

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Г. М. МАКАРЬЯНЦ

ОСНОВЫ МЕТОДА
КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

САМАРА

2017

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Г. М. МАКАРЬЯНЦ

ОСНОВЫ МЕТОДА
КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

САМАРА

2017

УДК 519.62/.64
ББК

Макарьянц Г.М.

Основы метода конечных элементов: учеб. пособие / *Г.М. Макарьянц* – Самара: Изд-во Самарского университета, 2017. – 104 с. : ил.

Изложены основные сведения о численных методах. Рассмотрены основные задачи математической физики и аналитические способы их решения. Изложены основы метода конечных разностей. При анализе основных особенностей численных методов особое внимание уделено использованию аппроксимации базисными функциями при решении прикладных задач механики. Рассмотрены основы и подходы к решению задач с помощью метода конечных элементов.

Учебное пособие рекомендуется для студентов технических специальностей и направлений.

УДК 519.62/.64
ББК

© Макарьянц Г. М. 2017
© Самарский университет, 2017

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	6
1 Обзор уравнений математической физики.....	7
1.1 Примеры уравнений математической физики. Классификация уравнений с частными производными.....	7
1.2 Постановка задач для уравнений математической физики.....	12
1.3 Метод разделения переменных (метод Фурье).....	16
1.4 Физическая интерпретация решения волнового уравнения.....	21
2 Метод конечных разностей.....	23
2.1 Конечные разности в одномерном случае.....	23
2.2 Задача Неймана.....	26
2.3 Нелинейные задачи.....	27
2.4 Конечные разности в многомерном случае.....	30
2.5 Задачи для областей неправильной формы.....	33
3 Аппроксимация базисными функциями.....	35
3.1 Аппроксимации с помощью взвешенных невязок.....	38
3.2 Аппроксимация решений дифференциальных уравнений и использование базисных функций. Выполнение краевых условий с помощью базисных функций.....	40
3.3 Одновременная аппроксимация решений дифференциальных уравнений и краевых условий.....	42
3.4 Естественные краевые условия.....	43
3.5 Системы дифференциальных уравнений.....	45
3.6 Нелинейные задачи.....	47
4 Введение. Понятие конечного элемента.....	49
4.1 Идея метода конечных элементов.....	49
4.2 Примеры типичных базисных функций.....	51
4.3 Слабая формулировка и требование гладкости.....	54
4.4 Пример континуальной задачи.....	56
5 Подходы к методу конечных элементов.....	63
5.1 Минимизация функционала.....	63
5.2 Метод взвешенных невязок.....	65
5.3 Пример минимизации функционала и метода взвешенных невязок для уравнения Пуассона.....	67
6 Двумерный конечный элемент.....	71
6.1 Линейный треугольник.....	71
6.2 Билинейный прямоугольник.....	73
6.3 Понятие волнового фронта ансамблирования.....	74
6.4 Метод конечных элементов для двумерных задач.....	77
Приложение 1. Некоторые одномерные задачи.....	81
Приложение 2. Задание к лабораторным работам.....	94
Рекомендуемая литература.....	103

Введение

Широкое использование средств инженерного анализа (программных комплексов ANSYS, ABAQUS, Fluent и т.д.) требует от специалистов разного профиля овладения навыками использования численными методами и в частности методом конечных элементов. Численные методы, как правило, используют высоко квалифицированные специалисты – математики. Для студентов технических специальностей и направлений главным является понимание основных идей, особенностей и областей применения численных методов.

Метод конечных элементов отличается простой физической интерпретацией основных вычислительных операций. Его лёгкая приспособляемость к геометрии рассматриваемой области, граничным условиям является также очень важным достоинством.

В предлагаемом учебном пособии в сжатом виде приводятся основные необходимые сведения об уравнениях математической физики, методе конечных разностей, аппроксимации базисными функциями и методе конечных элементов.

Для решения математических задач используются следующие основные группы методов: аналитические и численные. При использовании аналитических методов решение задачи удаётся выразить с помощью формул. К сожалению на практике это бывает достаточно редко. Основным инструментом для решения современных инженерных задач являются численные методы. Они позволяют свести решение задачи к выполнению конечного числа арифметических действий. При этом численные методы позволяют получить лишь приближённое решение с конкретными значениями параметров и исходными данными.

Несмотря на это численные методы незаменимы в задачах инженерного анализа сложных конструкций.

1 Обзор уравнений математической физики

1.1 Примеры уравнений математической физики. Классификация уравнений с частными производными

При изучении большинства физических процессов зачастую свойства объекта исследования описываются функциями не одной, а нескольких переменных величин. Поэтому при поиске количественного описания физического явления обычно решается система дифференциальных уравнений с частными производными. Аргументами неизвестных функций таких систем уравнений являются пространственные переменные и время.

Тогда дифференциальные уравнения с частными производными, описывающие реальные физические модели называются *уравнениями математической физики*, а изучающая их наука *математической физикой*.

Приведём несколько классических примеров уравнений математической физики. Искомой функцией в них выступает функция, которая в разных задачах интерпретируется по-разному. Во многих уравнениях фигурирует сумма частных производных второго порядка, называемая оператором Лапласа.

$$\Delta U = \operatorname{div} \operatorname{grad} U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad (1.1)$$

$$U = U(x; y; z)$$

1). *Уравнение Лапласа* (уравнение потенциала)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \quad (1.2)$$

Это уравнение используется для математического описания электростатических полей, магнитных полей постоянных токов, стационарных тепловых полей, для расчёта безвихревого течения идеальной жидкости.

Более коротко уравнение Лапласа можно расписать через оператор Лапласа.

$$\Delta U = 0 \quad (1.3)$$

Функции, удовлетворяющие уравнениям Лапласа, называются гармоническими функциями.

2). **Уравнение Пуассона** (неоднородное уравнение Лапласа).

$$\Delta U = f \quad (1.4)$$

Область применения данного уравнения – задачи электростатики, электронной оптики, теории упругости и др.

3). **Уравнение теплопроводности** (Фурье).

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \Delta U, \quad (1.5)$$

где a – некоторая постоянная.

Данное уравнение описывает диффузионные процессы в частности распространение тепла в некотором теле. При наличии внутри объекта тепловых источников, или поглотителей тепла, уравнение теплопроводности будет неоднородным.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial^2 t} = a^2 \Delta U + g(x, y, z, t) \quad (1.6)$$

4). *Волновое уравнение* (уравнение колебания струны).

