МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АЭРОКОСМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

А.С. Гвоздев, В.С.Мелентьев

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ
ПО ОСНОВАМ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

С А М А Р А

2011

УДК 621.431.75 (075)
ББК 39.55

Авторы: Гвоздев Александр Сергеевич
Мелентьев Владимир Сергеевич

Гвоздев А.С., Мелентьев В.С. Лабораторные работы по основам метода конечных элементов

Для усвоения студентами основ метода конечных элементов проводится расчет простейшей системы, состоящей из двух треугольных конечных элементов. Даны задания, приведен пример выполнения работы.
Учебное пособие предназначено для подготовки специалистов 2 факультета 4 курса по специальности 160301.65 «Авиационные двигатели и энергетические установки» и 160302.65 «Двигатели летательных аппаратов» (Государственный образовательный стандарт второго поколения - ГОС-2), и по специальности 160700 «Проектирование авиационных и ракетных двигателей», специалистов и бакалавров (Федеральный Государственный образовательный стандарт третьего поколения - ФГОС-3).
Подготовлено на кафедре конструкции и проектирования двигателей летательных аппаратов СГАУ.

СОДЕРЖАНИЕ

Порядок выполнения расчётной работы по дисциплине «Основы метода конечных элементов»

Суть работы состоит в практическом знакомстве с основами определения деформаций в конструкциях за счёт получения навыков определения перемещений узлов и реакций в системе, состоящей из нескольких, минимум двух, плоских трёхузловых конечных элементов. Теоретической базой данной расчётной работы является курс лекций по дисциплине «Основы метода конечных элементов», где раскрывается значение таких ключевых терминов, как «конечный элемент», «узел», «степень свободы», а также даётся теоретическое обоснование применяемых расчётных методов.

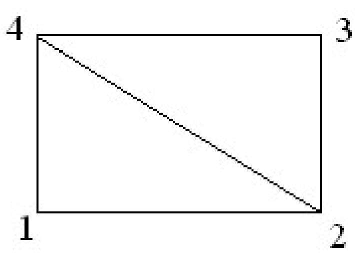
1. ЗАДАНИЕ

Задание на работу выдаётся в виде таблицы

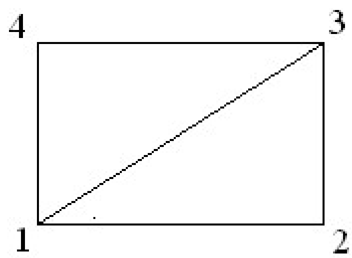
ФАМИЛИЯ	NR	NZ	NA	NB	NH	NF1	NF2	NP1	NP2

Расшифровка данной таблицы приводится ниже.

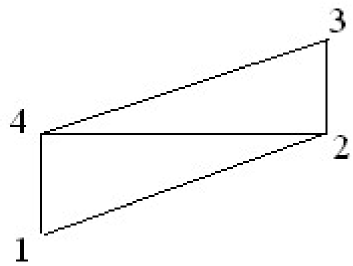
1. Варианты разбивки NR



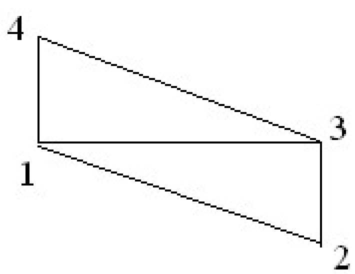
1



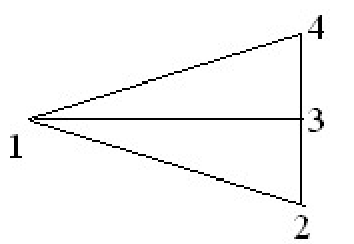
2



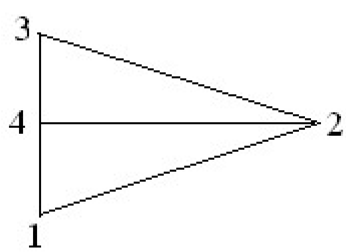
3



4



5



6

2. Варианты закрепления (номера закрепленных узлов)

Цифрами обозначены номера узлов. Изменять их нельзя. Для простоты расчёта рекомендуется размещать центр системы координат в узле 1, ось x направлять вправо, ось y вверх. Отрицательные координаты узлов в выбранной системе координат допускаются.

В закреплённых узлах перемещения равны нулю, однако возникают реакции. Номера закрепленных узлов приведены в таблице.

NZ	1	2	3	4	5	6
	1, 2	1, 3	1, 4	2, 3	2, 4	3, 4

3. Ширина a: 0,1NA (м)

NA= 1, 2, 3, 4, 5

4. Высота b: 0,1NB (м)

NB= 1, 2, 3, 4, 5

Для схем NR = 1, 2: a – длина линии 1 – 2; b – длина линии 1 – 4.

Для схем NR = 3, 6: a – длина линии 2 – 4; b – длина линии 1 – 4.

Для схем NR = 4, 5: a – длина линии 1 – 3; b – длина линии 2 – 3.

5. Толщина h: 0,002NH (м)

NH= 1, 2, 3, 4, 5

6. Сосредоточенная сила – действует в положительном направлении оси y

Приложена к узлу NF1= 1, 2, 3, 4 . При составлении вариантов задания необходимо следить, чтобы данный узел не был закреплён.

