

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»  
(Самарский университет)

## КОНЦЕПЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ПРОЦЕССОВ

Рекомендовано редакционно-издательским советом федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева» в качестве методических указаний для студентов Самарского университета, обучающихся по основной образовательной программе высшего образования по направлениям подготовки 01.04.03 Механика и математическое моделирование, 24.04.01 Ракетные комплексы и космонавтика, 24.04.04 Авиастроение и по специальности 24.05.01 Проектирование, производство и эксплуатация ракет и ракетно-космических комплексов

Составители:  
В.С. Асланов,  
А.В. Алексеев

САМАРА  
Издательство Самарского университета  
2017

УДК 519.8(075)  
ББК 22.1я7

Составители: *В.С. Асланов, А.В. Алексеев*

Рецензент д-р техн. наук, доц. А.В. С е д е л ь н и к о в

**Концепции математического моделирования механических систем и процессов:** метод. указания / сост.: *В.С. Асланов, А.В. Алексеев*. – Самара: Изд-во Самарского университета, 2017. – 60 с.: ил.

В методических указаниях описаны конкретные примеры построения математических моделей механических систем и процессов различными методами. Для каждого принципа построения математических моделей приведены упражнения для самостоятельного решения.

Предназначены для студентов направлений подготовки 01.04.03 Механика и математическое моделирование, 24.04.01 Ракетные комплексы и космонавтика, 24.04.04 Авиастроение в рамках дисциплин по математическому моделированию, а также для специальности 24.05.01 Проектирование, производство и эксплуатация ракет и ракетно-космических комплексов в рамках курса «Теоретическая механика».

Разработаны на кафедре теоретической механики.

УДК 519.8(075)  
ББК 22.1я7

## Оглавление

1. Модели, получаемые из фундаментальных законов природы .....	4
1.1. Траектория всплытия подводной лодки .....	4
1.2. Отклонение заряженной частицы в электроннолучевой трубке .....	6
1.3. Колебания колец Сатурна .....	9
1.4. Движение шарика, присоединенного к пружине .....	11
1.5. Заключение .....	14
1.6. Упражнения .....	14
2. Модели, получаемые из вариационных принципов .....	16
2.1. Маятник на свободной подвеске .....	16
2.2. Непотенциальные колебания .....	21
2.3. Малые колебания струны .....	24
2.4. Электромеханическая аналогия .....	29
2.5. Упражнения .....	32
3. Примеры универсальных математических моделей .....	33
3.1. Жидкость в U-образном сосуде .....	33
3.2. Колебательный электрический контур .....	35
3.3. Малые колебания при взаимодействии двух биологических популяций .....	36
3.4. Простейшая модель изменения зарплаты и занятости .....	38
3.5. Заключение .....	39
3.6. Упражнения .....	39
4. Модели простейших нелинейных объектов .....	41
4.1. О происхождении нелинейности .....	41
4.2. Три режима в нелинейной модели популяции .....	41
4.3. Влияние сильной нелинейности на процесс колебаний .....	44
4.4. Применение численных методов .....	45
4.5. Упражнения .....	46
5. Модели, основанные на законе сохранения числа частиц .....	48
5.1. Основные понятия теории теплового излучения .....	48
5.2. Уравнение баланса числа фотонов в среде .....	51
5.3. Некоторые свойства уравнения переноса излучения .....	53
5.4. Упражнения .....	56
Библиографический список .....	57

# 1. Модели, получаемые из фундаментальных законов природы

## 1.1. Траектория всплытия подводной лодки

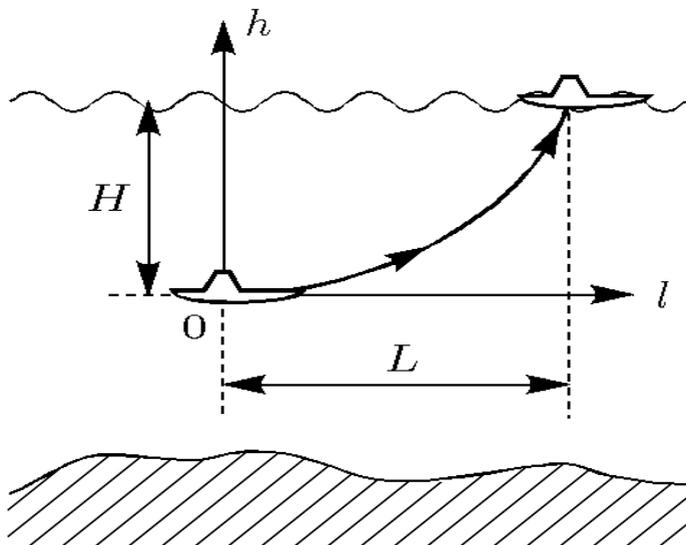


Рис. 1. Всплытие подводной лодки

Пусть подводная лодка, находящаяся в момент времени  $t = 0$  на глубине  $H$  от поверхности моря и движущаяся с постоянной горизонтальной скоростью  $v$  (рис. 1), получает приказ подняться на поверхность. Если промежуток времени, за который цистерны подлодки освобождаются от воды и заполняются воздухом, с тем чтобы ее средняя плотность  $\rho_1$  стала меньше плотности воды  $\rho_0$ , невелик, то можно считать, что в момент  $t = 0$  на подлодку начинает действовать выталкивающая сила, большая, чем вес лодки. По закону Архимеда выталкивающая сила равна  $F = gV\rho_0$ , где  $g$  – ускорение свободного падения,

$V$  – объем подлодки. Суммарная сила, действующая на подлодку, в вертикальном направлении, – разность между  $F$  и весом тела  $P = V\rho_0$ , а сообщаемое ею ускорение по второму закону Ньютона равно

$$\rho_1 V \frac{d^2 h}{dt^2} = F - P = gV(\rho_0 - \rho_1).$$

Координата  $l$ , характеризующая горизонтальное положение подлодки, изменяется по закону движения тела с постоянной скоростью:

$$\frac{dl}{dt} = v.$$

Решая эти уравнения, находим, что

$$h(t) = g \frac{\rho_0 - \rho_1}{\rho_1} t^2, \quad l(t) = vt \quad (1.1)$$

и что лодка всплывет на поверхность в момент  $t = t_k$ , когда

$$h(t_k) = g \frac{\rho_0 - \rho_1}{\rho_1} t_k^2 = H, \quad t_k = \left( \frac{\rho_1 H}{g(\rho_0 - \rho_1)} \right)^{1/2}.$$

При этом в горизонтальном направлении подлодка пройдет расстояние

$$L = vt_k = v \left( \frac{\rho_1 H}{g(\rho_0 - \rho_1)} \right)^{1/2}.$$

Исключая из (1.1) время, найдем траекторию движения подлодки в координатах  $(l, h)$

$$h = g \frac{\rho_0 - \rho_1}{\rho_1 v^2} l^2,$$

которая оказывается параболой с вершиной в точке  $l = 0, h = 0$  (при выводе (1.1) вертикальная скорость лодки, а также величины  $l$  и  $h$  принимались равными нулю в момент  $t = 0$ ). Считалось также, что никакие другие вертикальные силы, кроме  $F$  и  $P$ , на подлодку не действуют. Это предположение верно лишь при малых скоростях всплытия, когда можно пренебречь сопротивлением воды движению лодки.

Итак, непосредственное применение закона Архимеда, определяющего величину выталкивающей силы, и закона Ньютона, связывающего силу, действующего на тело, и его ускорение, позволило легко найти траекторию подложки. Очевидно, что параболической траекторией обладает любое движущееся в плоскости тело, имеющее по одному из направлений постоянную скорость и на которое в другом направлении действует постоянная сила (уравнения (1.1) фактически дают параметрическую запись параболы). К таким движениям относятся, например, полет камня, брошенного с высоты  $H$  с горизонтальной скоростью  $v$  или полет электрона в электрическом поле конденсатора. Однако в последнем случае получить траекторию тела непосредственно из фундаментальных законов нельзя, требуется применить более детальную процедуру. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

### ***1.2. Отклонение заряженной частицы в электроннолучевой трубке***

Будем считать, что обкладки конденсатора электроннолучевой трубки (рис. 2) представляют собой бесконечные плоскости (предположение справедливо в случае, если расстояние между обкладками много меньше их размеров, а электрон движется на большом удалении от их краев). Очевидно, что электрон будет притягиваться к нижней обкладке и отталкиваться от верхней. Сила притяжения  $F$  двух разноименных зарядов элементарно определяется из закона Кулона

$$F = \frac{q_1 q_2}{r^2},$$

где  $q_1$  и  $q_2$  – величины зарядов,  $r$  – расстояние между ними. Сложность заключается в том, что в данном примере на обкладке находится бесконечно много зарядов, каждый из которых расположен на своем расстоянии от движущегося электрона. Поэтому необходимо сначала найти силу, индуцируемую каждым зарядом, и затем, просуммировав все элементарные силы, определить результирующее действие обкладок на электрон.

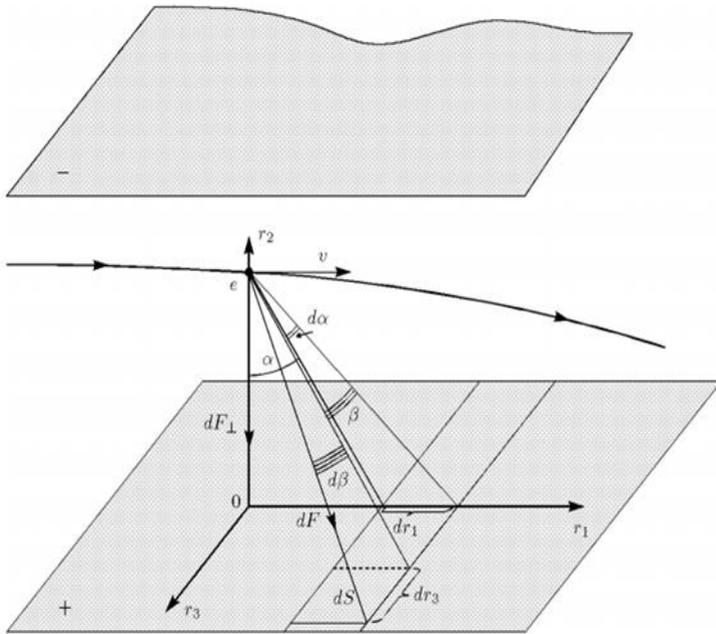


Рис. 2. Движение электрона между обкладками конденсатора

Разобьем всю плоскость нижней обкладки на элементарные «полоски», характеризующиеся координатами  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$ ;  $-\infty < r_1$ ,  $r_2 < \infty$ ,  $r_2 \equiv 0$  (рис. 2).

Подсчитаем силу натяжения электрона зарядом, находящимся на элементарной площадке  $ds = dr_1 dr_3$  и равным  $dq = q_0 ds$ , где  $q_0$  – поверхностная плотность заряда на обкладке. Если частица находится на расстоянии  $r_2$  от заряженной плоскости, то

$$dr_1 = r_2 (\operatorname{tg}(\alpha + d\alpha) - \operatorname{tg} \alpha) = r_2 \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha}$$

(здесь учитывается малость величины  $d\alpha$ ). Для определения величины  $dr_3$  имеем

$$\frac{r_3 + dr_3}{r_1 + dr_1} = \frac{\operatorname{tg}(\beta + d\beta)}{\sin(\alpha + d\alpha)}, \quad \frac{r_3}{r_2} = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

Из последних двух формул находим

$$dr_3 = r_2 r_1 \operatorname{tg}(\beta + d\beta) - r_1 \operatorname{tg} \beta = \frac{r_1 d\beta (\cos^2 \beta + dr_1 \operatorname{tg} \beta)}{\sin \alpha},$$

где, аналогично предыдущему, учтена также и малость величины  $d\beta$ . Умножая  $dr_1$  на  $dr_3$  и отбрасывая член более высокого порядка малости, получаем

$$ds = r_2 r_1 d\alpha d\beta (\cos^2 \alpha \cos^2 \beta \sin \alpha).$$

Сила притяжения электрона с зарядом  $q_e$  к элементарной площадке  $ds$  равна

$$dF = \frac{q_e q_0 r_2 r_1 d\alpha d\beta}{\bar{r}^2 \cos^2 \alpha \cos^2 \beta \sin \alpha},$$

где  $\bar{r}$  – «среднее» расстояние от электрона до площадки, которое с учетом малости величин  $d\alpha d\beta$  вычисляется по формуле  $\bar{r} = r_2 / (\cos \alpha \cos \beta)$ .

В итоге для элементарной силы имеем

$$dF = q_e q_0 \frac{r_1}{r_2} \frac{d\alpha d\beta}{\sin \alpha} = \frac{q_e q_0}{\cos \alpha} d\alpha d\beta,$$

а для ее вертикальной составляющей

$$dF_{\perp} = dF \cos \beta \cos \alpha = q_e q_0 \cos \beta d\alpha d\beta.$$

Проинтегрировав выражение для  $F_{\perp}$  по  $\beta$  от  $\beta = 0$  до  $\beta = \pi/2$ , найдем силу притяжения электрона к части элементарной «полоски», расположенной в квадранте  $r_1 > 0$ ,  $r_3 > 0$ :

$$dF_{\alpha}^{+} = q_e q_0 d\alpha.$$

Просуммировав  $dF_{\alpha}^{+}$  по  $\alpha$  от  $\alpha = 0$  до  $\alpha = \pi/2$  т.е. по всем полоскам квадранта  $r_1 > 0$ ,  $r_3 > 0$ , определим силу притяжения, индуцируемого зарядами, расположенными в этом квадранте:

$$dF^{+} = \frac{\pi}{2} q_e q_0.$$

Учитывая действие всех четырех квадрантов плоскости нижней обкладки и проводя аналогичные рассуждения для верхней обкладки, получим результирующую силу притяжения (отталкивания) электрона ко всем зарядам конденсатора

$$F = 4\pi q_e q_0. \quad (1.2)$$

Сила  $F$  направлена вдоль оси  $g_2$ , а по горизонтальной оси частица движется с постоянной скоростью  $v$ , то приходим к ситуации предыдущего пункта – применив второй закон Ньютона, легко получить формулы, аналогичные (1.1), описывающие движение электрона по параболической траектории и дающие возможность вычислить все ее параметры. Однако, в отличие от случая с подлодкой, прямое применение фундаментального закона Кулона для получения модели движения электрона оказывается невозможным. Потребовалось, опираясь на фундаментальный закон, сначала описать элементарный акт взаимодействия зарядов, и уж затем, просуммировав все эти акты, удалось найти результирующую силу.