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \Delta U \quad (1.7)$$

описывает свободные колебания.

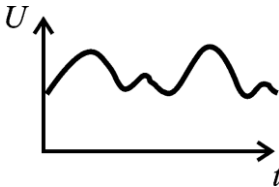
$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \Delta U + f(x, y, z, t) \quad (1.8)$$

описывает колебания, совершаемые под действием внешней силы $f(x, y, z, t)$.

5). *Уравнение Гельмгольца.*

$$\Delta U + c \cdot U = 0 \quad (1.9)$$

где $c = \text{const}$, является математической моделью установившихся колебательных процессов.



а). Установившийся



б). Неустановившийся

Рисунок 1.1 – Примеры колебательных процессов

б). *Телеграфное уравнение*

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{RC + LG}{LC} \cdot \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{RG}{LC} \cdot U - \frac{1}{LC} \cdot \Delta U = 0 \quad (1.10)$$

описывает изменение потенциала U в линии электропередачи, где L – коэффициент самоиндукции, C, R, G – соответственно ёмкость, сопротивление и характеристика потерь на единицу длины линии.

Если $R=G=0$, то телеграфное уравнение превращается в волновое.

7). *Уравнения акустики* – это система уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \right) = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial t} + \rho_0 c_0^2 \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) = 0 \end{cases}, \quad (1.11)$$

описывающая распространение звуковых волн в покоящейся среде. Здесь U – скорость возмущающей среды, P – акустическое давление в ней, ρ_0 – плотность, c_0 – постоянная, характеризующая сжимаемость среды.

8). *Уравнение переноса.*

$$\frac{\partial U}{\partial t} + c \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right) = f(x, t) \quad (1.12)$$

Служит простейшей одномерной моделью распространения частиц в веществе, где переменную x можно интегрировать как скорость переноса.

Приведённые уравнения не исчерпывают всё многообразие уравнений математической физики, однако являются наиболее простыми и, вместе с тем, характерными представителями этого множества уравнений. Анализируя их форму, видно, что все они содержат частные производные искомой функции и не выше второго порядка. Следовательно, все те уравнения из перечисленных,

в которых функция зависит от двух переменных можно считать частными случаями уравнения

$$A \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 U}{\partial x \cdot \partial y} + C \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + D \frac{\partial U}{\partial x} + E \frac{\partial U}{\partial y} + GU = F \quad (1.13)$$

В общем случае коэффициенты A, B, C, D, E, G и правая часть F есть некоторые функции независимых переменных x и y . Если $F=0$, то уравнение называется однородным в противном случае неоднородным.

Классификацию конкретных уравнений в частных производных, принадлежащих семейству (1.13) производят по аналогии с классификации кривых второго порядка в зависимости от знака дискриминанта B^2-AC , если:

$B^2-AC < 0$, то уравнение (1.13) *эллиптического типа*,

$B^2-AC = 0$, то уравнение (1.13) *параболического типа*,

$B^2-AC > 0$, то уравнение (1.13) *гиперболического типа*.

При непостоянных A, B, C знак дискриминанта может меняться, в этом случае (1.13) относится к уравнениям смешанного типа.

Классифицируем рассмотренные выше уравнения, имеющие вторые частные производные относительно функции двух переменных:

эллиптические – уравнения Лапласа, Пуассона, Гельмгольца;

параболические – уравнение теплопроводности;

гиперболические – волновое и телеграфное уравнения.

Для уравнений математической физики используется и другой принцип классификации. В случае, когда уравнение с частными переменными не содержит переменной t , оно называется *стационарным*. При наличии в уравнении переменной t оно описывает процессы, развивающиеся во времени, и называется *нестационарным* или *эволюционным*.

1.2 Постановка задач для уравнений математической физики

Дифференциальное уравнение с частными производными имеет в общем случае бесчисленное множество решений. Поэтому к нему нужно присоединить какие-то дополнительные условия, чтобы получить однозначное решение. Эти дополнительные данные состоят из начальных и краевых (граничных) условий.

Начальными называются условия, относящиеся к начальному моменту времени, а соответствующая задача носит название начальной или задачи Коши. **Краевыми** называются условия, относящиеся к фиксированным значениям координат. Обычно при задании краевых условий координатами выступают граничные точки рассматриваемого континуума.

Как правило, для уравнений эллиптического типа, описывающих стационарные процессы, задаются граничные условия, а для уравнений параболического и гиперболического типов, моделирующих эволюционные процессы, нужно ставить и граничные начальные условия, что приводит к смешанным задачам.

Рассмотрим несколько примеров постановки задач для различных типов уравнений математической физики.

Пусть некий процесс в области Ω с границей Γ описывается уравнением эллиптического типа. Если выставляется граничное условие

$$U|_{(x,y) \in \Gamma} = \varphi(x, y), \quad (1.14)$$

где $\varphi(x; y)$ – заданная на границе Γ непрерывная функция, то мы имеем первую краевую задачу. Применительно к уравнениям Лапласа (1.2) и Пуассона (1.3) ее называют задачей *Дирихле*. Если эллиптическое уравнение рассматривается совместно с условием

$$\left. \frac{\partial U}{\partial y} \right|_{(x,y) \in \Gamma} = \varphi(x, y), \quad (1.15)$$

где – производная искомой функции по направлению к внешней нормали к границе Γ , то имеем вторую краевую задачу. Для уравнений Лапласа (1.2) и Пуассона (1.3) ее называют задачей **Неймана**.

В третьей краевой задаче задаются граничные условия следующего вида:

$$\left[\alpha_0 U + \alpha_1 \frac{\partial U}{\partial n} \right]_{(x,y) \in \Gamma} = \varphi(x; y), \quad (1.16)$$

где $|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0$.

Пусть имеем теплоизолированный, кроме концов, однородный нагретый стержень $0 \leq x \leq l$. Температура $u=(x; t)$ для любого момента времени удовлетворят уравнению теплопроводности, т.е. уравнению параболического типа.

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (1.17)$$

В начальный момент времени $t=t_0$, для внутренних точек стержня обычно задается начальное распределение температуры, которое играет роль начального условия

$$U(x; y) = f(x), \quad (1.18)$$

где $f(x)$ – известная функция. Данное условие (1.18) не обеспечивает однозначное решение дифференциального уравнения (1.17), т.к.

распределение температуры в последующие моменты времени $t > t_0$ существенно зависит от того, каков тепловой режим на концах стержня. Возможны следующие варианты краевых условий.