Величина силы 5000NF2 (Н)

NF2= 1, 2, 3, 4, 5

7. Распределенная сила (p_{ij}) – действует в положительном направлении оси x

Она действует вдоль всей линии, условно проводимой между двумя узлами системы i и j, не обязательно вдоль границ КЭ, и при расчёте заменяется сосредоточенными силами, действующими в этих узлах. Общую величину нагрузки можно узнать, умножив распределённую силу на длину линии, вдоль которой она действует. Для простоты, считаем, что нагрузка распределяется поровну между двумя узлами. Для горизонтальных участков нагрузка на один узел определится из выражения p·a/2, для вертикальных p·b/2, для наклонных $(a^2+b^2)^{0,5}/2$. Значения сил округляются до целых.

При составлении вариантов задания необходимо следить, чтобы NP1 не равнялось NZ, т.е. распределённая сила должна быть приложена к незакреплённой линии.

NP1	1	2	3	4	5	6
	1, 2	1, 3	1, 4	2, 3	2, 4	3, 4

Величина силы 40000NP2 (Н/м)

NP2= 1, 2, 3, 4, 5

Материал: E=2x10^{11} Па , коэффициент Пуассона μ =0,33 .

2. ВЫПОЛНЕНИЕ РАБОТЫ

Рассмотрим систему, состоящую из двух треугольных трёхузловых плоских конечных элементов. Данные элементы могут быть скомбинированы различными способами, рассмотренными выше. Продемонстрируем порядок расчёта на системе, показанной на рис. 1.

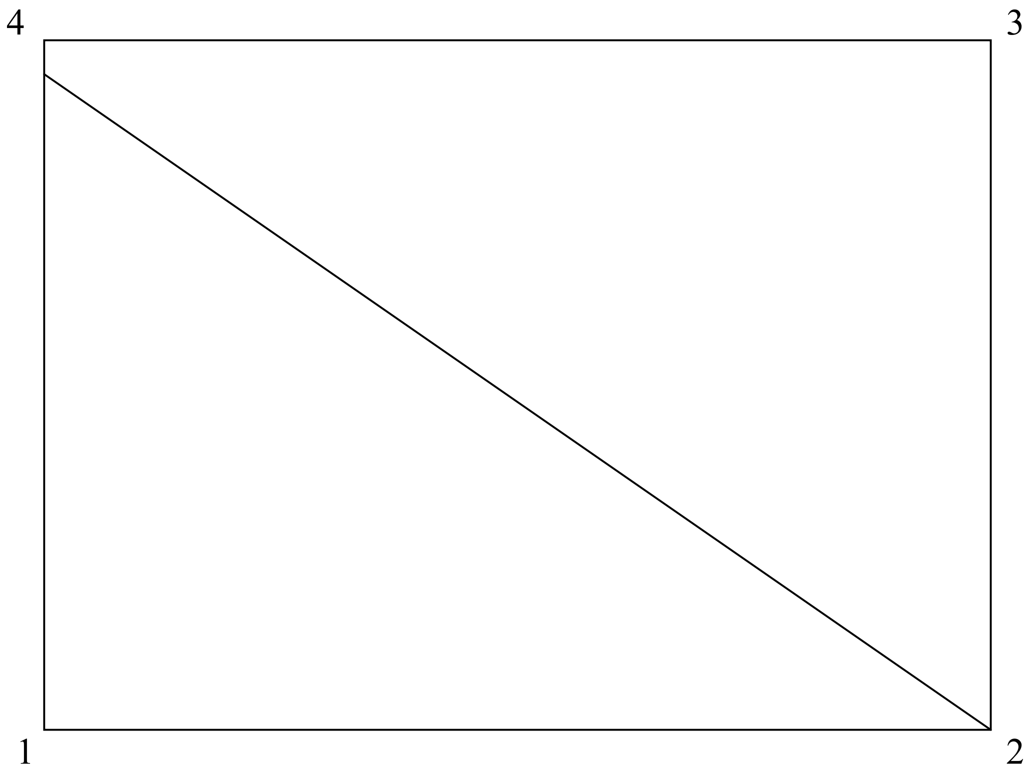


Рис. 1. Схема системы с обозначениями номеров узлов

Данная система представляет собой прямоугольник, стороны которого имеют размеры a (линия 1-2) и b (линии 1-4), толщиной h.

ВНИМАНИЕ! Все вычисления должны производиться в метрической системе.

Пусть глобальная система координат, в которой будут производиться все расчёты, находится в узле №1. Всего данная система имеет восемь степеней свободы: перемещения вдоль осей x и y в каждом из узлов. Обозначим их q_{ji}, где j – ось перемещения, i – номер узла. Например, q_{x1} – это перемещение вдоль оси x в узле №1, q_{y3} – перемещение вдоль оси y в узле №3.

Задание граничных условий

Зададим жёсткую заделку в нижней части прямоугольника (вдоль линии 1-2). Тогда перемещения в узлах №1 и №2 отсутствуют, т.е. $q_{x1} = q_{y1} = q_{x2} = q_{y2} = 0$. Однако при этом в узлах №1 и №2 будут действовать неизвестные реакции $N_{x1}, N_{y1}, N_{x2}, N_{y2}$.