Подобная ситуация и последовательность действий весьма типичны при построении моделей, так как многие фундаментальные законы устанавливают взаимоотношения как раз между элементарными частями исходного объекта. Это справедливо не только для электрических сил, но, например, и для сил тяготения.

### *1.3. Колебания колец Сатурна*

Построим модель движения точечной массы  $M_0$  в поле сил тяготения, создаваемом материальным кольцом с радиусом  $R_0$  и линейной плотностью  $\rho_0$ . Кольцо считается бесконечно тонким, движение происходит вдоль оси кольца (рис. 3).

Данная схема может рассматриваться как идеализация процесса колебаний колец Сатурна. Тем не менее, несмотря на существенные упрощения, непосредственное использование закона всемирного тяготения

$$F = \gamma \frac{m_0 m_1}{r^2},$$

где  $F$  – сила притяжения двух тел, имеющих массы  $m_0$  и  $m_1$ ,  $r$  – расстояние между ними,  $\gamma$  – постоянная тяготения, не может дать окончательной модели движения колец Сатурна, так как массы  $m_0$ ,  $m_1$  должны быть точечными.

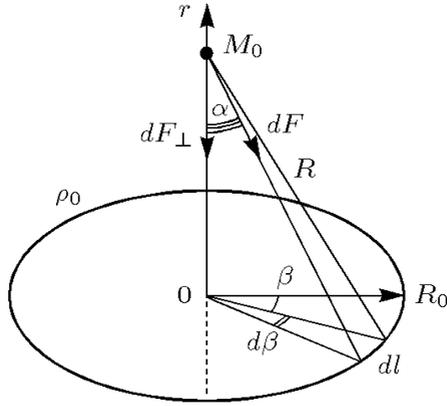


Рис. 3. Притяжение точечной массы кольцом

Поэтому вычислим сначала силу притяжения между точечной массой  $M_0$  и массой  $dm$ , содержащейся в малом элементе кольца  $dl$ , которую уже можно считать точечной:

$$dF = \gamma \frac{M_0 dm}{R^2}.$$

Здесь  $R$ ,  $r$  – соответственно расстояние от массы  $M_0$  до кольца и до центра кольца. Очевидно, что при  $0 \leq \alpha \leq \pi/2$  (для  $\pi/2 \leq \alpha \leq \pi$  выкладки аналогичны)

$$\frac{R_0}{R} = \sin \alpha = \frac{R_0}{\sqrt{r^2 + R_0^2}},$$

$$\frac{r}{R} = -\cos \alpha = \frac{r}{\sqrt{r^2 + R_0^2}}.$$

Поскольку  $dm = \rho_0 R_0 d\beta = -\rho_0 R_0 d\beta = -\rho_0 r \operatorname{tg} \alpha d\beta$ , то

$$dF = -\gamma \frac{M_0 \rho_0}{R^2} r \operatorname{tg} \alpha d\beta = -\gamma \frac{M_0 \rho_0}{r} \sin \alpha \cos \alpha d\beta.$$

Найдем проекцию силы  $dF$  на ось  $r$  (именно эта проекция определяет интересующее нас движение):

$$dF_{\perp} = dF \cos \alpha = -\gamma \frac{M_0 \rho_0}{r} \sin \alpha \cos^2 \alpha d\beta.$$

Просуммировав теперь силы тяготения, создаваемые всеми элементами кольца, т.е. взяв интеграл от  $dF_{\perp}$  по  $\beta$  от  $\beta = 0$  до  $\beta = 2\pi$ , найдем результирующую силу:

$$F = -2\pi\gamma \frac{M_0\rho_0}{r} \sin\alpha \cos^2\alpha = -\gamma M_0 M_1 \frac{r}{(r^2 + R_0^2)^{3/2}}, \quad (1.3)$$

где  $M_1 = 2\pi R_0\rho_0$  – полная масса кольца. Как и в предыдущем пункте, горизонтальная проекция результирующей силы равна нулю из-за симметричного расположения кольца относительно массы  $M_0$ .

Сила тяготения (1.3) существенно отличается от выражения, даваемого законом для точечных масс, переходя в него лишь при  $r \gg R_0$ , когда кольцо можно уподобить точечной массе благодаря большому, в сравнении с размерами кольца, расстоянию между тяготеющими телами. Если же  $r \ll R_0$ , то

$$F = -\gamma \frac{M_0 M_1}{R_0^3} r,$$

и сила притяжения, в противоположность случаю точечных масс, убывает с уменьшением расстояния между объектами.

Применив к массе  $M_0$  второй закон Ньютона, получим уравнение ее движения вдоль оси  $r$ :

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\gamma M_1 \frac{r}{(r^2 + R_0^2)^{3/2}},$$

которое, в отличие от п. 1.1 и п. 1.2, существенно нелинейно и становится линейным лишь при  $r \ll R_0$ :

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\gamma \frac{M_1}{R_0^3} r. \quad (1.4)$$

#### ***1.4. Движение шарика, присоединенного к пружине***

В получении моделей пп. 1.1 – 1.3 главную роль играли фундаментальные законы, определявшие происхождение и величину сил, действующих на объект, а второй закон Ньютона был как бы вспомогательным и применялся на последней стадии построения модели. Конечно же, такое деление чисто условно. Ведь если речь идет о задачах динамики, то можно использовать и другую схему – сначала связать с помощью закона Ньютона проекции ускорения тела с проекция-

ми действующих на него сил, а затем, исходя из тех или иных соображений, вычислить эти силы как функции координат, получив замкнутую модель. Продемонстрируем этот подход на примере модели движения шарика, присоединенного к пружине, с жестко закрепленным концом (рис. 4).

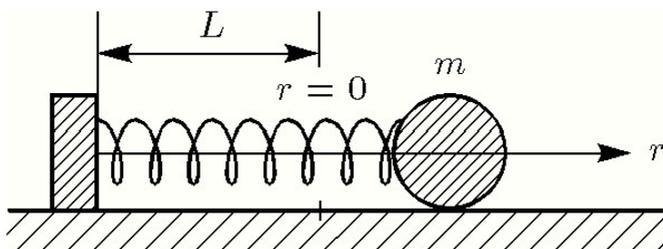


Рис. 4. Движение шарика на пружине

Пусть  $r$  – координата шарика вдоль оси пружины, лежащей на горизонтальной плоскости, и направление движения шарика совпадает с ее осью. Тогда по второму закону динамики

$$F = ma = m \frac{d^2 r}{dt^2},$$

где  $m$  – масса шарика,  $a$  – его ускорение. Будем считать плоскость идеально гладкой (т. е. движение происходит без трения), пренебрежем также сопротивлением воздуха и примем во внимание то, что вес шарика уравновешивается реакцией плоскости. Единственная сила, действующая на шарик в направлении оси  $r$ , очевидно, сила упругости пружины. Определим ее, используя закон Гука, гласящий, что для растяжения (сжатия) пружины необходимо приложить силу

$$F = -kr,$$

где коэффициент  $k > 0$  характеризует упругие свойства пружины, а  $r$  – величину ее растяжения или сжатия относительно нейтрального, ненагруженного положения  $r = 0$ . Уравнение движения шарика принимает вид (уравнение элементарного осциллятора)

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -kr, \quad t > 0. \quad (1.5)$$

Оно описывает его гармонические колебания и имеет общее решение

$$r = A \sin \omega t + B \cos \omega t, \quad (1.6)$$

где  $\omega = \sqrt{k/m}$  – собственная частота колебаний системы «пружина-шарик». Значения  $A$  и  $B$  легко определяются из начального состояния объекта, т. е. через величины  $r(t=0) = r_0$  и  $v_0$  ( $v(t)$  – скорость шарика), причем  $r(t) \equiv 0$  при  $r_0 = v_0 = 0$ . Заметим, что уравнение (1.4) с точностью до обозначений совпадает с (1.5), поэтому в п. 1.3 речь также шла о процессе колебаний, но применительно к системе «Сатурн – кольцо».

Подходы, с помощью которых строились модели данного параграфа, не должны, разумеется, противоречить другим фундаментальным законам природы. Соответствующая проверка непротиворечивости (если она возможна) весьма полезна для установления правильности моделей. Поясним это, используя для вывода уравнения (1.5) не закон Ньютона, а закон сохранения энергии. Поскольку точка крепления пружины неподвижна, то стенка не совершает работу над системой «пружина – шарик» (и наоборот), и ее полная механическая энергия  $E$  остается постоянной. Вычислим ее. Кинетическая энергия определяется движением шарика (пружина считается невесомой):

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{m(dr/dt)^2}{2}.$$

Потенциальная энергия системы «содержится» в пружине, ее нетрудно найти, определив работу, необходимую для растяжения (сжатия) пружины на величину  $r$ :

$$\Pi = -\int_0^r F dr' = \int_0^r kr' dr' = k \frac{r^2}{2}.$$

Так как  $dE/dt \equiv 0$ , то продифференцировав интеграл энергии по  $t$ , приходим к выражению

$$m \frac{dr}{dt} \frac{d^2 r}{dt^2} + k \frac{dr}{dt} r = dr \left( m \frac{d^2 r}{dt^2} + kr \right) = 0,$$

т. е. к уравнению (1.5), проверив тем самым правильность его получения. Подобную процедуру нетрудно провести для примеров пп. 1.1 – 1.3.

## 1.5. Заключение

1. Даже в простейших ситуациях для построения модели может потребоваться использование не одного, а нескольких фундаментальных законов.

2. Прямое формальное применение фундаментальных законов к объекту, рассматриваемому как целое, не всегда возможно (пп. 1.2, 1.3). В этих случаях требуется просуммировать элементарные акты взаимодействия между его частями, принимая во внимание свойства объекта (например, его геометрию).

3. Одними и теми же моделями могут описываться совершенно разные по своей природе объекты, подчиняющиеся разным фундаментальным законам, и, наоборот, данному закону могут отвечать принципиально разные модели (например, линейный и нелинейные; см. п. 1.3).

4. Необходимо использовать все возможности для проверки правильности построения модели (предельные переходы – пп. 1.2, 1.3, другие фундаментальные законы – п. 1.4 и т. д.).

## 1.6. Упражнения

1. В задаче о всплытии подводной лодки учитывается сопротивление воды. Принимая силу сопротивления равной  $F_1 = -k_0 u$ , где  $k_0 > 0$  – коэффициент, зависящий от свойств воды и формы подлодки,  $u$  – вертикальная скорость лодки, найдите максимальную глубину  $H$ , при всплытии с которой силой  $F_1$  можно пренебречь в любой момент времени  $t \ll t_k$  (должно выполняться требование  $F_1 \ll F - P$ ).

2. Найдите силу притяжения электрона к обкладкам конденсатора, имеющим конечные размеры  $R_1, R_3$ . Убедитесь в том, что при  $R_1 \rightarrow \infty, R_3 \rightarrow \infty$  полученное выражение переходит в формулу  $F = 4\pi q_e q_0$ .

3. В задаче о колебаниях колец Сатурна введите толщину кольца  $d$ , найдите силу  $F$  и убедитесь, что полученное выражение при  $d \rightarrow \infty$  совпадает с формулой

$$F = -2\pi\gamma \frac{M_0 \rho_0}{r} \sin \alpha \cos^2 \alpha = -\gamma M_0 M_1 \frac{r}{(r^2 + R_0^2)^{3/2}}.$$

4. Пусть расстояние между точкой нейтрального положения пружины  $r = 0$  и стенкой, к которой она крепится, равно  $L$  (рис. 4). Найдите условия на величины  $r_0, v_0$ , при выполнении которых шарик не может удариться о стенку (в противном случае модель (1.5) неверна, так как при соударении со стенкой шарик испытывает с ее стороны действие некоторой силы, не учитываемой в уравнении (1.5)).

## 2. Модели, получаемые из вариационных принципов

Уравнения Лагранжа и принцип Гамильтона применим для описания различных типов движения маятника и малых колебаний струны, а также колебаний электрического тока в контуре, для чего используем электромеханическую аналогию. Обсудим некоторые свойства изучаемых процессов.

### 2.1. Маятник на свободной подвеске

Система состоит из двух точечных масс  $m_1$  и  $m_2$ , соединенных невесомым жестким стержнем длины  $l$  (рис. 5). Движение происходит в поле силы тяжести и считается плоским, т. е. рассматривается в системе отсчета  $x, y, t$ . Точка с массой  $m_1$  (подвеска) не закреплена, а может перемещаться вдоль оси  $x$ .