1). Конец поддерживается при заданной температуре

$$U(0;t) = \varphi(t) \text{ и } U(l;t) = \psi(x) \quad (1.19)$$

2). Конец стержня теплоизолирован, то есть утечки тепла в окружающую среду отсутствуют

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{(0;t)} = 0 \text{ и } \left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{(l;t)} = 0 \quad (1.20)$$

3). На концах стержня происходит лучеиспускание тепла в окружающую среду

$$\begin{aligned} U|_{(0;t)} + \alpha_1 \left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{(0;t)} &= \varphi(t) \text{ и} \\ U|_{(0;t)} + \alpha_2 \left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{(0;t)} &= \psi(t), \end{aligned} \quad (1.21)$$

где $\alpha_{1,2}$ – некоторые постоянные, $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ – закон изменения температуры окружающей среды.

Рассмотрим свободные колебания однородной ограниченной струны $0 < x < l$. Поперечное смещение и удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (1.22)$$

В начальный момент $t=t_0$, обычно задается форма струны и распределение скорости ее точек, что дает начальное условие

$$\begin{cases} U(x; t_0) = \varphi(x) \\ \left. \frac{\partial U}{\partial t} \right|_{(x; t_0)} = \varphi_1(x) \end{cases} \quad (1.23)$$

где $\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$ – известные функции, определенные в интервале $0 < x < l$. В зависимости от способов заделки будем иметь следующие основные краевые условия.

1). Конец жёстко закреплён:

$$U(0; t) = 0 \text{ и } U(l; t) = 0 \quad (1.24)$$

2). Конец упруго закреплён:

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{(0; t)} - K_1 U(0; t) = 0 \\ \left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{(l; t)} - K_2 U(l; t) = 0 \end{cases} \quad (1.25)$$

где K_1 и K_2 – положительные постоянные.

3). Конец свободен:

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{(0; t)} = 0 \\ \left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{(l; t)} = 0 \end{cases} \quad (1.26)$$

1.3 Метод разделения переменных (метод Фурье)

Одним из наиболее распространённых способов аналитического решения уравнений в частных производных является метод разделения переменных, называемый также методом Фурье. Этот метод был впервые предложил Ж. Л. Д'Аламбером в середине XVIII века для решения волнового уравнения (1.22) с начальными и краевыми условиями (1.23) и (1.24), а в начале XIX века был развит Ж. Б. Ж. Фурье и обоснован М. В. Остроградским и П. Г. Дирихле.

Рассмотрим применение данного метода к решению волнового уравнения с начальными и граничными условиями:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \\ 0 < x < l \\ t > 0 \\ U(x; 0) = \varphi(x) \\ \left. \frac{\partial U}{\partial t} \right|_{(x; 0)} = \psi(x) \\ U(0; t) = 0 \\ U(l; t) = 0 \end{array} \right. \quad (1.27)$$

На первом этапе рассматривается краевая задача

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \\ U(0; t) = 0 \\ U(l; t) = 0 \end{array} \right. \quad (1.28)$$

Предположим, что её решение может быть представлено в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от переменной x , а вторая только от t .

$$U(x,t) = X(x) \cdot T(t) \quad (1.29)$$

Поставим данную функцию в уравнение (1.28)

$$XT'' = a^2 X'' \cdot T ,$$

перепишем полученное выражение в виде:

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{aT} \quad (1.30)$$

Левое отношение здесь может зависеть только от X , правое - только от t , а в силу их равенства они не зависят ни от X , ни от t , т.е. постоянны.

Положим

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{aT} = -\lambda ,$$

тогда систему (1.28) можно представить в следующем виде:

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ T'' + \lambda a^2 \cdot T = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases} , \quad (1.31)$$

а для нахождения функции $X(x)$ достаточно

$$\begin{cases} X'' + \lambda X' = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases} \quad (1.32)$$

Необходимо показать, что при $\lambda = 0$ и $\lambda < 0$ задача имеет только тривиальное решение.

1). $\lambda = 0$, тогда $X'' = 0 \Rightarrow X = C_1 \cdot x + C_2$

используя краевые условия $X(0) = C_2 = 0; X(l) = C_1 = 0$, получим $X \equiv 0$.

2). $\lambda < 0$, тогда $\lambda = -k^2$, (1.32) преобразуем к виду $X'' - k^2 \cdot X = 0$, тогда решение будет иметь следующий вид $X = C_1 \operatorname{sh} x + C_2 \operatorname{ch} x$, используя краевые условия $X(0) = C_2 = 0; X(l) = C_1 \operatorname{sh} l = 0$, получим $X \equiv 0$.

3). $\lambda > 0$, тогда $\lambda = k^2$, (1.32) преобразуем к виду $X'' + k^2 X = 0$, тогда решение будет иметь следующий вид

$$X = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx. \quad (1.33)$$

Используем краевые условия:

$$X(0) = c_1 = 0, \quad (1.34)$$

$$X(l) = c_2 \sin kl = 0, \quad (1.35)$$

тогда $k = \frac{\pi n}{l}$, где $n \in N$. В этом случае $\lambda = \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2$, а c_2 в силу равенства (1.34) может быть любым числом. Пусть $c_2 = 1$. Подставляя (1.34) и (1.36) в (1.33), получим

$$X(x) = \sin \frac{\pi n x}{l}, \quad n \in N$$

Найдём решение второго уравнения системы (1.31) в общем виде:

$$T'' + a^2 \lambda T = 0$$

$$T(t) = A_n \cos \frac{\pi n a t}{l} + B_n \sin \frac{\pi n a t}{l}$$

Тогда решение системы (1.28) в силу (1.29) и найденных общих решений для $X(x)$ и $T(t)$ получается в следующем виде :

$$U_n(x; t) = \left(A_n \cdot \cos \frac{\pi \cdot n \cdot a \cdot t}{l} + B_n \cdot \sin \frac{\pi \cdot n \cdot a \cdot t}{l} \right) \cdot \sin \frac{\pi \cdot n \cdot x}{l}, \quad (1.37)$$

где A_n и $B_n \in \mathbb{R}$.