На систему также действуют внешние силы. В узле №3 действует направленная вверх сила P_{y3}, а вдоль линии 1-4 приложена равномерная погонная нагрузка p_{14} (нагрузка вдоль линии имеет размерность Н/м).

Для дальнейшего расчёта погонную нагрузку необходимо привести к узлам[1]. В силу её равномерности, она распределяется поровну между узлами, и приведение можно выполнить по следующей зависимости:

$$P_{x1} = P_{x4} = p_{14}\frac{b}{2} \tag{1}$$

Для расчёта потребуются модуль жёсткости материала (параметры даны для стали) $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па и коэффициент Пуассона μ = 0,33.

Построение векторов перемещений и сил

С учётом вышеизложенного, вектора перемещений и глобальных[2] реакций всех узлов можно записать в виде

[1] Основой МКЭ является предположение, что при расчёте деформаций и напряжений в сплошном теле, оно может быть заменено на совокупность связанных КЭ, с заданной степенью точности повторяющей форму исходного тела, которые состоят из определенного числа узлов. Кроме узлов в модели не должно быть никаких геометрических элементов: ни линий, не поверхностей, не объёмов. Поэтому любые виды нагрузок должны распределяться по узлам созданных КЭ.

[2] Глобальные реакции, это реакции, возникающие в заделках от действия внешних сил. Также есть локальные реакции в узлах, вызванные воздействием одного конечного элемента на другой.

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ q_{x3} \\ q_{y3} \\ q_{x4} \\ q_{y4} \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} N_{x1} \\ N_{y1} \\ N_{x2} \\ N_{y2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (2)$$

Тогда, общий вектор нагрузок, приходящихся на узлы

$$\begin{Bmatrix} P_{x1} + N_{x1} \\ N_{y1} \\ N_{x2} \\ N_{y2} \\ 0 \\ P_{y3} \\ P_{x4} \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (3)$$

Построение матриц жесткостей отдельных элементов

Построим матрицу жёсткости на основе энергетического метода. Определим площадь каждого конечного элемента S_k. В данном случае $S_1 = S_2 = a \cdot b/2$.

Далее найдём значения коэффициентов матрицы [D]

$$[D] = \frac{E}{1-\mu^2}\begin{pmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{pmatrix} \qquad (4)$$

Данная матрица выведена из обобщённого закона Гука и одинакова для всех элементов. При этом все её коэффициенты являются константами.

На следующем шаге решения найдём значения коэффициентов матриц [B_1] и [B_2], которые определяют связь геометрических характеристик внутри конечных элементов, вследствие чего для каждого элемента существует уникальная матрица [B]. Она состоит из разности координат узлов, входящих в конечный элемент. Запишем координаты узлов

$$\begin{matrix} x_1 = 0 & y_1 = 0 \\ x_2 = a & y_2 = 0 \\ x_3 = a & y_3 = b \\ x_4 = 0 & y_4 = b \end{matrix} \qquad (5)$$

Запишем матрицу [B] в общем виде, обозначив

$$[B]=\frac{1}{2S}\begin{pmatrix} y_j-y_k & 0 & y_k-y_i & 0 & y_i-y_j & 0 \\ 0 & x_k-x_j & 0 & x_i-x_k & 0 & x_j-x_i \\ x_k-x_j & y_j-y_k & x_i-x_k & y_k-y_i & x_j-x_i & y_i-y_j \end{pmatrix},$$

где i, j, k – узлы соответствующего конечного элемента.

Нумерация узлов в матрице должна соответствовать порядку узлов в векторах перемещения и силы и обязательно идти против часовой стрелки, желательно, по возрастающей. Например, для первого элемента узлы идут в порядке №1(i)-2(j)-4(k), для второго №2(i)-3(j)-4(k).

Удобно оформить это в виде таблицы. Желательно, чтобы меньшему номеру элемента соответствовали меньшие номера узлов.

№ элемента	Узел i	Узел j	Узел k
I	1	2	4
II	2	3	4

Тогда матрицы $[B]$ для обоих конечных элементов запишутся в виде

$$[B_1]=\frac{1}{2S_1}\begin{pmatrix} y_2-y_4 & 0 & y_4-y_1 & 0 & y_1-y_2 & 0 \\ 0 & x_4-x_2 & 0 & x_1-x_4 & 0 & x_2-x_1 \\ x_4-x_2 & y_2-y_4 & x_1-x_4 & y_4-y_1 & x_2-x_1 & y_1-y_2 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$[B_2]=\frac{1}{2S_2}\begin{pmatrix} y_3-y_4 & 0 & y_4-y_2 & 0 & y_2-y_3 & 0 \\ 0 & x_4-x_3 & 0 & x_2-x_4 & 0 & x_3-x_2 \\ x_4-x_3 & y_3-y_4 & x_2-x_4 & y_4-y_2 & x_3-x_2 & y_2-y_3 \end{pmatrix} \quad (7)$$

При составлении матриц в числовом виде, во избежание путаницы, множитель $1/(2S_i)$ рекомендуется вносить внутрь матрицы путём умножения на него всех коэффициентов матрицы. По аналогии могут быть построены матрицы $[B]$ для любого числа элементов.