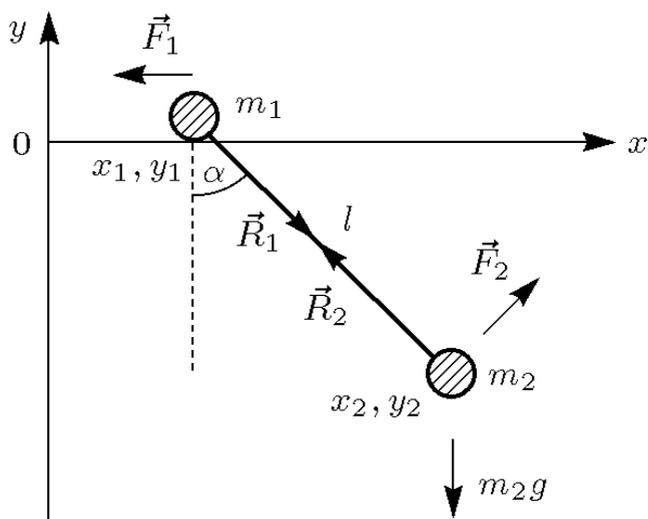


Рис. 5. Маятник на свободной подвеске

Для описания плоского движения двух точек в исходной системе отсчета необходимо, вообще говоря, найти из основных уравнений динамики для каждой точечной массы четыре функции времени  $x_1(t)$ ,  $y_1(t)$ ,  $x_2(t)$ ,  $y_2(t)$ , т. е. декартовы координаты первой и второй точек. Од-

нако, изучаемая система несвободна, поскольку содержит две механические связи. Одна из них описывается уравнением  $y_1 \equiv 0$  (подвеска не может совершать вертикальных перемещений), а вторая – уравнением  $(x_1 - x_2)^2 + y_2^2 = l^2$  (расстояние между точками при любом  $t$  равно длине стержня). Поэтому при переходе к уравнениям Лагранжа достаточно выбрать (по числу степеней свободы) лишь две новые независимые координаты. Возьмем в качестве обобщенных координат величины  $q_1(t) = x_1(t)$  и  $q_2 = \alpha(t)$ , где  $\alpha$  – угол между вертикалью и осью стержня. Такой выбор соответствует преобразованию вида

$$x_1 = q_1, \quad x_2 = q_1 + l \sin q_2, \quad y_2 = -l \cos q_2.$$

Выразим сначала кинетическую энергию системы  $T = T_1 + T_2$  в координатах  $q_1, q_2$ . Для подвески имеем

$$T_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 v_{1x}^2}{2} = \frac{m_1 \dot{x}_1^2}{2}.$$

Для маятника получаем

$$T_2 = \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_2}{2} (v_{2x}^2 + v_{2y}^2).$$

С помощью равенств  $v_{2x} = \dot{x}_1 + l \dot{\alpha} \cos \alpha$ ,  $v_{2y} = l \dot{\alpha} \sin \alpha$ , первое из которых учитывает составное движение массы  $m_2$  вдоль оси  $x$  как сумму движений вместе с подвеской и относительно нее, запишем величину  $T_2$  как функцию  $x_1, \alpha$ :

$$T_2 = \frac{m_2 \dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_2}{2} (2l \dot{\alpha} x_1 \cos \alpha + l^2 \dot{\alpha}^2).$$

Рассмотрим теперь силы, действующие на точки  $m_1, m_2$ . Сила тяжести и вертикальная проекция  $R_{1y}$  реакции стержня  $\bar{R}_1$ , приложенные к подвеске, уравновешиваются реакцией опоры, и поэтому вертикальная равнодействующая сила равна нулю.

Сила  $F_{1x}$  представляет собой, очевидно, горизонтальную проекцию реакции стержня (связи)  $R_{1x}$ . При лагранжевом подходе силы реакции стержня на движение как подвески, так и маятника, т. е. силы  $\bar{R}_1$  и  $\bar{R}_2$ , учитывать нет необходимости (конкретный пример содержится в п. 2.2). Поэтому из всех действующих сил достаточно принять во внимание только силу тяжести  $\bar{F}_2$ , действующую на маятник. Для ее проекций имеем равенства

$$F_{2x} = 0, F_{2y} = -m_2 g = -m_2 \frac{\partial \Pi}{\partial y_2},$$

где  $\Pi(y_2) = m_2 g y_2$  – потенциальная энергия маятника. В координатах  $q_1, q_2$   $\Pi(y_2)$  выражается формулой

$$\Pi(q_2) = -m_2 l g \cos \alpha.$$

Так как изучаемое движение потенциально, то следует воспользоваться уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0,$$

где  $j=1, 2$  и

$$L = T - \Pi = T_1 + T_2 - \Pi,$$

Или в развернутом виде,

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{m_2 l}{2} (l \dot{\alpha}^2 + 2x_1 \dot{\alpha} \cos \alpha) + m_2 l g \cos \alpha. \quad (2.1)$$

Из (2.1) дифференцированием по  $q_1, \dot{q}_2, q_2, \dot{q}_2$  (напомним, что  $q_1 = x_1, q_2 = \alpha$ ) получаем

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = 0, \frac{\partial L}{\partial q_1} = (m_1 + m_2) \dot{x}_1 + m_2 l \dot{\alpha} \cos \alpha,$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = -m_2 l \sin \alpha (\dot{x}_1 \dot{\alpha} + g),$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = m_2 l (l \dot{\alpha} + \dot{x}_1 \cos \alpha).$$

Подставляя полученные выражения в уравнения Лагранжа и производя дифференцирование по  $t$ , приходим к двум уравнениям относительно  $x_1, \alpha$ :

$$(m_1 + m_2) \ddot{x}_1 + m_2 l \cos \alpha \cdot \ddot{\alpha} = m_2 l \sin \alpha \cdot \dot{\alpha}^2, \quad (2.2)$$

$$\cos \alpha \ddot{x}_1 + l \ddot{\alpha} = -g \sin \alpha,$$

представляющим собой модель изучаемой системы. В соответствии с общими свойствами лагранжева формализма уравнения (2.2) разрешимы относительно  $\ddot{x}_1, \ddot{\alpha}$  и при известных значениях начальных обобщенных координат и обобщенных скоростей позволяют найти координаты и скорости точек в любой момент времени.

Нелинейная система четвертого порядка (2.2) легко сводится к уравнению второго порядка, например, исключением из нее величины  $\ddot{x}_1$ :

$$l(m_1 + m_2 \sin^2 \alpha) \ddot{\alpha} = -\sin \alpha [m_2 l \cos \alpha \cdot \dot{\alpha}^2 + (m_1 + m_2) g] \quad (2.3)$$

Этот результат - следствие инвариантности лагранжиана (2.1) относительно двух однопараметрических семейств преобразований. Первое из них дается формулой  $x^*_1 = x_1 + \beta$  ( $L$  не меняется при сдвиге координаты  $x_1$ ), а второе - формулой  $\alpha^* = \alpha + mg \sin \beta 2\pi$ , где  $m=1, 2, \dots$ ;  $\beta$  - параметр преобразования ( $L$  не меняется при повороте системы координат на угол, кратный  $2\pi$ ). Согласно теореме Нётер у системы имеются два первых интеграла, и поэтому ее порядок может быть понижен на две единицы. Еще один интеграл системы очевиден: лагранжиан (2.1) не зависит явно от времени (консервативность), и сохраняется ее полная энергия  $E = T + \Pi$ . Это свойство обеспечивает возможность понижения порядка системы (2.2) еще на одну единицу и сведения (2.3) к уравнению первого порядка.

Данный пример хорошо иллюстрирует различие между лагранжевым и ньютоновым подходами к описанию движения механических систем. Уравнения Ньютона для подвески и маятника в координатной форме выглядят так:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= R_1(x_2 - x_1)/l, \\ m_2 \ddot{x}_1 &= -R_1(x_2 - x_1)/l, \\ m_2 \ddot{y}_2 &= -R_{2y_2}/l - m_2 g, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где  $R_1 = R_2 = R$  - модуль вектора реакций стержня, приложенных к массам  $m_1$  и  $m_2$  (рис. 5), причем очевидно, что  $\bar{R}_1 = -\bar{R}_2$ . Реакция создается натяжением стержня, который в идеализированной постановке считается абсолютно жестким и его деформацией пренебрегается.

Три уравнения (2.4) содержат четыре неизвестных величины:  $x_1, x_2, y_2, R$ . Систему (2.4) можно замкнуть, используя уравнение связи  $(x_1 - x_1)^2 + y_2^2 = l^2$ , и прийти к некоторому нелинейному уравнению второго порядка. Однако, в случае более сложных систем эта громоздкая процедура становится фактически неосуществимой. При составлении уравнений Лагранжа она не требуется (что и послужило первоначальной причиной разработки лагранжева формализма). Кроме того, инвариантные свойства лагранжиана ясно указывают на существова-

ние первых интегралов движения, что существенно упрощает исследование.

Получающееся из (2.3) уравнение первого порядка относительно нетрудно изучить в плоскости функций  $\alpha$ ,  $da/dt$  (фазовой плоскости) и определить все характеристики движения в зависимости от начальных данных. Ограничимся рассмотрением малых колебаний системы, когда  $\alpha \ll 1$ . Отбрасывая в (2.3) члены более высокого порядка малости, приходим к уравнению

$$\ddot{\alpha} = -\frac{g}{l} \frac{m_1 + m_2}{m_1} \alpha,$$

которое, очевидно, имеет общее решение

$$\alpha(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t,$$

где константы  $A$  и  $B$  определяются из начальных данных, а частота колебаний дается формулой

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l} \left( 1 + \frac{m_2}{m_1} \right)}.$$

В сравнении с жестко закрепленным маятником, для которого  $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ , частота увеличивается, зависит от значений  $m_1$ ,  $m_2$  и растет тем больше, чем больше становится отношение  $m_2/m_1$ , что связано со свободным движением точки крепления. Этим же объясняется еще одно отличие, заключающееся в следующем. Пусть в начальный момент  $t = 0$  отклонение маятника равно  $\alpha(0) > 0$ , а его скорость, как и скорость подвески, равна нулю, т. е. энергия системы сосредоточена в потенциальной энергии маятника. Она полностью преобразуется в его кинетическую энергию при прохождении им нижней точки. В этот момент скорость маятника равна  $v_{2x} = \dot{x}_1 + l\dot{\alpha}$ . При ее вычислении учтем, что в данном случае  $\alpha(t) = \alpha(0) \cos \omega t$  и что  $\ddot{x}_1 = -l\ddot{\alpha} - g\alpha$  (последнее равенство вытекает из линеаризованной системы (2.2)). Таким образом,

$$\dot{x}_1 = -l\dot{\alpha} - \int_0^t g\alpha(t) dt, \text{ или}$$

$$v_{2x} = -g \int_0^t \alpha(0) \cos \omega t dt.$$

В интересующий нас момент

$$t = \pi / (2\omega) \quad v_{2x}(\alpha = 0) = -g\alpha(0) \int_0^{\pi/(2\omega)} \cos \omega t dt = -\frac{g\alpha(0)}{\omega}.$$

Это значение в  $\omega/\omega$  раз меньше максимальной скорости маятника на жесткой подвеске - запасенная вначале энергия частично переходит в кинетическую энергию подвески.

Если же  $m_1 \rightarrow \infty$  (очень массивная подвеска), то, естественно, как малые, так и конечные колебания системы совпадают с движением жестко закрепленного маятника.

## 2.2. Непотенциальные колебания

Учтем теперь действие сил трения на маятник и подвеску, считая их пропорциональными скоростям:

$$\bar{F}_1 = -\mu_1 \bar{v}_1, \quad \bar{F}_2 = -\mu_2 \bar{v}_2, \quad \mu_1 > 0, \quad \mu_2 > 0.$$

Так как силы трения зависят от скоростей, то движение непотенциально, и следует использовать уравнения Лагранжа с обобщенными силами в правых частях:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \Phi_j,$$

$$\Phi_j = \sum_{i=1}^N \left( F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_j} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_j} \right) = \sum_{i=1}^N \bar{F}_i(q, \dot{q}, t) \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j}.$$

Выбирая, как и прежде,  $q_1 = x_1$ ,  $q_2 = \alpha$ , получаем из общей формулы

$$\Phi_1 = F_{1x} \frac{\partial x_1}{\partial q_1} + F_{1y} \frac{\partial y_1}{\partial q_1} F_{2x} \frac{\partial x_2}{\partial q_1} F_{2y} \frac{\partial x_2}{\partial q_1},$$

$$\Phi_2 = F_{1x} \frac{\partial x_1}{\partial q_2} + F_{1y} \frac{\partial y_1}{\partial q_2} F_{2x} \frac{\partial x_2}{\partial q_2} F_{2y} \frac{\partial x_2}{\partial q_2},$$

где  $F_{1x}, F_{1y}, F_{2x}, F_{2y}$  — компоненты равнодействующих сил, приложенных к массам  $m_1, m_2$  (рис. 5). Приняв во внимание, что

$F_{1y} = 0$ , и равенства  $\partial x_1 / \partial q_1 = \partial x_2 / \partial q_1 = 1$ ,  $\partial y_1 / \partial q_1 = \partial x_1 / \partial q_2 = 0$ ,  $\partial x_2 / \partial q_2 = l \cos q_2$ ,  $\partial y_2 / \partial q_2 = l \sin q_2$ , упростим выражения для  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$ :

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= F_{1x} + F_{2x}, \\ \Phi_2 &= F_{2x} l \cos q_2 + F_{2y} l \sin q_2.\end{aligned}\tag{2.5}$$

Выразим компоненты действующих сил в координатах  $q_1 = x_1$ ,  $q_2 = \alpha$ :

$$\begin{aligned}F_{1x} &= F_{1x} + R_{1x} = -\mu_1 v_{1x} + R_{1x} = -\mu_1 \dot{x}_1 + R \sin \alpha, \\ F_{2x} &= F_{2x} + R_{2x} = -\mu_2 v_{2x} + R_{2x} = -\mu_2 (\dot{x}_1 + l \dot{\alpha} \cos \alpha) - R \sin \alpha, \\ F_{2y} &= F_{2y} + R_{2y} - m_2 g = -\mu_2 v_{2y} + R_{2y} - m_2 g = -\mu_2 l \dot{\alpha} \sin \alpha + R \cos \alpha - m_2 g,\end{aligned}$$

где  $R$  - величина силы реакции стержня. Подставляя их в (2.5), получим

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= -(\mu_1 + \mu_2) \dot{x}_1 - \mu_2 l \dot{\alpha} \cos \alpha, \\ \Phi_2 &= \mu_2 l \dot{x}_1 \cos \alpha - \mu_2 l^2 \dot{\alpha} - m_2 g l \sin \alpha.\end{aligned}\tag{2.6}$$

В соответствии с общим свойством лагранжева формализма реакции связей, как видно из (2.6), не вошли в окончательное выражение для  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$ . Кинетическая энергия системы  $T$  найдена в п. 2.1:

$$T = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{m_2 l}{2} (l \dot{\alpha}^2 + 2 \dot{x}_1 \dot{\alpha} \cos \alpha).$$

Вычисляя аналогично п. 2.1 производные  $\partial T / \partial q_{1,2}$  и  $\partial T / \partial \dot{q}_{1,2}$  дифференцируя по  $t$ , придем к уравнениям Лагранжа применительно к рассматриваемой системе

$$\begin{aligned}(m_1 + m_2) \ddot{x}_1 + m_2 l \cos \alpha \cdot \dot{\alpha}^2 + \Phi_1, \\ m_2 l \cos \alpha \ddot{x}_1 + m_2 l^2 \ddot{\alpha} = \Phi_2,\end{aligned}\tag{2.7}$$

Как и для потенциального движения, нелинейная система четвертого порядка (2.7) разрешается относительно старших производных, и при заданных начальных значениях  $x_1(0)$ ,  $\dot{x}_1(0)$ ,  $\alpha(0)$ ,  $\dot{\alpha}(0)$  из нее определяются положения и скорости масс  $m_1$ ,  $m_2$  в любой момент времени.