В силу линейного рассматриваемого волнового уравнения его решение есть:

$$U(x; t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x; t) \quad (1.38)$$

Найдём A_n и B_n , используя начальные условия:

$$\begin{aligned}
 U(x;0) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin \frac{\pi \cdot n \cdot x}{l} = \varphi(x) \\
 \left. \frac{dU}{dt} \right|_{(x;0)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi \cdot n \cdot a}{l} \cdot B_n \cdot \sin \frac{\pi \cdot n \cdot x}{l} = \varphi(x)
 \end{aligned}
 \tag{1.39}$$

Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ допускают разложение в ряд Фурье на системе тригонометрических функций $\sin \frac{\pi \cdot n \cdot x}{l}$, т.е. можно записать

$$\begin{aligned}
 \varphi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sin \frac{\pi \cdot n \cdot x}{l} \\
 \psi(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin \frac{\pi \cdot n \cdot x}{l}
 \end{aligned}
 \tag{1.40}$$

где,

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cdot \sin \frac{\pi \cdot n \cdot x}{l} dx \\
 b_n &= \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \cdot \sin \frac{\pi \cdot n \cdot x}{l} dx
 \end{aligned}$$

Приравнявая левые части (1.39) и правые (1.40) получим выражение для A_n и B_n :

$$\begin{aligned}
 A_n &= a_n \\
 B_n &= b_n \cdot \frac{l}{\pi \cdot n \cdot a}
 \end{aligned}$$

Таким образом, решение (1.38) полностью определено.

1.4 Физическая интерпретация решения волнового уравнения

Функция (1.37) может быть представлена в следующем виде

$$U_n(x;t) = U_n \cdot \sin \frac{\pi \cdot n \cdot x}{l} \cdot \cos(\omega_n t + \beta_n), \quad (1.41)$$

где $U_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$, $\omega_n = \frac{\pi \cdot n \cdot a}{l}$, $\beta_n = -\arctg \frac{B_n}{A_n}$.

Функция $U_n(x;t)$ – будет описывать некоторое гармоническое колебание тонкой струны с абсциссой x . При этом $U_n \cdot \sin \frac{\pi \cdot n \cdot x}{l}$ – амплитуда колебаний; ω_n – частота; β_n – начальная фаза.

Такой вид колебаний называется стоячей волной. Можно выделить узлы ($U_n=0$)

$$x_k = \frac{k \cdot l}{n}, \text{ где } k = \overline{1; n-1}$$

и пучности ($U_n=\max$)

$$x_k = \frac{2k-1}{2n} \cdot l, \text{ где } k = \overline{1; n}$$

как видно координаты, которых в процессе колебаний будут неизменными.

До появления вычислительной техники было много альтернатив описанному выше методу Фурье. *Достоинство* этого метода – в возможности разделить переменные и сводить граничные и начально-граничные задачи для уравнений с частными производными к аналогичным задачам для обыкновенных дифференциальных

уравнений и представлять решение в аналитическом виде. **Недостаток** – в сложности и ограниченности множества задач, для которых удастся эффективно выполнить разделение переменных. В основном такой метод применяется для простых уравнений, заданных на простых областях.

2 Метод конечных разностей

2.1 Конечные разности в одномерном случае.

Требуется определить функцию $\varphi(x)$, удовлетворяющую заданному дифференциальному уравнению на отрезке $0 \leq x \leq L_x$ вместе с надлежащими краевыми условиями при $x=0$ и $x=L_x$. Примером является задача расчёта распределения температуры $\varphi(x)$ в плите толщиной L_x из материала с теплопроводностью k ; на плоскостях $x=0$ и $x=L_x$, ограничивающих плиту, сохраняются заданные значения температуры $\bar{\varphi}_0$ и $\bar{\varphi}_{L_x}$ соответственно. В плите генерируется тепло со скоростью $Q(x)$ на единицу толщины. Дифференциальное уравнение:

$$k \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = -q(x) \quad (2.1)$$

Краевые условия:

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= \bar{\varphi}_0 \\ \varphi(L_x) &= \bar{\varphi}_{L_x} \end{aligned}$$

Для решения этой задачи методом конечных разностей производится дискретизация независимой переменной x , т.е. строится множество (или сетка) $L+1$ дискретных равноотстоящих точек $x_l (l=0,1,2,\dots,L)$ на отрезке $0 \leq x \leq L_x$ с $x_0=0$, $x_l=L_x$, $x_{l+1}-x_l=\Delta x$.

Необходимо произвести замену в дифференциальном уравнении членов, содержащих дифференцирование, членами, в которых используются только алгебраические операции.

1. Аппроксимация первых производных

а. Аппроксимация разностью вперёд:

$$\left. \frac{d\varphi}{dx} \right|_l \approx \frac{\varphi_{l+1} - \varphi_l}{\Delta x}$$

б. Аппроксимация разностью назад:

$$\left. \frac{d\varphi}{dx} \right|_l \approx \frac{\varphi_l - \varphi_{l-1}}{\Delta x}$$

в. Аппроксимация центральной разностью – более точная:

$$\left. \frac{d\varphi}{dx} \right|_l \approx \frac{\varphi_{l+1} - \varphi_{l-1}}{2\Delta x}$$

2. Аппроксимация вторых производных:

$$\left. \frac{d^2\varphi}{dx^2} \right|_l \approx \frac{\varphi_{l+1} - 2\varphi_l + \varphi_{l-1}}{(\Delta x)^2} \quad (2.2)$$

Запишем уравнение (2.1) в типичной точке x_l :

$$k \left. \frac{d^2\varphi}{dx^2} \right|_{x=x_l} = -Q_l$$

$$\varphi[f] = \begin{bmatrix} (\Delta x)^2 Q_1 / k + \bar{\varphi}_0 \\ (\Delta x)^2 Q_2 / k \\ (\Delta x)^2 Q_3 / k \\ \dots \\ (\Delta x)^2 Q_{L-2} / k \\ (\Delta x)^2 Q_{L-1} / k + \bar{\varphi}_{Lx} \end{bmatrix}$$

Уравнение (2.4) может быть решено стандартным методом.

2.2 Задача Неймана

В реальных задачах одно (или больше) из соответствующих краевых условий часто может быть выражено через производную. Например, в предыдущей задаче на поверхности плиты $x = L_x$ может быть задан поток тепла \bar{q} через эту поверхность. Данное условие при $x = L_x$ теперь выражает задание в этой точке не самой температуры, а её градиенте.

$$-k \frac{df}{dx} = q \text{ при } x = L_x \quad (2.4)$$

Тогда систему конечно – разностных уравнений предыдущего раздела можно переписать:

$$\left. \begin{array}{l} l = 1 \quad -\varphi_2 + 2\varphi_1 = (\Delta x)^2 Q_1 / k + \bar{\varphi}_0 \\ l = 2 \quad -\varphi_3 + 2\varphi_2 - \varphi_1 = (\Delta x)^2 Q_2 / k \\ l = 3 \quad -\varphi_4 + 2\varphi_3 - \varphi_2 = (\Delta x)^2 Q_3 / k \\ \\ l = L-2 \quad -\varphi_{L-1} + 2\varphi_{L-2} - \varphi_{L-3} = (\Delta x)^2 Q_{L-2} / k \\ l = L-1 \quad -\varphi_L + 2\varphi_{L-1} - \varphi_{L-2} = (\Delta x)^2 Q_{L-1} / k \end{array} \right\} \quad (2.5)$$

Так как теперь φ_L неизвестно, мы имеем систему из $L-1$ уравнений с L неизвестными $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_L$. Недостающее уравнение обеспечивается краевыми условиями.