Построим транспонированную матрицу $[B]$.

$$[B_1^T]=\frac{1}{2S_1}\begin{pmatrix} y_2-y_4 & 0 & x_4-x_2 \\ 0 & x_4-x_2 & y_2-y_4 \\ y_4-y_1 & 0 & x_1-x_4 \\ 0 & x_1-x_4 & y_4-y_1 \\ y_1-y_2 & 0 & x_2-x_1 \\ 0 & x_2-x_1 & y_1-y_2 \end{pmatrix} \quad (8)$$

Тогда матрицы жёсткости первого и второго элементов запишутся в виде

$$[K_1]=S_1h[B_1^T][D][B_1] \quad (9)$$

$$[K_2]=S_2h[B_2^T][D][B_2] \quad (10)$$

При перемножении следует учитывать, что данная операция не коммутативна, т.е. матрицы необходимо перемножать именно в том порядке, в котором они записаны. Крайне важно выдерживать высокую точность расчёта, в противном случае при математических операциях величина ошибки будет всё время нарастать. Рекомендуется использовать для записи чисел не менее пяти значащих цифр (например, 0,0012345 или $1{,}2345\cdot10^{-3}$).

Итоговая матрица жёсткости каждого элемента может быть представлена в виде

$$[K_1] = \begin{pmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & k_{13}^1 & k_{14}^1 & k_{15}^1 & k_{16}^1 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 & k_{23}^1 & k_{24}^1 & k_{25}^1 & k_{26}^1 \\ k_{31}^1 & k_{32}^1 & k_{33}^1 & k_{34}^1 & k_{35}^1 & k_{36}^1 \\ k_{41}^1 & k_{42}^1 & k_{43}^1 & k_{44}^1 & k_{45}^1 & k_{46}^1 \\ k_{51}^1 & k_{52}^1 & k_{53}^1 & k_{54}^1 & k_{55}^1 & k_{56}^1 \\ k_{61}^1 & k_{62}^1 & k_{63}^1 & k_{64}^1 & k_{65}^1 & k_{66}^1 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

где k_{ij} – коэффициенты влияния, а верхний индекс обозначает номер конечного элемента. Элементы справа и слева относительно главной диагонали должны быть одинаковы[3]. Таким образом, левый нижний угол должен быть зеркальным отражением верхнего правого с осью симметрии, проходящей через главную диагональ $(k_{11}^1 \dots k_{66}^1)$ Так можно проверить правильность построения матрицы.

Данным матрицам соответствуют перемещения узлов, принадлежащих первому и второму конечным элементам.

$$q^1 = \begin{Bmatrix} q_{x1} \\ q_{y1} \\ q_{x2} \\ q_{y2} \\ q_{x4} \\ q_{y4} \end{Bmatrix}, q^2 = \begin{Bmatrix} q_{x2} \\ q_{y2} \\ q_{x3} \\ q_{y3} \\ q_{x4} \\ q_{y4} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

Т.е. первому узлу соответствуют только 1-я и 2-я строки матрицы $[K_1]$, второму узлу 2-я и 3-я строки матрицы $[K_1]$ и 1-я и 2-я строки матрицы $[K_2]$, третьему узлу 2-я и 3-я строки матрицы $[K_2]$, а четвёртому узлу 3-я и 4-я строки обеих матриц $[K_1]$ и $[K_2]$.

Построение общей матрицы жёсткости

Построим общую матрицу жёсткости $[K]$, для чего необходимо записать уравнения равновесия для каждого узла. Т.е. сумма всех внутренних

---

[3] Такая матрица называется «диагональной». С физической точки зрения, элементы матрицы представляют собой коэффициенты влияния одних узлов на другие. И если, потянув за узел №3, мы смещаем узел №2 на 1 мм, то в силу линейности системы, потянув за узел №2, мы сместим узел №3 также на 1 мм.

реакций в каждом узле должна быть равна нулю. При этом следует учесть, что узлы №1 и №3 принадлежат только одному конечному элементу (соответственно первому и второму). А узлы №2 и №4 принадлежат обоим конечным элементам.

В первом элементе порядок узлов №1-2-4. Поэтому для записи уравнения равновесия первого узла используем только первые две строки матрицы [K_1]. Затем разделим выбранные строки матрицы [K_1] на несколько квадратных матриц размерностью 2x2. Поскольку узел №1 принадлежит только одному элементу, то $k_{ij} = k^1$, где i, j – номер строки и столбца матрицы жёсткости. Запишем все силы, действующие в узле №1.

$$\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_{x1} \\ q_{y1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_{13} & k_{14} \\ k_{23} & k_{24} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_{x2} \\ q_{y2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_{x3} \\ q_{y3} \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} k_{17} & k_{18} \\ k_{27} & k_{28} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_{x4} \\ q_{y4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{x1} + N_{x1} \\ N_{y1} \end{pmatrix} \quad (13)$$

Нулевая матрица для перемещений третьего узла взята потому, что узел №3 не входит в первый конечный элемент[4]. Примеры определения коэффициентов:

$k_{11} = k^1_{11};\ k_{23} = k^1_{23};\ k_{15} = 0;\ k_{17} = k^1_{15}$

Узел №2 принадлежит двум конечным элементам, поэтому его матрица жёсткости записывается сложнее. Для её записи воспользуемся третьей и четвёртой строками матрицы [K_1] и первой и второй строками матрицы [K_2], соответствующих узлу №2. Значения коэффициентов в матрицах сложим с учётом порядка узлов в элементах. Запишем матрицу сначала в общем виде

$$\begin{pmatrix} k_{31} & k_{32} \\ k_{41} & k_{42} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_{x1} \\ q_{y1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_{33} & k_{34} \\ k_{43} & k_{44} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_{x2} \\ q_{y2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_{35} & k_{36} \\ k_{45} & k_{46} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_{x3} \\ q_{y3} \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} k_{37} & k_{38} \\ k_{47} & k_{48} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_{x4} \\ q_{y4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_{x2} \\ N_{y2} \end{pmatrix} \quad (14)$$

Затем через коэффициенты матриц K_1 и K_2.

$$\begin{pmatrix} k^1_{31} + 0 & k^1_{32} + 0 \\ k^1_{41} + 0 & k^1_{42} + 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_{x1} \\ q_{y1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k^1_{33} + k^2_{11} & k^1_{34} + k^2_{12} \\ k^1_{43} + k^2_{21} & k^1_{44} + k^2_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_{x2} \\ q_{y2} \end{pmatrix} + \\ \begin{pmatrix} 0 + k^2_{13} & 0 + k^2_{14} \\ 0 + k^2_{23} & 0 + k^2_{24} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_{x3} \\ q_{y3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k^1_{35} + k^2_{15} & k^1_{36} + k^2_{16} \\ k^1_{45} + k^2_{25} & k^1_{46} + k^2_{26} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_{x4} \\ q_{y4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_{x2} \\ N_{y2} \end{pmatrix}$$
(15)

Нули в первой матрице записаны потому, что узел №1 не входит во второй конечный элемент, аналогично, нули в третьей матрице объясняются тем, что узел №3 не входит в первый конечный элемент.

[4] Таким образом, для всех узлов, не входящих в конечный элемент подставляются нулевые матрицы

Аналогично получим уравнения для узлов №3 и №4. Тогда разрешающая система уравнений запишется в виде

$$\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & 0 & 0 & k_{17} & k_{18} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & 0 & 0 & k_{27} & k_{28} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} & k_{37} & k_{38} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} & k_{47} & k_{48} \\ 0 & 0 & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} & k_{57} & k_{58} \\ 0 & 0 & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} & k_{67} & k_{68} \\ k_{71} & k_{72} & k_{73} & k_{74} & k_{75} & k_{76} & k_{77} & k_{78} \\ k_{81} & k_{82} & k_{83} & k_{84} & k_{85} & k_{86} & k_{87} & k_{88} \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ q_{x3} \\ q_{y3} \\ q_{x4} \\ q_{y4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_{x1} + N_{x1} \\ N_{y1} \\ N_{x2} \\ N_{y2} \\ 0 \\ P_{y3} \\ P_{x4} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (16)$$

Чтобы избежать путаницы при построении общей матрицы жёсткости, рекомендуется воспользоваться простым графическим методом. После того, как матрицы $[K_1]$ и $[K_2]$ разбиты на блоки размерностью 2x2, соответствующие разным узлам (первая строка соответствует узлу *i*, вторая *j*, третья – *k* соответствующего элемента), запишем небольшие таблицы для матриц $[K_1]$ и $[K_2]$. В общем виде таблица выглядит так:

i-i	*i-j*	*i-k*
j-i	*j-j*	*j-k*
k-i	*k-j*	*k-k*

Тогда для матриц $[K_1]$ и $[K_2]$ таблицы запишутся в виде

1-1	1-2	1-4
2-1	2-2	2-4
4-1	4-2	4-4

2-2	2-3	2-4
3-2	3-3	3-4
4-2	4-3	4-4

Затем запишем табличку для общей матрицы жёсткости $[K]$ следующим образом

1	2	3	4	
1	1	0	1	1
1	x	2	x	2
0	2	2	2	3
1	x	2	x	4

Значения в общей матрице $[K]$ формируются за счёт суммирования значений из матриц $[K_1]$ и $[K_2]$ согласно индесам. Каждая ячейка таблицы нумеруется так: сначала указывается номер строки, затем столбца. Т.е. 2-3, означает «ячейка таблицы на пересечении второй строки и третьего столбца». Если в таблицах для матриц $[K_1]$ и $[K_2]$ нет ячейки с номером из общей таблицы для матрицы $[K]$, то в таблицу проставляется «0», а в матрицу пишется блок нулей (16), как например, для ячеек 1-3 и 3-1. Если ячейка присутствует только в одной из таблиц, пишется её номер, а в матрицу $[K]$

вставляется блок (16) из соответствующей матрицы $[K_1]$ или $[K_2]$. Наконец, если ячейка с таким номером присутствует и в таблице для $[K_1]$ и в таблице для $[K_2]$, то пишется знак «х», а значения из обеих матриц $[K_1]$ и $[K_2]$ складываются между собой (16).