Однако, в отличие от системы (2.2), у изучаемого движения нет трех первых интегралов (теорема Нётер справедлива для потенциальных движений), и ее порядок может быть понижен лишь на единицу.

Еще одно отличие заключается в виде балансного энергетического соотношения

$$E(0) = E(t) + A(t),$$

где  $E(0)$  – полная начальная энергия системы,  $E(t) = T(t) + \Pi(t)$  – текущая полная энергия,  $A(t)$  – работа сил трения, произведенная к моменту  $t$ . Механический смысл (2.8) состоит в том, что величина утраченной (диссипированной) энергии системы равна работе, совершенной над нею непотенциальными силами трения.

Получим равенство (2.8) для простоты в случае  $\mu_2 = 0$  (трение испытывает лишь подвеска). Из (2.6) имеем

$$\Phi_1 = -\mu_1 \dot{x}_1, \quad \Phi_2 = -m_2 g l \sin \alpha.$$

Подставим эти выражения в (2.7), умножим первое уравнение на  $\dot{x}_1$ , второе – на  $\dot{\alpha}$ , сложим оба уравнения и придем к равенству

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 \left( (m_1 + m_2) \dot{x}_1 + m_2 l \cos \alpha \cdot \dot{\alpha} \right) + \ddot{\alpha} \left( m_2 l \dot{x}_1 \cos \alpha + m_2 l^2 \dot{\alpha} \right) = \\ = m_2 l \sin \alpha \cdot \dot{\alpha} \cdot \dot{x}_1 - m_2 l g \sin \alpha \cdot \dot{\alpha} - \mu_1 \dot{x}_1^2. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Соотношение (2.9) совпадает с проинтегрированным по времени равенством (2.8), в котором полная энергия в момент  $t$  есть

$$E(t) = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{m_2 l}{2} \left( l \dot{\alpha}^2 + 2 \dot{x}_1 \dot{\alpha} \cos \alpha \right) - m_2 l g \cos \alpha,$$

а работа силы трения дается формулой

$$A(t) = -\int_0^t F_1 dx_1 = \int_0^t \mu_1 v_1 dx_1 = \int_0^t \mu_1 \frac{dx_1}{dt} dx_1 = \int_0^t \mu_1 \left( \frac{dx_1}{dt} \right)^2 dt.$$

Таким образом, (2.9) эквивалентно равенству

$$\frac{d}{dt} (E(t) + A(t)) = \frac{d}{dt} \left( E(t) + \int_0^t \mu_1 \left( \frac{dx_1}{dt} \right)^2 dt \right) = 0,$$

или, что тоже самое, равенству (2.8). Так как

$$\frac{dE(t)}{dt} = -\mu_1 \left( \frac{dx_1}{dt} \right)^2 \leq 0,$$

то в сравнении с консервативной системой п. 2.1 полная энергия в данном случае не постоянна, а убывает со временем.

При малых колебаниях жестко закрепленного маятника из (2.7) получаем уравнение

$$\ddot{\alpha} = -\frac{\mu_2}{m_2} \dot{\alpha} - \frac{g}{l} \alpha,$$

эквивалентное уравнению движения в вязкой среде шарика на пружинке и имеющее простое общее решение.

### 2.3. Малые колебания струны

Применимость принципа Гамильтона не ограничивается системами материальных точек. Он распространяется на объекты, не являющиеся, строго говоря, совокупностями точечных масс. Примером служит упругая нить или струна – сплошная среда, которую, однако, можно рассматривать как множество примыкающих друг к другу материальных точек. Будем считать, что толщина струны много меньше ее длины  $l$  и что она имеет постоянную линейную плотность  $\rho$ . Натянутая с силой  $F_0$  струна в состоянии равновесия неподвижна и представляет собой прямую линию. При отклонении от равновесия, например, в результате удара, струна изгибается, ее участки начинают двигаться (рис. 6). Колебания считаются плоскими и малыми - их амплитуда значительно меньше длины струны. Это предположение позволяет пренебречь продольными смещениями и скоростями участков струны, рассматривая только поперечное их движение.

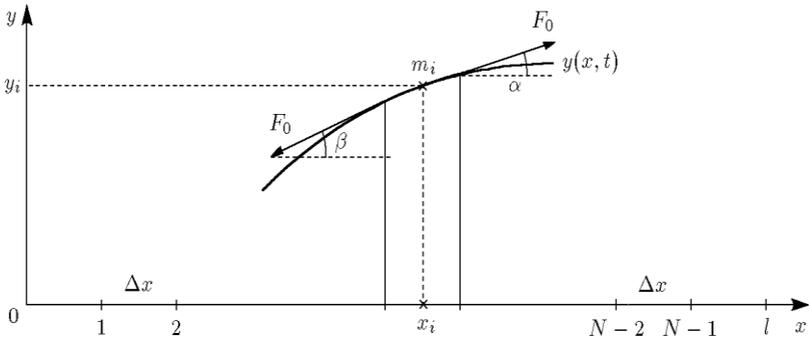


Рис. 6. Элемент струны

Представим струну как совокупность  $N$  материальных точек с равными массами  $m_i = \rho_0 l / N = \rho_0 \Delta x$ ,  $i = 1, \dots, N$ . Длина каждого участка струны, содержащего массу  $m_i$ , равная  $\Delta x$  в положении равно-

весия и несильно, ввиду малости колебаний, изменяющаяся при отклонении от него, считается малой. Поэтому положение  $i$ -й «материальной точки» в любой момент времени можно охарактеризовать величинами  $x_i(t)$  (продольной координатой центра  $i$ -го отрезка) и  $y_i(t)$  (поперечным отклонением центра отрезка от положения равновесия). Введенные таким образом обобщенные (в данном случае - декартовы) координаты полностью описывают плоское движение рассматриваемой системы. В силу малости отклонений, как уже отмечалось,  $dx_i(t)=dt = V_{ix} = 0$ , т. е. координаты  $x_i$  не зависят от времени.

Составляющие струну «материальные точки» связаны между собой и при  $N \rightarrow \infty$ ,  $\Delta x \rightarrow 0$  образуют для любого момента времени в плоскости  $x, y$  некоторую кривую

$$y = y(x, t_0). \quad (2.10)$$

В отличие от рассматривавшихся выше механических связей, которые всегда считаются заданными, «связь» (2.10) неизвестна, и функция  $y(x; t)$  подлежит определению. Если она найдена, то тем самым известны координаты  $y_i = y(x_i; t)$  и, поскольку координаты  $x_i$  не меняются с течением времени, полностью известно движение системы.

Кинетическая энергия  $i$ -й массы определяется по формуле

$$T_i = \frac{1}{2} m_i v_{iy}^2 = \frac{1}{2} m_i \left( \frac{dy_i}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} m_i \left( \frac{\partial y_i}{\partial t} \right)^2.$$

При получении этой формулы использовано равенство  $dy_i / dt = \partial y_i / \partial t$ , справедливое потому, что  $dx_i / dt = 0$ . Полная кинетическая энергия системы равна

$$T_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left( \frac{\partial y_i}{\partial t} \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \rho_0 \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)_i^2 \Delta x. \quad (2.11)$$

Вычислим теперь силы, действующие на  $i$ -ю массу. По предположению о малых колебаниях  $F_{ix} = 0$ . Вертикальная компонента  $F_{iy}$  определяется как сумма вертикальных компонент силы натяжения струны на правом и левом концах  $i$ -го отрезка. Его удлинение при отклонении от положения равновесия мало, поэтому силу натяжения струны можно считать неизменной и равной  $F_0$ . Тогда вертикальные составляющие сил, приложенных к правому и левому концам, соответственно равны

$$F_- = -F_0 \sin \alpha = -F_0 \frac{\partial y}{\partial x} \left( x_i + \frac{\Delta x}{2} \right),$$

$$F_+ = -F_0 \sin \beta = -F_0 \frac{\partial y}{\partial x} \left( x_i - \frac{\Delta x}{2} \right),$$

(рис. 6); напомним, что сила натяжения направлена по касательной к струне). В итоге получаем

$$F_{iy} = F_+ + F_- = F_0 [y_x(x - \Delta x/2) - y_x(x + \Delta x/2)],$$

или, учитывая малость отрезка  $\Delta x$ ,

$$F_{iy} = -F_0 (y_{xx})_i \Delta x.$$

Примем во внимание, что из (2.10) следует  $\delta y = y_x \delta x$ , и перепишем последнее выражение в виде

$$F_{iy} = -F_0 \Delta x \left( \frac{\partial}{\partial x} y_x \right)_i = -F_0 \Delta x \left( y_x \frac{\partial}{\partial y} y_x \right)_i = -\frac{1}{2} F_0 \Delta x \left( \frac{\partial}{\partial y} y_x^2 \right)_i.$$

Отсюда сразу видно, что все силы  $F_{iy}$ ,  $i = 1, \dots, N$  потенциальны, причем потенциальная энергия  $i$ -й массы дается формулой

$$\Pi_i = \frac{1}{2} F_0 \sum_{i=1}^N (y_x^2)_i \Delta x. \quad (2.12)$$

Поскольку движение системы потенциально, то к нему приложим принцип Гамильтона. Из (2.11), (2.12) получаем лагранжиан

$$L(y, \dot{y}, t) = T - \Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left[ \rho_0 \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 - F_0 \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right] \Delta x, \quad \dot{y} = \frac{\partial y}{\partial t}.$$

Действие по Гамильтону вычисляется по формуле

$$Q(y, \dot{y}, t) = \int_{t_0}^{t_1} L dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left[ \rho_0 \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 - F_0 \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right] \Delta x dt, \quad (2.13)$$

где  $t_0, t_1$  — два произвольных момента времени, в которые система имеет координаты  $y_i(t_0), y_i(t_1)$ . Перейти из состояния с  $y_i(t_0)$  в состояние с  $y_i(t_1)$  можно, вообще говоря, многими путями. Принцип Гамильтона выделяет из этого множества «истинный» прямой путь, для которого вариация действия  $\delta Q$  равна нулю. Вычислим с помощью (2.13) вари-

ацию  $\delta Q$ , придавая вариацию  $\delta y_i$  координатам и  $\delta \dot{y}_i$  – скоростям  $i$ -х точек: (2.14)

$$\delta Q = \delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^N \left[ 2\rho \frac{\partial y}{\partial t} \delta \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) - F_0 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \cdot \delta y \right] \cdot \Delta x dt.$$

Первый член в правой части (2.14) возникает в результате варьирования скорости  $\dot{y}_i$  а второй – при варьировании координаты  $y_i$ . Для преобразования первого члена проинтегрируем его по частям, используя перестановочность операций варьирования и дифференцирования по  $t$ , и, принимая во внимание, что  $\delta y(t_0) = \delta y(t_1) = 0$ , получим

$$\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^N \left[ 2\rho_0 \frac{\partial y}{\partial t} \delta \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) \right] \cdot \Delta x dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^N \rho_0 \left( \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right)_i \delta y_i \Delta x dt.$$

Второй член с учетом равенства  $\partial y = y_x \partial x$  переписывается в виде

$$-\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^N F_0 \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)_i^2 \delta y_i \Delta x dt = - \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^N F_0 \left( \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right)_i \delta y_i \Delta x dt.$$

После подстановки этих выражений в (2.14) получим

$$\delta Q = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^N \left( \rho_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - F_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)_i \delta y_i \Delta x dt.$$

Перейдем от дискретной системы «материальных точек», в которой первоначально была заменена струна, к сплошной среде. Для этого в последнем равенстве устремим  $N \rightarrow \infty$ , заменим  $\Delta x$  на  $dx$  и опустим индекс  $i$ :

$$\delta Q \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \left( \rho_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - F_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \delta y dx dt.$$

На прямом пути  $\Delta Q = 0$ , что возможно, лишь если в последнем равенстве подынтегральное выражение равно нулю при всех  $x$  и  $t$ , т. е.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad a_0^2 = \frac{F_0}{\rho_0}, \quad 0 < x < l, t > 0. \quad (2.15)$$

Следовательно, при малых колебаниях струны ее отклонение подчиняется уравнению (2.15), из которого при соответствующих краевых условиях определяется функция

$$y = y(x; t).$$

Принцип Гамильтона применительно к рассматриваемой ситуации можно трактовать как способ получения уравнения «связи» (2.10). В силу свойств лагранжиана полная энергия  $E = T + \Pi$  струны сохраняется со временем (консервативность движения нетрудно установить также непосредственно из уравнения (2.15)).