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{\bar{q}}{k}$$

Если производная аппроксимируется разностью назад

$$\frac{\varphi_L - \varphi_{L-1}}{\Delta x} = -\frac{\bar{q}}{k} \quad (2.6)$$

(2.5) и (2.6) составляют систему L уравнений для неизвестных $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_L$.

2.3 Нелинейные задачи

При математическом моделировании физических задач часто приходится иметь дело с дифференциальными уравнениями или краевыми условиями, которые являются нелинейными. В то время как аналитические методы решений линейных уравнений при применении их к нелинейным дифференциальным уравнениям не работают, метод конечных разностей может быть использован для линейных уравнений, и для нелинейных. Рассмотрим предыдущий пример для случая когда коэффициент теплопроводности k является не const, а заданной функцией температуры $k = k(\varphi)$ и физический процесс описывается нелинейным уравнением:

$$\frac{d}{dx} \left[k(\varphi) \frac{d\varphi}{dx} \right] = -Q(x) \quad (2.7)$$

Используя аппроксимацию центральной разности:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_l = \frac{y_{l+1/2} - y_{l-1/2}}{\Delta x},$$

где индекс $l + 1/2$ указывает на вычисление в средней точке между x_l и x_{l+1} , а индекс $l - 1/2$ определяется аналогично. Обозначим:

$$y = k(\varphi) \frac{d\varphi}{dx},$$

тогда исходное ДУ может быть заменено конечно-разностной аппроксимацией:

$$k(\varphi_{l+1/2}) \left. \frac{d\varphi}{dx} \right|_{l+1/2} - k(\varphi_{l-1/2}) \left. \frac{d\varphi}{dx} \right|_{l-1/2} = \Delta x Q_l$$

Изменение знака и замена соответствующих производных центральными разностями даёт:

$$-k(\varphi_{l+1/2})[\varphi_{l+1} - \varphi_l] + k(\varphi_{l-1/2})[\varphi_l - \varphi_{l-1}] = \Delta x Q_l.$$

Таким образом, применение метода конечных разностей к исходному нелинейному дифференциальному уравнению приводит к системе нелинейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} & -k(\varphi_{l+1/2})\varphi_{l+1} + [k(\varphi_{l+1/2}) + k(\varphi_{l-1/2})]\varphi_l - \\ & -k(\varphi_{l-1/2})\varphi_{l-1} = \Delta x^2 Q_l \\ & l = 1, 2, \dots, L-1 \end{aligned}$$

Значения $k(\varphi_{l\pm 1/2})$ можно выразить через значения φ_j для целых j например:

$$k(\varphi_{l+1/2}) = k\left(\frac{\varphi_l + \varphi_{l+1}}{2}\right).$$

Тогда уравнение (2.7) можно переписать в матричном виде:

$$[k(\varphi)][\varphi] = [f]. \quad (2.8)$$

Решение можно получить методом простой итерации, когда система (2.8) многократно решается с последовательным уточнением значений $k(\varphi)$. Сначала принимается некоторое начальное приближение:

$$[\varphi] = [\varphi_0]$$

и вычисляется матрица

$$[k(\varphi_0)] = [k_0].$$

Улучшенная аппроксимация для $[\varphi]$ может быть получена как:

$$[\varphi_1] = [k_0]^{-1} \cdot [f]$$

и так далее, пока разность $[\varphi_n]$ и $[\varphi_{n-1}]$ не станет мал

$$[\varphi_n] = [k_{n-1}]^{-1} \cdot [f]$$

2.4 Конечные разности в многомерном случае.

Рассмотрим задачу стационарной теплопроводности для двухмерного случая. В качестве рассматриваемой области Ω возьмём прямоугольник (шириной L_x и высотой L_y). При $U = \text{const}$ уравнение принимает вид:

$$k \left(\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{d^2 \varphi}{dy^2} \right) = -Q(x, y) \quad (2.9)$$

Если на сторонах прямоугольника поддерживается постоянная температура $\bar{\varphi}$, то соответствующие краевые условия могут быть записаны:

$$\varphi(0, y) = \varphi(L_x, y) = \varphi(x, 0) = \varphi(x, L_y) = \bar{\varphi}$$

Построим множество равноотстоящих точек сетки $x_l (l=0, 1, 2, \dots, L)$ на отрезке $0 \leq x \leq L_x$ с $x_0 = 0$, $x_l = L_x$, $x_{l+1} - x_l = \Delta x$, а также множество равноотстоящих точек $y_m (m=0, 1, 2, \dots, M)$ на отрезке $0 \leq y \leq L_y$ с $y_0 = 0$, $y_m = L_y$, $y_{m+1} - y_m = \Delta y$. После этого область, где ищется решение, покрывается прямоугольной конечно-разностной сеткой. Точка сетки имеет координаты (x_l, y_m) . Далее частные производные в (2.9) заменяются конечно-разностными аппроксимациями.

1. Аппроксимация первых производных

а. Аппроксимация разностью вперёд.