Определение неизвестных перемещений и реакций в узлах

Для нахождения неизвестных перемещений узлов достаточно решить уравнения, в которых перемещения не равны нулю. Для выбранной схемы (рис. 1) это последние четыре уравнения, поскольку в первых четырёх уравнениях перемещения равны нулю. А затем из первых четырёх уравнений, за счёт подстановки в них найденных перемещений, можно определить неизвестные реакции.

Умножив по правилам[5] матрицу $[K]$ на вектор $\{q\}$, получим

$$\begin{aligned}
k_{55}\cdot q_{x3}+k_{56}\cdot q_{y3}+k_{57}\cdot q_{x4}+k_{58}\cdot q_{y4}&=0\\
k_{65}\cdot q_{x3}+k_{66}\cdot q_{y3}+k_{67}\cdot q_{x4}+k_{68}\cdot q_{y4}&=P_{y3}\\
k_{75}\cdot q_{x3}+k_{76}\cdot q_{y3}+k_{77}\cdot q_{x4}+k_{78}\cdot q_{y4}&=P_{x4}\\
k_{85}\cdot q_{x3}+k_{86}\cdot q_{y3}+k_{87}\cdot q_{x4}+k_{88}\cdot q_{y4}&=0
\end{aligned}$$

Система из четырёх уравнений с четырьмя неизвестными может быть решена различными методами:

1) Выражением одних коэффициентов через другие
2) Методом Гаусса
3) Методом Крамера

Затем из первых четырёх уравнений определим неизвестные реакции N_{x1}, N_{y1}, N_{x2}, N_{y2}.

3. ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР РЕШЕНИЯ

Пусть $a = 0{,}1$ м; $b = 0{,}2$ м; $h = 0{,}003$ м; $E = 2\cdot10^{11}$ Па; $\mu = 0{,}33$; $P_{y3} = 10000$ Н; $p = 80000$ Н/м;

Вектора перемещений (2) и нагрузок (3) выглядят следующим образом

$$\begin{Bmatrix} 0\\0\\0\\0\\q_{x3}\\q_{y3}\\q_{x4}\\q_{y4}\end{Bmatrix},\ \begin{Bmatrix} 8000+N_{x1}\\N_{y1}\\N_{x2}\\N_{y2}\\0\\10000\\8000\\0\end{Bmatrix}$$

Площади КЭ $S_1 = S_2 = 0{,}01$ м^2.

---

[5] По правилам строки первой матрицы умножаются на столбцы второй.

Значения (4) коэффициентов матрицы [D]

$$[D]=\frac{2\cdot 10^{11}}{1-0{,}33^2}\begin{pmatrix}1 & 0{,}33 & 0\\ 0{,}33 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1-0{,}33}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2{,}244\cdot 10^{11} & 7{,}407\cdot 10^{10} & 0\\ 7{,}407\cdot 10^{10} & 2{,}244\cdot 10^{11} & 0\\ 0 & 0 & 7{,}519\cdot 10^{10}\end{pmatrix}$$

Координаты узлов (5)

$x_1=0 \quad y_1=0$

$x_2=0{,}1 \quad y_2=0$

$x_3=0{,}1 \quad y_3=0{,}2$

$x_4=0 \quad y_4=0{,}2$

Порядок узлов в конечных элементах .

№ элемента	Узел *i*	Узел *j*	Узел *k*
I	1	2	4
II	2	3	4

Матрицы [B_1] (6) и [B_2] (7).

$$[B_1]=\begin{pmatrix}-10 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 5\\ -5 & -10 & 0 & 10 & 5 & 0\end{pmatrix}$$

$$[B_2]=\begin{pmatrix}0 & 0 & 10 & 0 & -10 & 0\\ 0 & -5 & 0 & 5 & 0 & 0\\ -5 & 0 & 5 & 10 & 0 & -10\end{pmatrix}$$

Транспонируем матрицы B_1 и B_2.

$$[B_1^T]=\begin{pmatrix}-10 & 0 & -5\\ 0 & -5 & -10\\ 10 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 10\\ 0 & 0 & 5\\ 0 & 5 & 0\end{pmatrix};\ [B_2^T]=\begin{pmatrix}0 & 0 & -5\\ 0 & -5 & 0\\ 10 & 0 & 5\\ 0 & 5 & 10\\ -10 & 0 & 5\\ 0 & 0 & -10\end{pmatrix}$$

Тогда матрицы жесткостей конечных элементов запишутся в виде

$$[K_1]=S_1h[B_1^T][D][B_1]$$

$$=\begin{pmatrix}7{,}2972\cdot 10^8 & 2{,}2388\cdot 10^8 & -6{,}7333\cdot 10^8 & -1{,}1278\cdot 10^8 & -5{,}6391\cdot 10^7 & -1{,}1110\cdot 10^8\\ 2{,}2388\cdot 10^8 & 3{,}9390\cdot 10^8 & -1{,}1110\cdot 10^8 & -2{,}2556\cdot 10^8 & -1{,}1278\cdot 10^8 & -1{,}6833\cdot 10^8\\ -6{,}7333\cdot 10^8 & -1{,}1110\cdot 10^8 & 6{,}7333\cdot 10^8 & 0 & 0 & 1{,}1110\cdot 10^8\\ -1{,}1278\cdot 10^8 & -2{,}2556\cdot 10^8 & 0 & 2{,}2556\cdot 10^8 & 1{,}1278\cdot 10^8 & 0\\ -5{,}6391\cdot 10^7 & -1{,}1278\cdot 10^8 & 0 & 1{,}1278\cdot 10^8 & 5{,}6391\cdot 10^7 & 0\\ -1{,}1110\cdot 10^8 & -1{,}6833\cdot 10^8 & 1{,}1110\cdot 10^8 & 0 & 0 & 1{,}6833\cdot 10^8\end{pmatrix}$$