Уравнение малых колебаний струны (2.15)  $\omega = 2\pi a_0 / \lambda$  – частота колебаний с длиной волны  $\lambda$  – линейное уравнение второго порядка в частных производных гиперболического типа. Принцип суперпозиции позволяет получить его общее решение как сумму частных решений, используя соответствующие методы теории уравнений математической физики.

Основной краевой задачей для (2.15) является первая краевая задача на отрезке  $[0; l]$ , когда для однозначного определения решения задаются начальные отклонения  $y(x; 0) = y_0(x)$ ,  $0 < x < l$ , скорости  $\dot{y}(x, 0) = \dot{y}_0(x)$ ,  $0 < x < l$ , и граничные значения функции  $y(0; t) = y_1(t)$ ,  $t > 0$  и  $y(l; t) = y_2(t)$ ,  $t > 0$ . Основная задача допускает различные модификации, самая простая из которых – задача Коши, решаемая на всей прямой  $-\infty < x < \infty$ . Такая идеализация оправдана в случае, если рассматривается движение центральной части струны в течение непродолжительного времени и влиянием границ можно пренебречь. Для решения задачи Коши достаточно знать начальные скорости и координаты струны, т. е. функции.

Для частного вида движений, обладающих свойством  $\partial y / \partial t = c \partial y / \partial x$ ,  $c = \text{const}$  (простые волны), уравнение (2.15) переходит в изученное гиперболическое уравнение первого порядка или уравнение переноса.

Отметим, что обычно уравнение (2.15) получают с помощью непосредственного применения второго закона Ньютона и закона Гука к элементарному участку струны. При этом предположения о малости

колебаний, однородности струны и т. д. в обоих подходах одни и те же. Поэтому и математические модели движения струны в обоих случаях одинаковы.

#### 2.4. Электромеханическая аналогия

Распространение принципа Гамильтона возможно не только на процессы движения сплошных сред, но и на некоторые немеханические объекты. Рассмотрим колебательный контур (рис.7), состоящий из конденсатора с емкостью  $C_0$  и катушки с индуктивностью  $L_0$ . В начальный момент времени цепь разомкнута, заряд сосредоточен на обкладках конденсатора. При замыкании цепи конденсатор начинает разряжаться, и по ней идет ток.

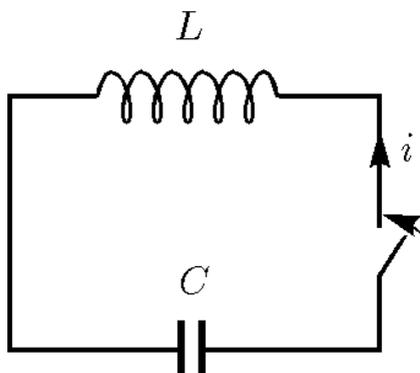


Рис. 7. Колебательный контур

Электромеханическая аналогия заключается в следующем. Обобщенной координате отвечает заряд на обкладках конденсатора - неизвестная функция времени  $q = q(t)$ . Величина электрического тока  $\dot{q}(t) = dq(t)/dt = i(t)$  играет роль обобщенной скорости. Для правильного определения аналогов кинетической энергии (энергии движения) и потенциальной энергии (энергии конденсатора) будем руководствоваться следующими наводящими соображениями. Энергия перемещающихся по проводнику зарядов (энергия тока) пропорциональна квадрату скорости  $v$  их направленного движения. С другой стороны, заряд, проходящий через поперечное сечение  $S$  проводника в единицу време-

ни (ток), равен  $i = q_0 n S v$ , где  $q_0$ ,  $n$  – величины элементарного заряда и объемной концентрации переносчиков тока соответственно. Следовательно, энергия движения частиц  $T \sim v^2 \sim i^2$ , т. е. пропорциональна квадрату тока  $\dot{q}(t) = i(t)$ . Коэффициент пропорциональности (аналог массы) берется равным  $L_0$ , т. е.

$$T = T(\dot{q}) = \frac{1}{2} L_0 \dot{q}^2.$$

Потенциальная энергия контура содержится в конденсаторе. Для его зарядки требуется затратить определенную работу по разделению разноименных зарядов. Согласно закону Кулона сила, препятствующая этому, как функция зарядов  $q_1$ ,  $q_2$  пропорциональна их произведению  $q_1 q_2$  (если  $q_1 = q_2 = q$ , то сила пропорциональна  $q^2$ ). Таким образом, работа по разделению зарядов, т. е. потенциальная энергия системы  $\Pi$ , пропорциональна квадрату «обобщенной координаты»:

$$\Pi = \Pi(q) = \frac{1}{2C_0} q^2,$$

где  $1 = C_0$  – аналог коэффициента упругой силы в законе Гука (система «шарик – пружина») или величине  $\sqrt{g/l}$  в случае колебаний маятника.

Примем теперь во внимание, что действующие в контуре силы имеют чисто электростатическое происхождение (сопротивлением проводников пренебрегается, т. е. «трение» отсутствует, как отсутствуют и потери энергии на излучение электромагнитных волн). По закону Кулона эти силы определяются «обобщенной координатой»  $q$  и не зависят от  $\dot{q}$ . В этом смысле силы «потенциальны», и вместе с ними «потенциальна» рассматриваемая система. Поэтому у нее существует «лагранжиан»  $L = T - \Pi$  и к ней применим аналог принципа Гамильтона: для «истинного» пути системы вариация «действия»

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} L dt$$

равна нулю (здесь, как обычно,  $t_0$ ,  $t_1$  – два произвольно взятых моментов времени). Пусть функция  $q(t, 0) = q^0(t)$  отвечает прямому пути системы в промежутке  $t_0 < t < t_1$ . Вариация координаты  $q(t, \alpha) - q^0(t)$ , где

$q(t, \alpha)$  – все возможные «траектории», имеющие одинаковые координаты  $q(t_0, \alpha)$ ,  $q(t_1, \alpha)$ . Для вариации «действия» имеем

$$\delta Q = \delta \int_{t_0}^{t_1} L dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} \left( L_0 \dot{q}^2 - \frac{1}{C_0} q^2 \right) dt = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} [L(q) - L(q^0)] dt.$$

Так как  $q = q^0 + \delta q$ , то подынтегральное выражение можно представить в виде

$$L(q) - L(q^0) = L_0 [(\dot{q}^0)^2 + 2\dot{q}^0 \delta \dot{q} + \delta \dot{q}^2] - \frac{1}{C_0} [(q^0)^2 + 2q^0 \delta q + \delta q^2] - L_0 (\dot{q}^0)^2 + \frac{1}{C_0} (q^0)^2.$$

Отбросив в нём члены второго порядка малости, получим

$$\delta Q = \int_{t_0}^{t_1} \left( L_0 \dot{q}^0 \delta \dot{q} - \frac{1}{C_0} q^0 \delta q \right) dt.$$

Интегрируя член  $L_0 \dot{q}^0 \delta \dot{q}$ , где  $d\dot{q} = d(\delta q)/dt$ , по частям и учитывая, что  $\delta q(t_0) = \delta q(t_1) = 0$ , придём к окончательному выражению для  $\delta Q$

$$\delta Q = \int_{t_0}^{t_1} \left( L_0 \ddot{q}^0 + \frac{1}{C_0} q^0 \right) \delta q dt = 0.$$

Из него для заряда  $q(t)$  (верхний индекс у  $q^0$  опущен) следует уравнение

$$L_0 \ddot{q} = -\frac{1}{C_0} q,$$

описывающее колебания в электрическом контуре. Заметим, что полная энергия колебаний  $E = T + \Pi$  сохраняется со временем, что согласуется с инвариантностью «лагранжиана» относительно сдвига по времени.

Рассмотренная аналогия применима также к электрическим цепям гораздо более сложной конфигурации, на её основе строятся математические модели протекающих в них процессов. Приведенный пример далеко не единственная иллюстрация широкой применимости принципа Гамильтона и других вариационных принципов. Они части используются при построении математических моделей не только механических или физических, но и многих химических, биологических и иных явлений.

## 2.5. Упражнения

1. Используя замену  $d\alpha/dt = v$ , сведите уравнение

$$l(m_1 + m_2 \sin^2 \alpha)\ddot{\alpha} = -\sin \alpha [m_2 l \cos \alpha \cdot \dot{\alpha}^2 + (m_1 + m_2)g]$$

к виду

$$\frac{dv}{d\alpha} = f(v, \alpha).$$

2. Переходом в уравнениях

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= R_1(x_2 - x_1) / l, \\ 2m_2 \ddot{x}_2 &= -R_1(x_2 - x_1) / l, \\ m_2 \ddot{y}_2 &= -R_2 y_2 / l - m_2 g \end{aligned}$$

к координатам  $x_2 = x_1 + l \sin \alpha$ ,  $y_2 = -l \cos \alpha$  получите уравнение

$$l(m_1 + m_2 \sin^2 \alpha)\ddot{\alpha} = -\sin \alpha [m_2 l \cos \alpha \cdot \dot{\alpha}^2 + (m_1 + m_2)g].$$

3. В систему уравнений движения неконсервативного маятника на свободном подвесе

$$\begin{aligned} (m_1 + m_2)\ddot{x}_1 + m_2 l \cos \alpha \cdot \ddot{\alpha} &= m_2 l \sin \alpha \cdot \dot{\alpha}^2 + \Phi_1, \\ m_2 l \cos \alpha \ddot{x}_1 + m_2 l^2 \ddot{\alpha} &= \Phi_2 \end{aligned}$$

величина  $x_1$  явным образом не входит. Покажите, используя это свойство что записанная система сводится к системе равнений третьего порядка относительно функций  $X(t) = dx_1/dt$ ,  $Y(t) = d\alpha/dt$ ,  $Z(t) = \alpha(t)$ .

4. Умножьте обе части уравнений малых колебаний струны

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

на  $\partial y / \partial t$  и, интегрируя полученное равенство от  $t = 0$  до  $t > 0$  и от  $x = 0$  до  $x = l$  убедитесь в том, что полная энергия  $E(t) = E(0)$  для любых  $t > 0$ .

5. Получите решение уравнения малых колебаний струны

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a_0^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

описывающее движения струны, для которых  $\partial y / \partial t = c \partial y / \partial x$ .

### 3. Примеры универсальных математических моделей

Рассмотрим процессы колебаний в объектах различной природы. Покажем, что, несмотря на разную сущность объектов, им соответствуют одни и те же математические модели.

#### 3.1. Жидкость в U-образном сосуде

Жидкость занимает часть сосуда U-образной формы, представляющего собой изогнутую трубку радиуса  $r_0$  (рис. 8). Масса жидкости  $M_0$ , её плотность  $\rho_0$ . Стенки сосуда идеально гладкие, поверхностным натяжением пренебрегается, атмосферное давление и ускорение свободного падения  $g$  постоянны.

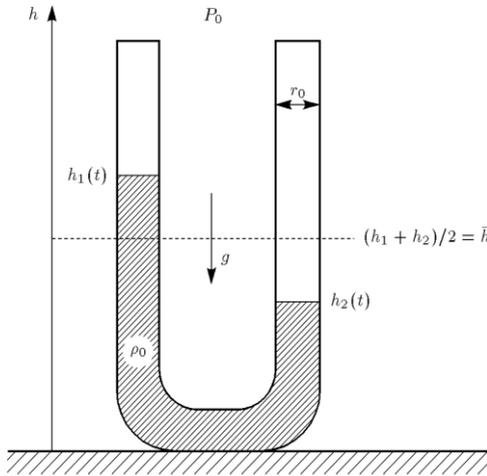


Рис. 8. Жидкость в U-образной трубке

В состоянии равновесия жидкость, очевидно, покоится, её высота в обоих коленах сосуда одинакова. Если её вывести из равновесия, то начнётся движение, характер которого установим с помощью закона сохранения энергии, поскольку в силу сделанных предположений её потери в системе отсутствуют.

Потенциальную энергию системы вычислим через работу, которую необходимо совершить, чтобы переместить её из состояния равновесия (где  $h_1=h_2$ ) в положение, изображенное на рис. 8. Она равна

$$\Pi = -\int_{\bar{h}}^{h_2} P dh_2 = -\int_{\bar{h}}^{h_2} \rho_0 s_0 (h_1 - h_2) g dh_2, \quad \bar{h} = \frac{h_1 + h_2}{2},$$

где  $P$  – вес той части жидкости в левом колене, уровень которой превышает величину  $h_2$ . Работа сил атмосферного давления равна нулю, так как для разных колен соответствующие перемещения направлены в разные стороны. Неизвестные величины  $h_1(t)$  и  $h_2(t)$  связаны очевидным соотношением  $h_1(t) + h_2(t) = \text{const} > 0$ , выражающим постоянство полной длины столба жидкости в сосуде с постоянным сечением. Подставляя последнее равенство в выражение для  $\Pi$ , получаем после интегрирования

$$\Pi = -\rho_0 s_0 g \left( -h_2^2(t) + Ch_2(t) + C_1 \right).$$

При вычислении кинетической энергии учтём постоянство сечения трубки и не сжимаемость жидкости. Это означает, что столб жидкости движется как целое и её скорость  $v(t)$  величины  $dh_2(t)/dt$ , и тогда

$$T = \frac{1}{2} M_0 \left( \frac{dh_2}{dt} \right)^2,$$

а из закона сохранения энергии следует

$$E(t) = T(t) + \Pi(t) = \frac{M_0}{2} \left( \frac{dh_2}{dt} \right)^2 - \rho_0 s_0 g \left( -h_2^2(t) + Ch_2(t) + C_1 \right).$$

Так как  $dE/dt = 0$ , то, продифференцировав это выражение, получаем

$$M_0 \frac{d^2 h_2}{dt^2} = -\rho_0 s_0 g (-2h_2 + C),$$

что, с учетом такого же соотношения для величины  $h_1(t)$ , дает уравнение

$$M_0 \frac{d^2 h}{dt^2} = -\rho_0 s_0 g h = -\pi \rho_0 r_0^2 g h,$$

где  $h = (h_2 - h_1)/2$  – отклонение уровня жидкости от положения равновесия. Оно, с точностью до обозначений, полностью совпадает с уравнением для системы «шарик-пружина» (в данном случае аналогом шарика служит столб жидкости, а роль пружины играет тяготение).