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{l,m} \approx \frac{\varphi_{l+1,m} - \varphi_{l,m}}{\Delta x}$$

б. Аппроксимация разностью назад

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{l,m} \approx \frac{\varphi_{l,m} - \varphi_{l-1,m}}{\Delta x}$$

в. Аппроксимация центральной разностью

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{l,m} \approx \frac{\varphi_{l+1,m} - \varphi_{l-1,m}}{2 \Delta x}$$

2. Аппроксимация вторых производных

$$\left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right|_{l,m} \approx \frac{\varphi_{l+1,m} - 2\varphi_{l,m} + \varphi_{l-1,m}}{(\Delta x)^2} \quad (2.10)$$

Запишем уравнение (2.9) в типичной точке (x_l, y_m)

$$k \left(\left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right|_{l,m} + \left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right|_{l,m} \right) = -Q_{l,m}$$

Используя аппроксимацию (2.10) для вторых производных:

$$\frac{\varphi_{l+1,m} - 2\varphi_{l,m} + \varphi_{l-1,m}}{(\Delta x)^2} + \frac{\varphi_{l,m+1} - 2\varphi_{l,m} + \varphi_{l,m-1}}{(\Delta y)^2} = -Q_{l,m}$$

Задание краевых условий означает, что

$$\varphi_{0,m} = \varphi_{L,m} = \bar{\varphi}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, M$$

$$\varphi_{l,0} = \varphi_{l,M} = \bar{\varphi}, \quad l = 0, 1, 2, \dots, L.$$

Получим систему $(L-1) \cdot (M-1)$ уравнений. Обозначим:

$$[\varphi_l]^T = (\varphi_{l,1}, \varphi_{l,2}, \varphi_{l,3}, \dots, \varphi_{l,m-1})$$

$$[\varphi]^T = ([\varphi_1], [\varphi_2], [\varphi_3], \dots, [\varphi_{L-1}])$$

Полученную систему можно представить в виде:

$$[k][\varphi] = [f],$$

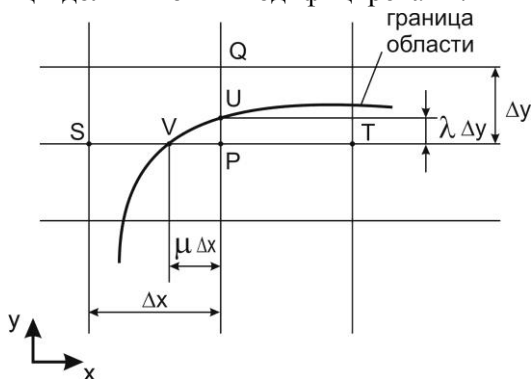
где $[k] = \begin{bmatrix} [\bar{k}] & -[I] & 0 & 0 \\ -[I] & [\bar{k}] & -[I] & 0 \\ 0 & -[I] & [\bar{k}] & -[I] \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & -[I] & [\bar{k}] & -[I] \\ & & 0 & -[I] & [\bar{k}] \end{bmatrix}$

$$[\bar{k}] = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & -1 & 4 & -1 \\ & & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Подставив аппроксимацию (2.10) для вторых производных для каждой типичной точки сетки (x_l, y_m) в исходное уравнение (2.9) получим систему $(L-1) \cdot (M-1)$ линейных алгебраических уравнений, которую можно решить стандартными методами.

2.5 Задачи для областей неправильной формы.

Рассматриваемые ранее моделируемые области имели границы, состоящие из отрезков прямых, которые пересекались прямоугольной сеткой в точках, также являвшихся узлами сетки. Это условие не выполняется в случае криволинейной границы и полученные ранние конечно-разностные выражения для производных вблизи границы должны быть модифицированы.



$$PT = PS = \Delta x$$

$$PQ = PR = \Delta y$$

$$PU = \lambda \Delta y,$$

$$0 < \lambda < 1$$

$$PV = \mu \Delta x,$$

$$0 < \mu < 1$$

Рисунок 2.1 – Пример задачи для областей неправильной формы

Аппроксимации производных запишем:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_P \approx \frac{\mu^2 \varphi_T - \varphi_V - (\mu^2 - 1) \varphi_P}{\mu(\mu - 1) \Delta x}$$

$$\left. \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right|_P \approx \frac{2[\mu \varphi_T + \varphi_V - (\mu + 1) \varphi_P]}{\mu(\mu + 1) \Delta x^2}$$

Если краевые условия дают информацию о производной функции вдоль криволинейной границы, например:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right| = -\bar{q},$$

То решение задачи существенно усложняется и рассматриваться не будет.

Недостатки метода конечных разностей

1. Сложность решения задач с криволинейными границами.
2. Трудности аппроксимации заданных на границе производных.

3 Аппроксимация базисными функциями

Использование численных методов связано с аппроксимацией функции. Требуется аппроксимировать заданную функцию φ в некоторой области Ω , ограниченной замкнутой кривой Γ . Найдём некоторую функцию ψ , принимающую одинаковые с φ значения на Γ , т.е.

$$\psi|_{\Gamma} = \varphi|_{\Gamma}$$

и введём систему базисных функций $N_m (m = 1, 2, 3)$, таких, что для всех m :

$$N_m|_{\Gamma} = 0,$$

тогда аппроксимацию для φ запишем в виде:

$$\varphi \approx \hat{\varphi} = \psi + \sum_{m=1}^M a_m N_m,$$

где $a_m (m = 1, 2, \dots, N)$ - коэффициенты, которые необходимо определить, чтобы получить хорошее приближение. Ω - отрезок $x_1 \leq x \leq x_2$. Выбранные функции N_m разрывны и равны 1 на соответствующем интервале и 0 вне его.

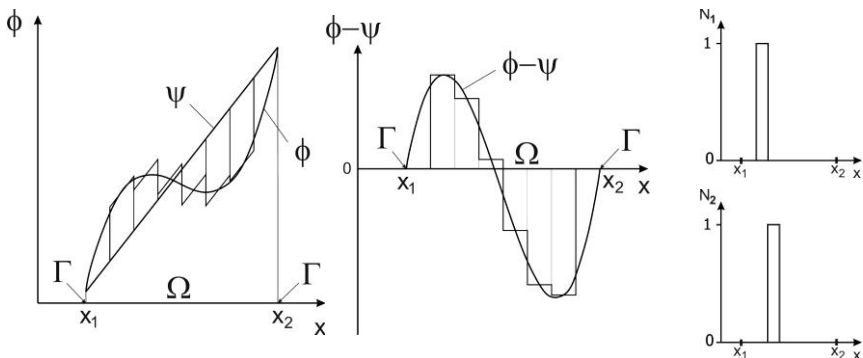


Рисунок 3.1 – Пример аппроксимации базисными функциями

Интерполяция. В этом методе параметры a_m выбираются на основании требования, что аппроксимация $\hat{\phi}$ должна совпадать с функцией ϕ в M различных произвольно выбранных точках. На рисунках 3.2 и 3.3 показано, как аппроксимировать производную функцию на отрезке $0 \leq x \leq 1$ посредством двух элементов соответствующих систем базисных функций.

