49	77	64	53	64	58	54	56	53	43	35	56	34	59
58	66	49	49	57	48	42	46	52	59	50	62	50	55	55
46	53	51	50	60	30	48	56	29	74	52	60	44	62	23
54	40	33	20	55	42	61	54	41	45	75	59	41	51	45
54	52	62	69	65	49	48	63	52	46	44	55	60	54	39
82	67	68	34	56	51	56	48	53	47	59	51	59	66	48
61	42	54	33	39	47	46	47	73	63	34	44	51	46	40
43	60	60	61	53	47	42	56	70	48	45	65	48	48	51
40	57	566	33	44	43	45	35	35	56	59	66	56	52	44
53	49	55	25	53	48	73	38	58	72	57	46	54	55	59
38	53	48	68	36	53	41	55	51	50	45	50	29	60	39
50	59	33	56	49	31	70	56	56						

Приложение Д

Варианты индивидуального задания 3.

Результаты измерений физической величины

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	56	156	145	199	126	100	126	146	180	190
2	120	65	166	155	156	154	156	185	152	152
3	166	175	172	174	182	185	152	192	194	152
4	135	156	156	152	154	182	174	123	159	154
5	123	145	123	125	200	125	156	155	182	182
6	166	184	182	174	177	182	192	192	189	185
7	188	152	153	145	192	198	199	182	156	182
8	200	199	182	199	189	110	182	182	171	166
9	158	166	182	182	156	192	182	152	162	172
10	166	169	182	192	194	192	195	189	199	182
11	144	111	105	106	108	105	152	150	140	142
12	111	105	105	159	105	156	185	150	105	104
13	156	158	150	150	145	145	148	174	152	156
14	100	101	110	100	110	150	120	102	111	122
15	102	102	200	120	155	156	100	100	155	150
16	150	150	120	156	155	156	155	100	155	154
17	120	120	122	122	156	150	120	116	119	115
18	110	150	120	152	124	152	100	155	154	145
19	123	124	122	144	145	156	145	145	122	102
20	45	65	21	55	55	24	24	26	25	33
21	55	66	41	44	44	120	42	56	54	22
22	66	74	69	65	56	49	70	66	56	65
23	180	181	126	174	182	182	200	158	156	200
24	45	66	55	66	66	68	65	65	54	66
25	80	82	80	81	81	82	81	82	82	84
26	45	45	42	40	44	44	43	45	45	40
27	60	59	58	58	61	65	59	65	65	55
28	77	78	75	75	76	80	79	78	79	77
29	199	189	189	179	178	189	185	187	188	187
30	55	60	59	57	57	55	60	61	58	58

Учебное издание

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МЕТОДОЛОГИЯ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ»

Методические указания к практическим занятиям

Составитель ***Каргин Владимир Родионович***

В авторской редакции

Подписано в печать 25.12.2017. Формат 60х84 1/16.
Бумага офсетная. Печ. л. 3,0.
Тираж 50 экз. Заказ .

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»
(Самарский университет)
443086, Самара, Московское шоссе, 34.

Изд-во Самарского университета.
443086, Самара, Московское шоссе, 34.