Последовательный отказ от идеализации объекта даёт более полные его модели. Например, учёт силы поверхностного натяжения, равной  $\sigma_0 2\pi r_0$  ( $\sigma_0$  – коэффициент поверхностного натяжения) и всегда направленной против движения жидкости, приводит к уравнению, характеризующему изменение энергии.

### 3.2. Колебательный электрический контур

Это устройство представляет собой конденсатор, соединённый проводами с индуктивной катушкой. В момент  $t = 0$  цепь замыкается, и заряд с обкладок конденсатора начинает распространяться по цепи (рис. 9).

Сопротивление проводов будем считать равным нулю, емкость конденсатора равна  $C$ , индуктивность катушки  $L$ . Для изменяющейся со временем величины  $q(t)$ , где  $q(t)$  – заряд на обкладках конденсатора, необходимо получить соответствующее уравнение. Очевидно, что ток  $i(t)$  и напряжение  $v(t)$  также являются функциями времени.

По физическому смыслу величины  $C$ , в любой момент времени, имеем равенство  $v(t) = q(t)C$  (емкость равна величине заряда, который необходимо поместить на обкладки конденсатора для увеличения разности потенциалов между ними на единицу).

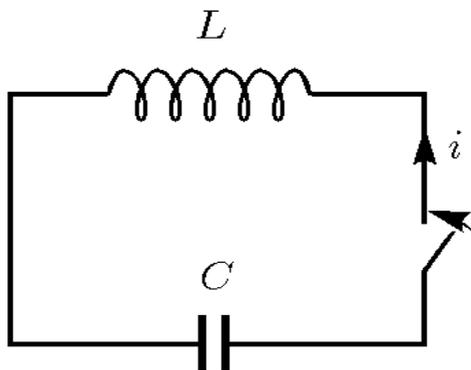


Рис. 9. Колебательный контур

Так как электрическое сопротивление в цепи отсутствует, то падения напряжения на проводах нет и разность потенциалов  $v(t)$ , существующая на конденсаторе, подаётся непосредственно на катушку. При переменном токе в катушке возникает электродвижущая сила самоиндукции, равная  $\varepsilon = -Ldi/dt$ . Закон Ома для цепи в отсутствие сопротивления выглядит следующим образом:

$$v(t) = -\varepsilon(t),$$

или

$$q(t)C = -\varepsilon(t) = Ldi/dt.$$

Так как по определению  $i = -dq/dt$  (при убывании заряда на конденсаторе ток в цепи увеличивается, и наоборот), то из последнего соотношения получаем уравнение

$$L \frac{d^2q}{dt^2} = -Cq,$$

описывающее процесс колебаний величины  $q(t)$  (а следовательно, и величин  $i(t)$ ,  $v(t)$ ) в простейшем электрическом контуре. В системе «емкость-индуктивность» колебания происходят так же, как и в системе «шарик-пружина» (и так же усложняются соответствующие модели при учёте дополнительных процессов).

### ***3.3. Малые колебания при взаимодействии двух биологических популяций***

Пусть на одной и той же территории проживают две биологические популяции с численностями  $N(t)$  и  $M(t)$ , причём первая растительноядная, а вторая употребляет в пищу представителей первой популяции.

Скорость изменения  $N(t)$  складывается из скорости прироста благодаря рождаемости (эффект насыщения не учитывается) и из скорости убывания благодаря соседству со второй популяцией:

$$\frac{dN}{dT} = (\alpha_1 - \beta_1 M)N, \quad (3.1)$$

где  $\alpha_1 > 0$ ,  $\beta_1 > 0$ , член  $\beta_1 MN$  описывает вынужденное убывание (естественной смертностью популяции пренебрегаем).

Численность второй популяции растёт тем быстрее, чем больше численность первой популяции, а при её отсутствии уменьшается со скоростью, пропорциональной численности  $M(t)$  (тем самым её рождаемость не учитывается, как и эффект насыщения):

$$\frac{dM}{dt} = (-\alpha_2 + \beta_2 N)M, \quad (3.2)$$

где  $\alpha_2 > 0$ ,  $\beta_2 > 0$ .

Очевидно, что система находится в равновесии при  $M_0 = \alpha_1 / \beta_1$  и  $N_0 = \alpha_2 / \beta_2$ , когда  $dN/dt = dM/dt = 0$ . Рассмотрим малые отклонения системы от равновесных значений, т.е. представим решение в виде  $N = N_0 + n$ ,  $M = M_0 + m$ ,  $n \ll N_0$ ,  $m \ll M_0$ . Подставляя  $N$  и  $M$  в уравнения (3.1), (3.2), получим, отбрасывая члены более высокого порядка малости,

$$\frac{dn}{dt} = -\beta_1 N_0 m \quad (3.3)$$

$$\frac{dm}{dt} = -\beta_2 M_0 n \quad (3.4)$$

Дифференцируя (3.3) по  $t$  и подставляя в полученное уравнение функцию  $dm/dt$ , определяемую из (3.4), придем к уравнению

$$\frac{d^2 n}{dt^2} = -\alpha_1 \alpha_2 n,$$

аналогичному по форме уравнению механических колебаний шарика. Следовательно, в системе происходят малые колебания численности с частотой  $\omega = \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}$ , зависящей только от коэффициентов рождаемости и смертности  $\alpha_1$   $\alpha_2$ .

Заметим, что величина  $m(t)$  подчиняется такому же уравнению, причем если отклонение  $n(t)$  равно нулю в начальный момент  $t = 0$ , то  $m(t = 0)$  имеет максимальную амплитуду, и наоборот. Эта ситуация, когда численности  $n(t)$  и  $m(t)$  находятся в противофазе, воспроизводится для всех моментов  $t_i = iT/4$ ,  $I = 1, 2, \dots$ , ( $T$  – период колебаний) и

отражает запаздывание реакции численности одной популяции на изменение численности другой.

### 3.4. Простейшая модель изменения зарплаты и занятости

Рынок труда, на котором взаимодействуют работодатели и наемные рабочие, характеризуется зарплатой  $p(t)$  и числом занятых  $N(t)$ . Пусть на нем существует равновесие, т.е. ситуация, когда за плату  $p_0 > 0$  согласны работать  $N_0 > 0$  человек. Если по каким-то причинам это равновесие нарушается (например, по возрасту часть работников уходит на пенсию либо у предпринимателей возникают финансовые трудности), то функции  $p(t)$  и  $N(t)$  отклоняются от значений  $p_0, N_0$ .

Будем считать, что работодатели изменяют зарплату пропорционально отклонению численности занятых от равновесного значения. Тогда

$$\frac{dp}{dt} = -\alpha_1(N - N_0), \quad \alpha_1 < 0.$$

Предположим, что число работников увеличивается или уменьшается также пропорционально росту или уменьшению зарплаты относительно значения  $p_0$ , т. е.

$$\frac{dN}{dt} = \alpha_2(p - p_0), \quad \alpha_2 > 0.$$

Дифференцируя первое уравнение по  $t$  и исключая из него с помощью второго уравнения величину  $N$ , приходим к стандартной модели колебаний

$$\frac{d^2(p - p_0)}{dt^2} = -\alpha_1\alpha_2(p - p_0)$$

заработной платы относительно положения равновесия (аналогично и для величины  $N(t)$ ). Из первого интеграла этого уравнения

$$\alpha_1(N - N_0)^2 + \alpha_2(p - p_0)^2 = \text{const} > 0$$

видно, что в некоторые моменты  $t=t_i, i = 1, 2, \dots$ , когда  $p = p_0$  (т. е. зарплата становится равной равновесному значению), имеем  $N > N_0$ , т. е.

число занятых больше равновесного, а при  $N = N_0$  получаем  $p > p_0$ , т. е. зарплата превышает равновесную. В эти моменты фонд заработной платы, равный  $pN$ , превышает равновесное значение  $p_0N_0$  (или меньшего его), если при подходе к моменту  $t_i$  – выполнено  $p > p_0$  или  $N > N_0$  (и наоборот). Но в среднем за период колебаний величина  $pN$  равна  $p_0N_0$ .

### 3.5. Заключение

Построенные в данной главе модели в одних случаях основаны на точно известных законах (пп. 3.1, 3.2), в других – на наблюдаемых фактах и на аналогиях (п. 3.3), либо на правдоподобных представлениях о характере объекта (п. 3.4). Хотя и сущность рассматривавшихся явлений, и подходы к получению отвечающих им моделей совершенно различны, построенные модели оказались идентичны друг другу. Это свидетельствует о важнейшем свойстве математических моделей – их универсальности, широко используемом при изучении объектов самой разнообразной природы.

### 3.6. Упражнения

1. Пусть в задаче об U-образном сосуде левое имеет переменное сечение, т. е.  $r = r_0(h)$ . Покажите, применяя второй закон Ньютона и предполагая отсутствие горизонтальной компоненты у скорости жидкости, что для величины  $h$  получается уравнение вида

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -k(r)r .$$

2. Вводя в LC-контур сопротивление  $R$  и используя закон Ома, убедитесь в том, что модель колебаний в LCR-контуре аналогична уравнению

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -kr + F(v) = -kr - \mu \frac{dr}{dt} .$$

3. Сведите нелинейную систему

$$\frac{dN}{dt} = (\alpha_1 - \beta_1 M)N,$$

$$\frac{dM}{dt} = (-\alpha_2 + \beta_2 N)M$$

к уравнению второго порядка и покажите, что она, как и её линейный аналог

$$\frac{dn}{dt} = -\beta_1 N_0 m,$$

$$\frac{dm}{dt} = -\beta_2 M_0 n,$$

имеет первый интеграл.

4. Пользуясь формулой для общего решения уравнения колебаний

$$\alpha(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t,$$

покажите, что среднее значение фонда заработной платы  $pN$  за период колебаний равно равновесному.

## 4. Модели простейших нелинейных объектов

Обсудим происхождение нелинейности и рассмотрим некоторые её последствия, проявляющиеся в поведении изучаемых объектов. Проиллюстрируем неизбежность применения численных методов для их анализа.

### 4.1. О происхождении нелинейности

Как уже отмечалось, линейные модели подчиняются принципу суперпозиции. В этом случае, находя частные решения и суммируя их, как правило, удается построить и общее решение.

Для нелинейных моделей принцип суперпозиции неприменим, и общее решение можно найти лишь в редких случаях. Отдельные же частные решения нелинейных уравнений могут не отражать характер поведения объекта в более общей ситуации.

Источниками нелинейности могут быть многие причины. Фундаментальные законы природы - закон тяготения и закон Кулона - изначально нелинейны (квадратичная зависимость силы взаимодействия между массами или зарядами), и потому основанные на них модели, вообще говоря, также нелинейны. Свой вклад в нелинейность моделей вносят более сложная геометрия явления, различные внешние воздействия и, конечно же, изменение характера взаимодействия в самом объекте при изменении его состояния (эффект насыщения в моделях популяций, меняющаяся жесткость пружины).

В сущности, реальным явлениям отвечают только нелинейные модели, а линейные справедливы лишь при описании незначительных изменений величин, характеризующих объект.

### 4.2. Три режима в нелинейной модели популяции

В отличие от модели Мальтуса

$$\frac{dN(t)}{dt} = [\alpha(t) - \beta(t)]N(t)$$

и модели со скоростью пропорциональной численности, умноженной на отклонение,

$$\frac{dN}{dt} = \alpha \left( 1 - \frac{N}{N_p} \right) N, \quad \alpha > 0$$

коэффициент рождаемости будем считать зависящим от численности популяции  $N(t)$ , т. е.  $\alpha = \alpha(N)$ . Коэффициент смертности  $\beta$  также зависит от  $N$ . Уравнение динамики популяции

$$\frac{dN}{dt} = [\alpha(N) - \beta(N)]N \quad (4.1)$$

нелинейно благодаря изменению характеристик взаимодействия внутри популяции при изменении ее состояния.

Положим для определенности  $\beta(N) = \beta_0 = \text{const}$ ,  $\alpha(N) = \alpha_0 N$ , т. е. рождаемость пропорциональна численности (например, потому что члены популяции заинтересованы в ее росте). Тогда уравнение (4.1) преобразуется к виду

$$\frac{dN}{dt} = \alpha_0 N^2 - \beta_0 N \quad (4.2)$$

с квадратичной нелинейностью (характерной также для некоторых химических реакций). Рассмотрим поведение функции  $N(t)$  при различных начальных численностях  $N(0) = N_0$  (рис. 10):

а) при  $N_0 < N_{кр} = \beta_0 / \alpha_0$  численность монотонно уменьшается со временем, стремясь к нулю при  $t \rightarrow \infty$ . Решение дается формулой, аналогичной формуле для решения вышенаписанного уравнения, где  $t$  заменяется на  $-t$  (обратная логистическая кривая);

б) при критическом значении  $N_0 = N_{кр}$  численность популяции не зависит от времени;

в) при  $N_0 > N_{кр}$  характер решения принципиально изменяется по сравнению со случаями а) и б): численность растет со временем, причем настолько быстро, что обращается в бесконечность за конечное время  $t = t_f$ . Величина  $t_f$  тем меньше, чем больше  $N_0$ .