$$[K_2] = S_2 h[B_2^T][D][B_2]$$

$$= \begin{pmatrix} 5{,}6391 \cdot 10^7 & 0 & -5{,}6391 \cdot 10^7 & -1{,}1278 \cdot 10^8 & 0 & 1{,}1278 \cdot 10^8 \\ 0 & 1{,}6833 \cdot 10^8 & -1{,}1110 \cdot 10^8 & -1{,}6833 \cdot 10^8 & 1{,}1110 \cdot 10^8 & 0 \\ -5{,}6391 \cdot 10^7 & -1{,}1110 \cdot 10^8 & 7{,}2972 \cdot 10^8 & 2{,}2388 \cdot 10^8 & -6{,}7333 \cdot 10^8 & -1{,}1278 \cdot 10^8 \\ -1{,}1278 \cdot 10^8 & -1{,}6833 \cdot 10^8 & 2{,}2388 \cdot 10^8 & 3{,}9390 \cdot 10^8 & -1{,}1110 \cdot 10^8 & -2{,}2556 \cdot 10^8 \\ 0 & 1{,}1110 \cdot 10^8 & -6{,}7333 \cdot 10^8 & -1{,}1110 \cdot 10^8 & 6{,}7333 \cdot 10^8 & 0 \\ 1{,}1278 \cdot 10^8 & 0 & -1{,}1278 \cdot 10^8 & -2{,}2556 \cdot 10^8 & 0 & 2{,}2556 \cdot 10^8 \end{pmatrix}$$

Общая матрица жёсткости системы выглядит следующим образом

$$\begin{pmatrix} 7{,}2972 \cdot 10^8 & 2{,}2388 \cdot 10^8 & -6{,}7333 \cdot 10^8 & -1{,}1278 \cdot 10^8 & 0 & 0 & -5{,}6391 \cdot 10^7 & -1{,}1110 \cdot 10^8 \\ 2{,}2388 \cdot 10^8 & 3{,}9390 \cdot 10^8 & -1{,}1110 \cdot 10^8 & -2{,}2556 \cdot 10^8 & 0 & 0 & -1{,}1278 \cdot 10^8 & -1{,}6833 \cdot 10^8 \\ -6{,}7333 \cdot 10^8 & -1{,}1110 \cdot 10^8 & 7{,}2972 \cdot 10^8 & 0 & -5{,}6391 \cdot 10^7 & -1{,}1278 \cdot 10^8 & 0 & 2{,}2388 \cdot 10^8 \\ -1{,}1278 \cdot 10^8 & -2{,}2556 \cdot 10^8 & 0 & 3{,}9390 \cdot 10^8 & -1{,}1110 \cdot 10^8 & -1{,}6833 \cdot 10^8 & 2{,}2388 \cdot 10^8 & 0 \\ 0 & 0 & -5{,}6391 \cdot 10^7 & -1{,}1110 \cdot 10^8 & 7{,}2972 \cdot 10^8 & 2{,}2388 \cdot 10^8 & -6{,}7333 \cdot 10^8 & -1{,}1110 \cdot 10^8 \\ 0 & 0 & -1{,}1278 \cdot 10^8 & -1{,}6833 \cdot 10^8 & 2{,}2388 \cdot 10^8 & 3{,}9390 \cdot 10^8 & -1{,}1110 \cdot 10^8 & -2{,}2556 \cdot 10^8 \\ -5{,}6391 \cdot 10^7 & -1{,}1278 \cdot 10^8 & 0 & 2{,}2388 \cdot 10^8 & -6{,}7333 \cdot 10^8 & -1{,}1110 \cdot 10^8 & 7{,}2972 \cdot 10^8 & 0 \\ -1{,}1110 \cdot 10^8 & -1{,}6833 \cdot 10^8 & 2{,}2388 \cdot 10^8 & 0 & -1{,}1278 \cdot 10^8 & -2{,}2556 \cdot 10^8 & 0 & 3{,}9390 \cdot 10^8 \end{pmatrix}$$

Поскольку перемещения узлов №1 и №2 равны нулю, перемещения узлов №3 и №4 определим из четырёх нижних строк разрешающей системы уравнений. Запишем

$$\begin{pmatrix} 7{,}2972 \cdot 10^8 & 2{,}2388 \cdot 10^8 & -6{,}7333 \cdot 10^8 & -1{,}1110 \cdot 10^8 \\ 2{,}2388 \cdot 10^8 & 3{,}9390 \cdot 10^8 & -1{,}1110 \cdot 10^8 & -2{,}2556 \cdot 10^8 \\ 6{,}7333 \cdot 10^8 & -1{,}1110 \cdot 10^8 & 7{,}2972 \cdot 10^8 & 0 \\ -1{,}1278 \cdot 10^8 & -2{,}2556 \cdot 10^8 & 0 & 3{,}9390 \cdot 10^8 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} q_{x3} \\ q_{y3} \\ q_{x4} \\ q_{y4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 10000 \\ 8000 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Решив данную систему методом Крамера, найдём корни уравнения.