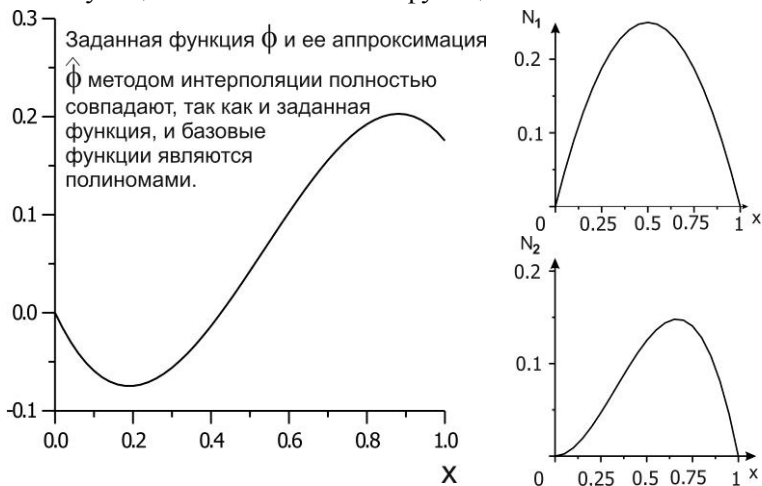


Рисунок 3.2 – Пример интерполяции функцией $N_m = x^m(1-x)$, $m = 1, 2, \dots$

Заданная функция: $\phi = -1,68x^3 + 2,71x^2 - 0,847x$. Аппроксимация:

$$\hat{\phi} = \psi - 1,02N_1 + 1,68N_2$$

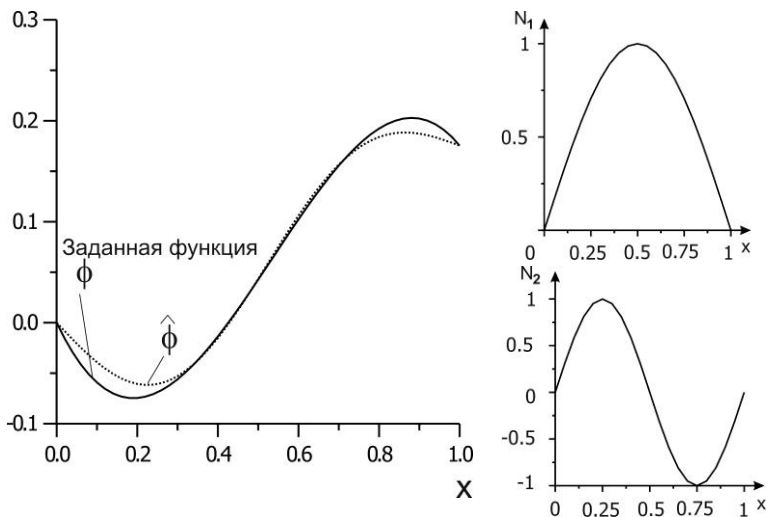


Рисунок 3.3 – Пример интерполяции функцией $N_m = \sin m\pi x$, $m = 0, 1, 2, \dots$

Заданная функция: $\varphi = -1,68x^3 + 2,71x^2 - 0,847x$. Аппроксимация:
 $\hat{\varphi} = \psi - 0,04442N_1 + 0,07325N_2$

Синус ряды Фурье:

Аппроксимацию произвольной функции $\varphi(x)$ на отрезке $0 \leq x \leq L_x$ можно записать:

$$\varphi(x) \approx \hat{\varphi} = \psi(x) + \sum_{m=1}^M a_m \sin \frac{m\pi x}{L_x},$$

где: $a_m = \frac{2}{L_x} \int_0^{L_x} (\varphi - \psi) \sin \frac{m\pi x}{L_x}$

Применение этого метода для аппроксимации функций демонстрируется на рисунке 3.4, где отражены результаты использования

одного и двух элементов для аппроксимации функции из предыдущего примера.

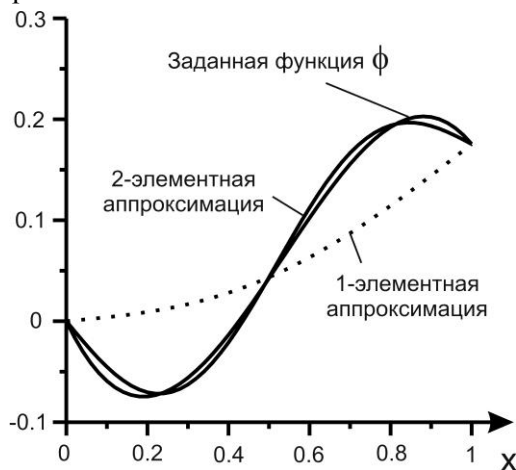


Рисунок 3.4 – Пример применения метода аппроксимацией с помощью синус рядов Фурье

3.1 Аппроксимации с помощью взвешенных невязок

Невязка R_{Ω} это погрешность в аппроксимации:

$$R_{\Omega}(x) = \varphi(x) - \hat{\varphi}(x)$$

Для точной аппроксимации заданной функции φ с помощью M базисных функций необходимо равенство нулю M интервалов от невязки R_{Ω} , взятых с различными весами W_e :

$$\int_{\Omega} W_e (\varphi - \hat{\varphi}) d\Omega = \int_{\Omega} W_e R_{\Omega} d\Omega = 0, \quad l = 1, 2, \dots, m \quad (3.1)$$

Здесь W_e - множество линейно независимых весовых функций.

Аппроксимацию функции имеем в виде:

$$\hat{\phi} = \psi + \sum_{m=1}^M a_m N_m, \quad (3.2)$$

Подставляем (3.2) в (3.1)

$$\int_{\Omega} W_e \left(\phi - \psi - \sum_{m=1}^M a_m N_m \right) d\Omega = 0, \quad l = 1, 2, \dots, M, \quad m = 1, 2, \dots, M$$

$$\int_{\Omega} W_e \sum_{m=1}^M a_m N_m d\Omega = \int_{\Omega} W_e (\phi - \psi) d\Omega$$

$$\sum_{m=1}^M a_m \int_{\Omega} W_e N_m d\Omega = \int_{\Omega} W_e (\phi - \psi) d\Omega,$$

$$l = 1, 2, \dots, M, \quad m = 1, 2, \dots, M$$

Для примера рассмотрим случай $M = 2$:

$$a_1 \int_{\Omega} W_1 N_1 d\Omega + a_2 \int_{\Omega} W_1 N_2 d\Omega = \int_{\Omega} W_1 (\phi - \psi) d\Omega, \quad l = 1$$

$$a_1 \int_{\Omega} W_2 N_1 d\Omega + a_2 \int_{\Omega} W_2 N_2 d\Omega = \int_{\Omega} W_2 (\phi - \psi) d\Omega, \quad l = 2 = M$$

$$\begin{bmatrix} \int_{\Omega} W_1 N_1 d\Omega & \int_{\Omega} W_1 N_2 d\Omega \\ \int_{\Omega} W_2 N_1 d\Omega & \int_{\Omega} W_2 N_2 d\Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{\Omega} W_1 (\phi - \psi) d\Omega \\ \int_{\Omega} W_2 (\phi - \psi) d\Omega \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Обозначим:

$$[a] = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \text{ и } [a]^T = [a_1 \quad a_2],$$

$$k_{lm} = \int_{\Omega} W_e N_m d\Omega \text{ и } f_l = \int_{\Omega} W_l (\varphi - \psi) d\Omega .$$