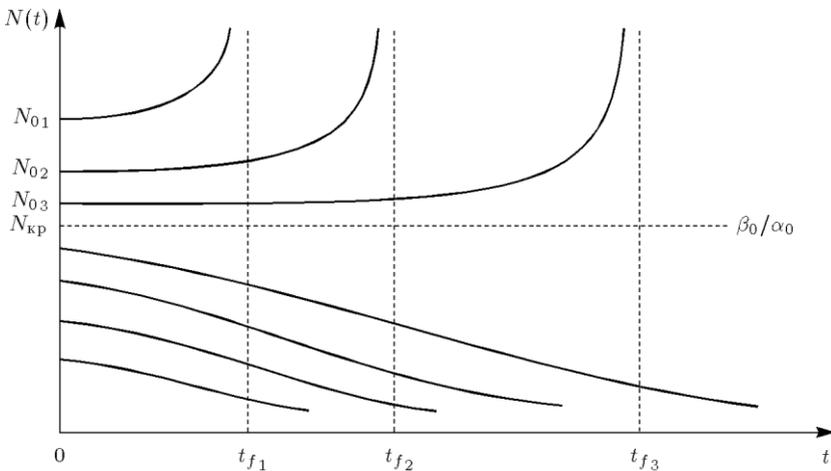


Рис. 10. Изменение численности популяции со временем в нелинейной модели

Нелинейность уравнения (4.2) порождает большое разнообразие эффектов, содержащихся даже в простейшей модели: три возможных режима изменения численности со временем; неустойчивость режима при малых отклонениях в область нижней части решение удаляется от линии  $N_{кр} = \beta_0 / \alpha_0$ ; сильную чувствительность функции  $N(t)$  к начальным данным  $N_0$ ; наконец, катастрофический рост численности популяции за конечное время при  $N_0 > N_{кр}$ .

Заметим, что последнее свойство не частный результат, а имеет место для любых моделей вида

$$\frac{dN}{dt} = F(N), \quad t > 0, \quad N(0) > 0, \quad F(N) > 0,$$

Если при больших  $N$  функция  $F(N)$  растёт быстрее первой степени  $N$ , точнее, если для  $F(N)$  справедлив критерий

$$\int_{N(0)}^{\infty} \frac{dN}{F(N)} < \infty,$$

получающийся непосредственным интегрированием уравнения.

### 4.3. Влияние сильной нелинейности на процесс колебаний

Уравнение колебаний

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -k(r)r, \quad (4.3)$$

где функция  $k(r) > 0$  описывает жесткость пружины, одно из относительно немногих нелинейных уравнений, для которого можно выписать общее решение. Вводя величину скорости  $v = dr/dt$ , перепишем (4.3) в виде

$$m \frac{dv}{dt} = -k(r)r, \quad \frac{dr}{dt} = v; \quad (4.4)$$

деля первое из этих уравнений на второе, получим нелинейное уравнение первого порядка

$$m \frac{dv}{dr} = -\frac{k(r)r}{v}.$$

Разделяя в (4.4) переменные:

$$mvdv = -k(r)rdr,$$

и дважды интегрируя последнее уравнение, находим

$$\begin{aligned} v^2 &= \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 = -2 \int_0^r k'(r')r'dr' + C, \quad k'(r) = \frac{k(r)}{m}, \\ \frac{dr}{dt} &= \pm \sqrt{C - 2 \int_0^r k'(r')r'dr'}, \quad (4.5) \\ t &= \pm \int_0^r \left( \sqrt{C - 2 \int_0^{\bar{r}} k'(r')r'dr'} \right)^{-1} d\bar{r} + C_1, \end{aligned}$$

где в неявно выписанном общем решении (4.5) константы  $C, C_1$  можно определить, зная начальные данные.

В линейном случае ( $k(r) = k_0$ ) интегральные кривые уравнения (4.4) представляют собой концентрические круги с центром в начале координат, радиус которых определяется начальной энергией системы, и «движение» по которым описывает периодический во времени процесс колебаний (рис. 11).

Рассмотрим теперь сильно нелинейную систему, в которой пружина ведет себя как «сверхмягкая», например,  $k(r) = 1/(r^2 + \alpha)$ ,  $\alpha > 0$ . В предельном случае  $\alpha = 0$  уравнение (4.4) принимает вид

$$m \frac{dv}{dr} = -\frac{1}{vr},$$

и его решение принципиально отличается от решения (4.4) (см. рис. 12) тем, что энергия не сохраняется и, более того, неограниченно растет при  $r \rightarrow \pm 0$ . При ослаблении нелинейности процесс колебаний приобретает обычный характер.

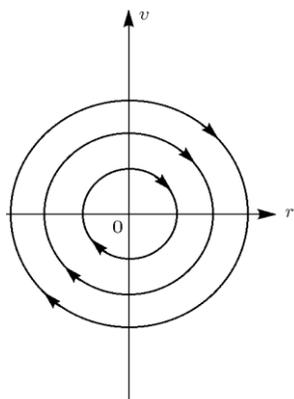


Рис. 11. Интегральные кривые.

Колебательный процесс

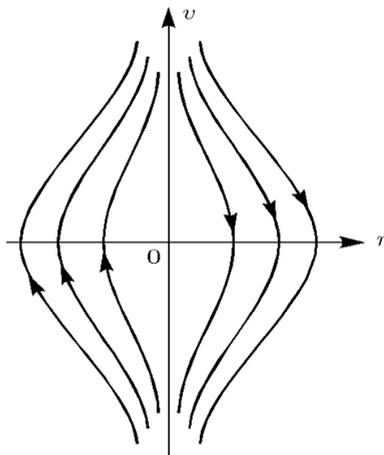


Рис. 12. Интегральные кривые.

Нелинейный случай

#### 4.4. Применение численных методов

Рассмотренные здесь примеры достаточно убедительно свидетельствуют о неизбежности применения численных методов для моделирования нелинейных объектов из-за явной недостаточности чисто теоретических подходов и сложного, разнообразного поведения характеризующих эти объекты величин. Впрочем, этот вывод справедлив и для линейных моделей, содержащих большое число неизвестных вели-

чин, независимых переменных, параметров и имеющих сложную пространственную структуру. Для построения соответствующих численных моделей широко используются методы, подходы и приемы, разрабатываемые при создании исходных моделей, но возникают свои специфические проблемы, требующие глубокого изучения. Поясним последнее утверждение простым примером. Для уравнения Мальтуса

$$\frac{dN}{dt} = (\alpha - \beta)N = \gamma N, \quad t > 0, \quad N(0) = N_0,$$

где для определенности  $(\alpha - \beta) > 0$ , вполне логично предложить следующую численную схему (разбив ось  $t$  на равные отрезки величины  $\tau = t_{i+1} - t_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ ;  $t_0 = 0$  и заменив производную на конечную разность):

$$\frac{N_{i+1} - N_i}{\tau} = \gamma N_i, \quad i = 0, 1, \dots; \quad N(t_0) = N_0. \quad (4.6)$$

Из (4.6) получаем

$$N_{i+1} = (\tau\gamma + 1)N_i,$$

что дает для его решения

$$N_1 = (1 + \tau\gamma)N_0, \quad N_2 = (1 + \tau\gamma)^2 N_0,$$

$$N_i = (1 + \tau\gamma)^i N_0 = (1 + \tau\gamma)^{t/\tau} N_0,$$

т. е. при  $t \rightarrow \infty$  решение (4.6) может отличаться от искомого сколь угодно сильно. Следовательно, для получения нужной точности необходимо должным образом выбирать шаг  $\tau$  в зависимости от величины отрезка интегрирования  $T$ .

#### 4.5. Упражнения

1. Пользуясь заменой, аналогичной  $r = \bar{r}(t)e^{\alpha t}$ , найдите решения уравнения

$$\frac{dN}{dt} = \alpha_0 N^2 - \beta_0 N$$

при  $N_0 > N_{кр}$  и вычислите величину  $t_f$  через  $N_0$ ,  $\alpha_0$ ,  $\beta_0$ .

2. Найдите ограничение на рост функции  $k(r) \rightarrow \infty$ ,  $r \rightarrow 0$  в уравнении

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -k(r)r,$$

при выполнении которого система «шарик-пружина» была бы консервативной, т. е. сохранялась бы ее полная энергия.

3. Используя представление числа  $e$  в виде соответствующего предела, покажите, что для заданных величин  $\gamma$ ,  $N_0$ ,  $T$  решение уравнения

$$\frac{N_{i+1} - N_i}{\tau} = \gamma N_i$$

стремится при  $\tau \rightarrow 0$  к решению исходной задачи.

## 5. Модели, основанные на законе сохранения числа частиц

Введем некоторые понятия теории теплового излучения, переносимого в среде световыми квантами. Закон сохранения числа квантов используем для получения кинетического уравнения, которому подчиняется функция распределения фотонов. Обсудим некоторые свойства построенной модели лучистого теплообмена в веществе.

### 5.1. Основные понятия теории теплового излучения

В веществе, нагретом до достаточно высокой температуры, большую роль играют процессы переноса энергии световыми квантами (фотонами). Распространяясь в среде, рассеиваясь и поглощаясь на атомах и молекулах вещества, а также испускаясь ими, фотоны обеспечивают лучистый теплообмен между различными участками среды. Благодаря именно этому механизму, горящий камин нагревает воздух в помещении.

Поле излучения, заполняющее пространство, можно рассматривать как электромагнитное излучение с частотой колебаний  $\nu$  и длиной волны  $\lambda$ , связанными через скорость света  $C$  ( $\lambda = c/\nu$ ). Если же говорить о поле излучения как о совокупности большого числа частиц - световых квантов, то необходимо ввести понятие энергии кванта  $h\nu$  ( $h$  - постоянная Планка), движущегося со скоростью  $c$ . В отличие от поля температур, характеризуемого координатами  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и временем  $t$ , для описания излучения важно знать также его частоту  $\nu$  (вообще говоря, разную для разных квантов) и направление движения квантов в любой точке пространства в любой момент  $t$ .

Проследить траекторию каждого из огромного числа фотонов в веществе попросту невозможно. Поэтому в теории излучения используется статистический вероятностный подход, основанный на введении функции распределения частиц. Это важное понятие успешно используется для изучения совокупности большого числа частиц или иных объектов в различных областях знания.

Функция распределения фотонов  $f = f(\nu, \vec{r}, \vec{\Omega}, t)$  зависит от частоты квантов радиуса-вектора  $\vec{r}$  (т. е. от координат  $x, y, z$ ), направления движения частиц  $\vec{\Omega}$  и времени  $t$  элемент объёма  $d\vec{r}$  около точки  $\vec{r}$  (рис. 13). Тогда величина

$$f(\nu, \vec{r}, \vec{\Omega}, t) d\nu d\vec{r}, d\vec{\Omega} \quad (5.1)$$

по определению – это числа квантов, находящихся в спектральном интервале  $(\nu, \nu + d\nu)$  (т. е. их частота лежит между значениями  $\nu$  и  $\nu + d\nu$ ), занимающих объём  $d\vec{r}$  и имеющие направление движения в диапазоне от  $\vec{\Omega}$  до  $\vec{\Omega} + d\vec{\Omega}$  ( $\vec{\Omega}$  - единичный вектор).

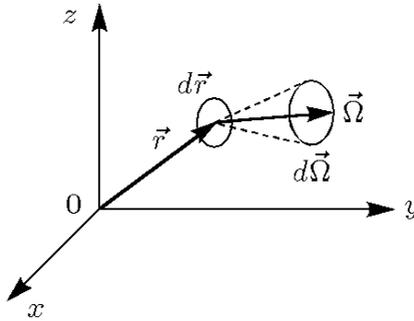


Рис. 13. Элементарный объём излучения квантов

Размер объёма  $\vec{r}$  предполагается гораздо больше длины волны  $\lambda$ , так что волновые эффекты несущественны. Функция распределения (5.1) – одно из исходных понятий теории лучистого теплообмена, с помощью которого вводятся и вычисляются все остальные характеристики, описывающие этот процесс. Величина  $I_\nu$  определяемая по формуле называется спектральной интенсивностью излучения. Она представляет собой количество лучистой энергии в

$$I_\nu(\vec{r}, \vec{\Omega}, t) = h\nu c f(\nu, \vec{r}, \vec{\Omega}, t), \quad (5.2)$$

спектральном интервале от  $\nu$  до  $\nu + d\nu$ , переносимое фотонами за единицу времени через единичную площадку, помещенную в точке  $\vec{r}$  и перпендикулярную к направлениям их полета (которые лежат в диапазоне углов от  $\vec{\Omega}$  до  $\vec{\Omega} + d\vec{\Omega}$ ; рис. 14). Действительно, так как энергия кванта равна  $h\nu$ , а общее число квантов с частотой от  $\nu$  до  $\nu + d\nu$  и с

направлением полета от  $\vec{\Omega}$  до  $\vec{\Omega}+d\vec{\Omega}$  в единице объёма равно  $f d\nu d\vec{\Omega}$ , то переносимая ими за 1 с через расположенную перпендикулярно полёту площадку в  $1 \text{ см}^2$  энергия равна  $h\nu c f d\nu d\vec{\Omega}$ , что согласуется с определением (5.2). Спектральная плотность излучения

$$U_\nu(\vec{r}, t) = h\nu \int_{4\pi} f d\vec{\Omega} = \frac{1}{c} \int_{4\pi} I_\nu d\vec{\Omega} \quad (5.3)$$

представляет собой количество лучистой энергии квантов, содержащихся в  $1 \text{ см}^3$  пространства в точке  $\vec{r}$  в момент  $t$  в единичном интервале частот и имеющих частоту  $\nu$ .

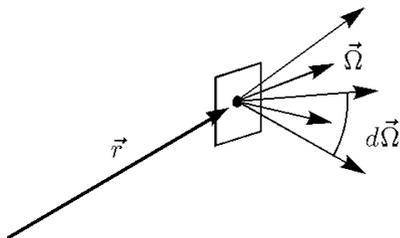


Рис. 14. Единичная площадка

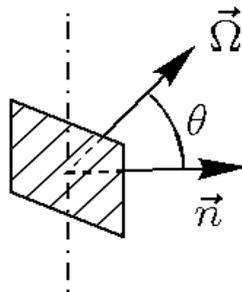


Рис. 15. Единичная площадка

Ещё одной важной характеристикой служит спектральный поток излучения  $(\vec{S})_\nu$ . Фотоны, пересекающие единичную площадку с направлением нормали  $\vec{n}$ , переносят через нее энергию (в 1 с в интервале от  $\nu$  до  $\nu + d\nu$ ), равную  $h\nu c \int_{2\pi} f \cos \theta d\vec{\Omega}$  (рис. 15).