$$\begin{pmatrix} q_{x3} = 7{,}622 \cdot 10^{-5}\ \text{м} & q_{y3} = 2{,}78 \cdot 10^{-5}\ \text{м} \\ q_{x4} = 8{,}553 \cdot 10^{-5}\ \text{м} & q_{x3} = 3{,}775 \cdot 10^{-5}\ \text{м} \end{pmatrix}$$

Расхождение данных величин с полученными в ANSYS менее 0,1%.

Найдём реакции в узлах №1 и №2, подставив определенные ранее значения перемещений узлов в разрешающую систему уравнений (16).

$$\begin{pmatrix} N_{x1} = -17017\ H & N_{y1} = -16000\ H \\ N_{x2} = 1016{,}6\ H & N_{y2} = 6000\ H \end{pmatrix}$$

Все неизвестные определены, задача решена.

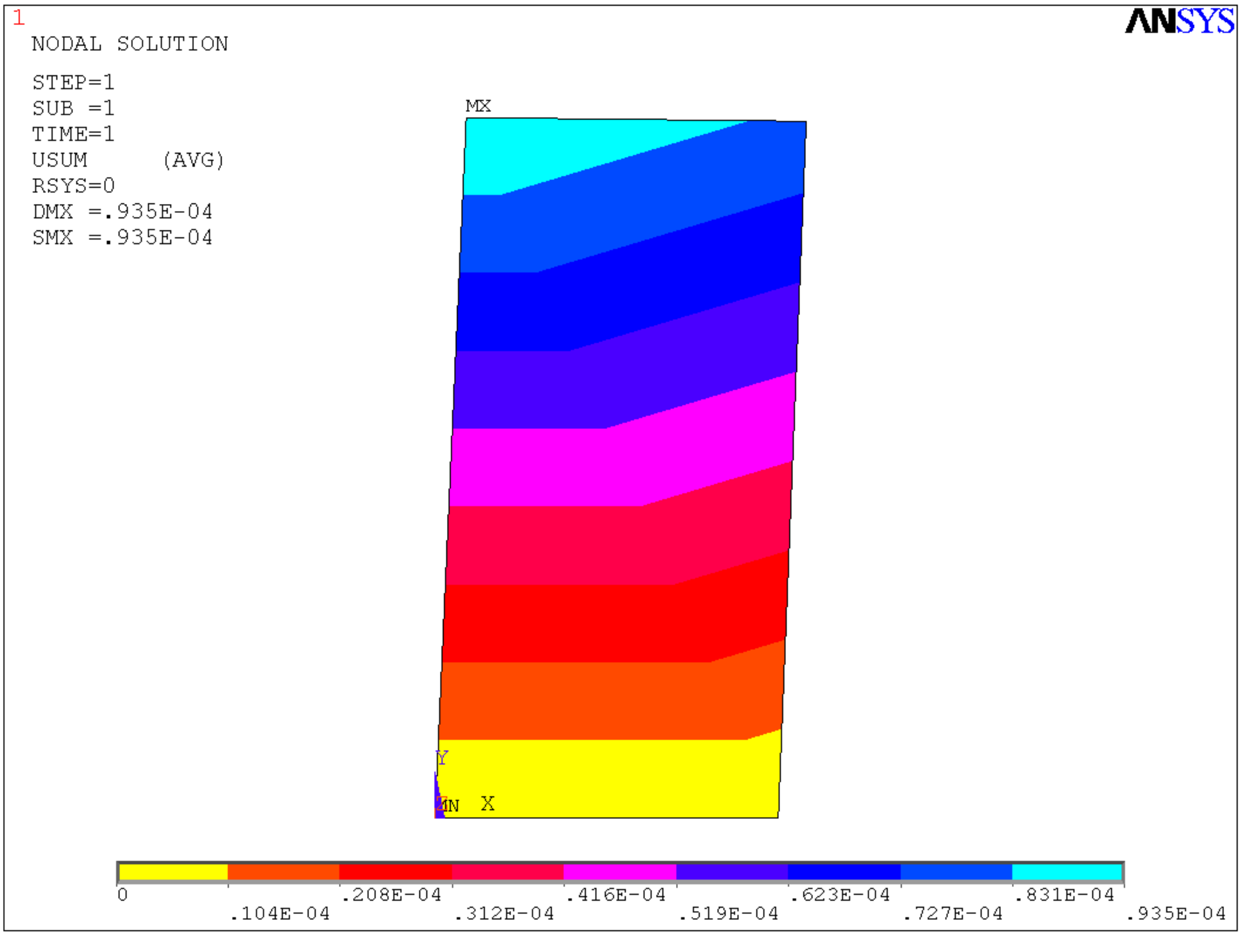


Рис. 2. Распределение перемещений в пластине