Аналогично вычисляется энергия, распространяющаяся через площадку справа налево, но интегрирование ведётся по левой полушере. Их разность и даёт величину  $S_\nu$ :

$$S_\nu(\vec{r}, \vec{t}, \vec{n}) = h\nu c \int f \cos \theta d\vec{\Omega}, \quad (5.4)$$

где  $\theta$  – угол между направлением движения квантов и нормалью. Величина  $S_v$  – проекция вектора  $S_v$  на нормаль  $\vec{n}$ , а сам вектор есть

$$\vec{S}_v = \int_{4\pi} I_v \vec{\Omega} d\vec{\Omega}. \quad (5.5)$$

Заметим, что при изотропном (не зависящем от направления  $\vec{\Omega}$ ) излучении спектральная плотность, как следует из (5.3), равна

$$U_v = 4\pi h\nu f,$$

а из (5.5) видно, что поток  $\vec{S}_v$  равен нулю в любой точке пространства.

Полную интенсивность, плотность и поток излучения можно получить из спектральных характеристик интегрированием по всему спектру частот  $\nu$ .

## 5.2. Уравнение баланса числа фотонов в среде

Выведем уравнение, описывающее перенос излучения в среде, пользуясь законом сохранения числа частиц и следующими предположениями:

1) процесс распространения квантов одномерный, т. е.

$$f = f(\nu; x; \vec{\Omega}; t);$$

2) рассеянием квантов света на атомах или молекулах (т. е. изменением их направления) можно пренебречь;

3) известен характер поглощения и испускания света атомами и молекулами вещества;

4) фотоны самопроизвольно не исчезают и не появляются.

Рассмотрим баланс частиц в элементарном цилиндре, имеющем ось в направлении  $\vec{\Omega}$ , длину  $ds = dx/\cos \theta$  и основание  $d\sigma$  (рис. 16), где  $\theta$  – угол между осью  $x$  и вектором  $\vec{\Omega}$ . Будем интересоваться излучением частоты  $\nu$  в единичном интервале частот, распространяющимся внутри единичного телесного угла в направлении  $\vec{\Omega}$ .

В соответствии с (5.1) и (5.2) за время  $dt$  в левое основание цилиндра входит число частиц, равное

$$cf(\nu, x, \vec{\Omega}, t)d\sigma dt.$$

За то же время из его правого основания выходит число частиц

$$(cf(\nu, x, \vec{\Omega}, t) + cd f)d\sigma dt,$$

где величина  $df$  описывает приращение функции  $f$  при переходе от одного основания к другому. Поскольку  $f = f(v, x, \vec{\Omega}, t)$ , то эту величину можно представить в виде

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial s} ds, ds = \frac{dx}{\cos \theta},$$

где первое слагаемое отвечает ее приращению по времени за промежуток  $dt$ , а второе – приращению по координате  $s$ .

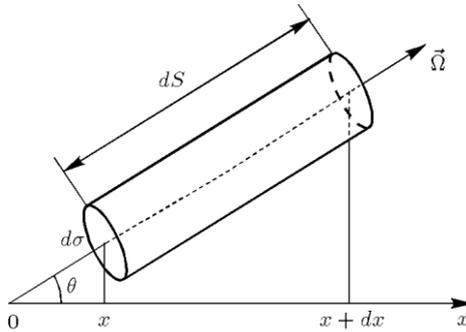


Рис. 16. Элементарный цилиндр

Учитывая, что скорость фотонов равна  $c$  и  $dt = ds/c$ , получаем

$$df = \left( \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial s} \right) ds.$$

Итак, число фотонов в цилиндре за время  $dt$  изменилось на величину

$$-\left( \frac{\partial f}{\partial t} + c \frac{\partial f}{\partial s} \right) ds d\sigma dt = -\left( \frac{\partial f}{\partial t} + c \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} \right) ds d\sigma dt. \quad (5.6)$$

Напомним, что через боковую поверхность цилиндра фотоны, имеющие направление полета  $\vec{\Omega}$  и не претерпевающие рассеяния, не пролетают.

Таким образом, изменение числа квантов в объеме цилиндра может вызываться лишь их поглощением или испусканием атомами и молекулами вещества, находящегося внутри цилиндра. Для вычисления этой величины вводится понятие равновесного излучения, когда число квантов, поглощенных веществом, равно числу испущенных ча-

стиц (излучение и вещество находятся в равновесии) в любой момент времени. Равновесная функция распределения  $f_p$  есть (закон Планка)

$$f_p = \frac{2\nu^2}{c^3} \exp\left(1 - \frac{h\nu}{kT}\right), \quad (5.7)$$

где  $T$  – температура вещества (считается, что среда находится в условиях локального термодинамического равновесия, и в любой её точке можно ввести такие характеристики, как температура, внутренняя энергия и т.д.).

В отсутствие равновесия между излучением и веществом интенсивность поглощения (испускания) фотонов пропорциональна разности между  $f_p$  и  $f$ , т. е. величине

$$\chi'_\nu c(f - f_p),$$

где  $\chi_\nu = \chi_\nu(1 - \exp(h\nu/kT))$ , а  $\chi_\nu$  – коэффициент поглощения, определяемый состоянием среды и её свойствами. Изменение через кванты в объёме цилиндра за время  $dt$  равно

$$\chi'_\nu (f - f_p) d\sigma ds dt. \quad (5.8)$$

Приравнявая (5.6) и (5.8), получаем для функции распределения кинетическое уравнение, описывающее перенос излучения в среде:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} = \chi'_\nu (f - f_p), \quad (5.9)$$

где  $f_p$  задаётся формулой (5.7). Уравнение (5.9) вместе с функциями  $f_p$ ,  $\chi'$  и краевыми условиями представляют собой замкнутую модель распространения лучистой энергии при сделанных выше предположениях.

### 5.3. Некоторые свойства уравнения переноса излучения

Полученное на основании закона сохранения числа частиц нестационарное одномерное неоднородное гиперболическое уравнение (5.9) может быть обосновано также и с помощью закона сохранения энергии. Действительно, в цилиндре рассматривался баланс частиц, имеющих одинаковую частоту  $\nu$  и, следовательно, одинаковую энергию  $h\nu$ . Учитывая это, (5.9) легко переписать как уравнение относительно спектральной интенсивности излучения  $I_\nu = h\nu c f$ :

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \cos \theta \frac{\partial I_\nu}{\partial x} = \chi_\nu (I_{\nu p} - I_\nu), \quad (5.10)$$

которое эквивалентно (5.9), но имеет более непосредственный физический смысл.

При интегрировании (5.10) по телесному углу  $\bar{\Omega}$  (т. е. по всем направлениям полета квантов) получаем уравнение, связывающее плотность излучения (5.3) и его поток (5.4):

$$\frac{\partial U_v}{\partial t} + \frac{\partial S_v}{\partial x} = c\chi_v(U_{vp} - U_v). \quad (5.11)$$

Это уравнение можно трактовать как уравнение неразрывности для излучения данной частоты, выражающее закон сохранения излучения и вполне аналогичное уравнению движения грунтовых вод и уравнению теплопроводности. Наиболее очевидна эта аналогия в трехмерном случае, когда уравнения (5.10) и (5.11) принимают вид

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_v}{\partial t} + \bar{\Omega} \nabla I_v = \chi_v(I_{vp} - I_v), \quad (5.12)$$

$$\frac{\partial U_v}{\partial t} + \text{div } \bar{S}_v = c\chi_v(U_{vp} - U_v). \quad (5.13)$$

Хотя уравнения (5.9) - (5.13) линейные, нельзя, вообще говоря, утверждать, что модели лучистого теплообмена проще нелинейных моделей. Ведь, решая (5.9) - (5.13), можно получать каждый раз лишь спектральные (т. е. для данной частоты  $\nu$ ) характеристики излучения, распространяющегося в заданном направлении  $\bar{\Omega}$ . Для полной картины необходимо найти нужные величины для всех значений  $\nu$ ,  $\bar{\Omega}$  (или какие-то интегралы от них), что является гораздо более трудной задачей. К тому же в более сложных ситуациях (наличие рассеивания фотонов и т. д.) сами модели (5.9) - (5.13) могут значительно усложняться.

Наиболее простая модель переноса излучения получается из (5.10), если поглощением и испусканием квантов можно пренебречь и рассматривать случай, когда все частицы движутся в одном направлении. Тогда для любых значений  $\nu$  можно положить  $\cos \theta = 1$  и прийти к уравнению

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_v}{\partial t} + \frac{\partial I_v}{\partial x} = 0,$$

полностью идентичному уравнению для потока невзаимодействующих материальных частиц.

Если интенсивность излучения не зависит от времени, то (5.10) превращается в неоднородное линейное дифференциальное уравнение

$$\cos \theta \cdot \frac{dI_v}{dx} + \chi_v I_v = x_v I_{vp}, \quad (5.14)$$

общее решение которого имеет вид

$$I_v(x) = \int_{x_0}^x \chi_v I_{vp} e^{-\chi(x')} dx' + I_{v0} e^{-\chi(x_0)}. \quad (5.15)$$

Здесь  $\chi(x') = \int_{x'}^x \chi_v dx'' \cdot \chi(x_0) = \int_{x_0}^x \chi_v dx''$  (для простоты в 5.15) положено  $\cos \theta = 1$ ),  $I_{v0}$  - постоянная интегрирования.

Не останавливаясь подробно на физическом смысле решения (5.15), поясним, что первый член обязан своим происхождением излучению, возникшему в веществе на отрезке от  $x_0$  до  $x$  (и ослабленному поглощением). Второе слагаемое представляет собой излучение от каких-то внешних источников, входящих в вещество на его границе  $x_0$  (и также ослабленное поглощением по мере распространения по среде).

Если  $I_{vp}$  и  $\chi_v$  - известные функции координаты  $x$  (для этого должны быть известны температура и плотность вещества вдоль траектории частиц), то решение уравнения (5.14) сводится к квадратуре.

В противоположном рассмотренному случае пространственно однородного поля излучения из (5.10) получаем

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_v}{\partial t} = \chi_v (I_{vp} - I_v). \quad (5.16)$$

Процесс, описываемый уравнением (5.16), соответствует ситуации, когда в неограниченной и первоначально холодной среде (т. е. в момент  $t = 0$  излучения нет) с постоянной плотностью происходит быстрый нагрев вещества до некоторой температуры  $T$ , которая затем поддерживается неизменной во времени. Поскольку потерь излучения с границ нет, то пространственные градиенты  $T$  равны нулю и  $\chi_v$ ,  $I_{vp}$  не зависят от  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Возникшее в результате нагрева излучение также имеет нулевой градиент (т. е.  $I_v = I_v(t)$ ) и, обмениваясь энергией с веществом, стремится с течением времени к равновесному значению по экспоненциальному закону.

#### 5.4. Упражнения

1. Проверьте правильность выражения для спектрального излучения

$$\vec{S}_v = \int_{4\pi} I_v \vec{\Omega} d\vec{\Omega}$$

2. Повторяя рассуждения п. 5.2, получите трёхмерное уравнения (5.9) или (5.10) в случае, когда функция распределения зависит от  $x, y, z$ .

3. Используя определения (5.3), (5.4), выведите из

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial I_v}{\partial t} + \vec{\Omega} \nabla I_v &= \chi_v (I_{vp} - I_v) \\ \frac{\partial U_v}{\partial t} + \text{div} \vec{S}_v &= c \chi_v (U_{vp} - U_v). \end{aligned}$$

4. Получите решение уравнения

$$\begin{aligned} I_v(x) &= \int_{x_0}^x \chi_v I_{vp} e^{-\chi(x')} dx' + I_{v0} e^{-\chi(x_0)} \\ \cos \theta \cdot \frac{\partial I_v}{\partial t} + \chi_v I_v &= \chi_v I_{vp} \end{aligned}$$

и конкретизируйте его в случае постоянных  $\chi_v, I_{vp}$ .

5. Убедитесь в том, что решение уравнения насыщения

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_v}{\partial t} = \chi_v (I_{vp} - I_v)$$

имеет экспоненциальный вид и найдите показатель экспоненты.

## Библиографический список

1. Самарский, А.А. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры / А.А. Самарский, А.П. Михайлов. – М.: Наука; Физматлит, 1997. – 320 с.
2. Амелькин, В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях / В.В. Амелькин. – М.: Наука, 1987. – 160 с.
3. Базыкин, А.Д. Математическая биофизика взаимодействующих популяций / А.Д. Базыкин. – М.: Наука, 1985. – 182 с.
4. Белоцерковский, О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред / О.М. Белоцерковский. – М.: Наука, 1994. – 442 с.
5. Седов, Л.И. Методы подобия и размерности в механике / Л.И. Седов. – М.: Наука, 1981. – 448 с.

*Учебное издание*

## **КОНЦЕПЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ПРОЦЕССОВ**

*Методические указания*

Составители:

*Асланов Владимир Степанович,  
Алексеев Алексей Владимирович*

Редактор И.П. Ведмидская  
Компьютерная вёрстка И.П. Ведмидской

Подписано в печать 15.11.2017. Формат 60×84 1/16.

Бумага офсетная. Печ. л. 3,75.

Тираж 25 экз. Заказ . Арт. 62/2017.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ имени академика С.П. КОРОЛЕВА»  
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)  
443086 САМАРА, МОСКОВСКОЕ ШОССЕ, 34.

---

Издательство Самарского университета.  
443086 Самара, Московское шоссе, 34.

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ДЛЯ ЗАМЕТОК