С учётом выбранных обозначений уравнение (3.3) можно переписать в виде:

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

Или

$$[k][a] = [f]$$

Таким образом, получаем систему M линейных алгебраических уравнений для неизвестных коэффициентов a_m , получаем искомую аппроксимацию в виде (3.2)

Существуют различные виды весовых функций N_l . Наиболее популярен метод Галёркина, когда

$$W_l = N_l ,$$

тогда: $k_{lm} = \int_{\Omega} W_e N_m d\Omega$ и $f_l = \int_{\Omega} W_l (\varphi - \psi) d\Omega$.

3.2 Аппроксимация решений дифференциальных уравнений и использование базисных функций. Выполнение краевых условий с помощью базисных функций

Рассмотрим дифференциальное уравнение, записываемое в общем виде:

$$A(\varphi) = L\varphi + p = 0 , \tag{3.4}$$

где L – соответствующий линейный дифференциальный оператор, p – величина, не зависящая от φ .

Например: $k \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + m \frac{d^2 \varphi}{dy^2} = x^2 + y^2$.

$$L = k \frac{d^2}{dx^2} + m \frac{d^2}{dy^2}, \quad p = -(x^2 + y^2)$$

Решение уравнения (3.4) должно удовлетворять соответствующим краевым условиям, которые тоже запишем в общем виде:

$$B(\varphi) = M\varphi + r = 0 \text{ на } \Gamma, \quad (3.5)$$

где M – соответствующий линейный оператор, r – величина не зависящая от φ

Например, для случая краевого условия Неймана

$$\frac{d\varphi}{dx} = 4 \text{ при } x = 0$$

$$M\varphi = \frac{d\varphi}{dx}, \quad r = -4$$

Построим аппроксимацию $\hat{\varphi}$ для решения φ дифференциального уравнения.

$$\varphi \approx \hat{\varphi} = \psi + \sum_{m=1}^M a_m N_m \quad (3.6)$$

Функцию ψ и базисные функции N_m выберем таким образом, что $M\psi = -r$, $MN_m = 0$, $m = 1, 2, \dots$ на Γ . Поэтому $\hat{\varphi}$ автоматически удовлетворяет краевым условиям (3.5). Подставляя аппроксимацию

$\hat{\phi}$ в исходное дифференциальное уравнение (3.4), получим невязку R_Ω :

$$R_\Omega \equiv A(\hat{\phi}) \equiv L\hat{\phi} + p = L\left(\psi + \sum_{m=1}^M a_m N_m\right) + p = L\psi + \sum_{m=1}^M a_m LN_m + p$$

Для получения приближенного равенства $R_\Omega = 0$ воспользуемся методом взвешенных невязок:

$$\int_{\Omega} W_l R_\Omega d\Omega \equiv \int_{\Omega} W_l \left[L\psi + \sum_{m=1}^M a_m LN_m + p \right] d\Omega = 0 ,$$

$$l = 1, 2, \dots, M , \quad m = 1, 2, \dots, M$$

$$\sum_{m=1}^M a_m \int_{\Omega} W_l LN_m d\Omega = - \int_{\Omega} W_l L\psi d\Omega - \int_{\Omega} W_l p d\Omega$$

$$[k][a] = [f]$$

$$k_{lm} = \int_{\Omega} W_l LN_m d\Omega ; \quad f_l = - \int_{\Omega} W_l L\psi d\Omega - \int_{\Omega} W_l p d\Omega$$

Вычислив элементы матриц $[k]$ и $[f]$ и решив затем полученную систему линейных алгебраических уравнений, определим неизвестные коэффициенты a_m , $m = 1, 2, \dots, M$. В результате получим приближенное решение исходного дифференциального уравнения (3.4) в виде (3.6).

3.3 Одновременная аппроксимация решений дифференциальных уравнений и краевых условий.

В предыдущем разделе для получения приближенного решения $\hat{\phi}$ исходного дифференциального уравнения

$$\hat{\phi} = \psi + \sum_{m=1}^M a_m N_m \quad (3.7)$$

Функции ψ и N_m выбирались тождественно удовлетворяющими краевым условиям. Это требование неудобно, так как ограничивает выбор возможных базисных функций. Предположим, что разложение (3.7) не удовлетворяет некоторому краевому условию или всем краевым условиям задачи, тогда к невязке по областям

$$R_{\Omega} = A(\hat{\phi}) = L\hat{\phi} + p \text{ на } \Omega$$

добавляется невязка в краевых условиях:

$$R_{\Gamma} = B(\hat{\phi}) = M\hat{\phi} + r \text{ на } \Gamma.$$

Тогда необходимо уменьшить взвешенную сумму невязок на границе и по областям, полагая:

$$\int_{\Omega} W_I R_{\Omega} d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{W}_I R_{\Gamma} d\Gamma = 0 \quad (*)$$

где весовые функции W_I и \bar{W}_I могут быть выбраны независимо или быть связаны друг с другом каким-либо образом.

3.4 Естественные краевые условия

Вычисление интегралов в выражении (*) достаточно трудно. В ряде случаев эту трудоёмкость можно уменьшить. Первое слагаемое уравнения (*).

$$\int_{\Omega} W_l R_{\Omega} d\Omega = \int_{\Omega} W_l (L\hat{\phi} + p) d\Omega$$

как правило можно преобразовать к виду:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} W_l (L\hat{\phi} + p) d\Omega &= \int_{\Omega} W_l L\hat{\phi} d\Omega + \int_{\Omega} W_l p d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} (IW_l)(D\hat{\phi}) d\Omega + \int_{\Gamma} W_l \varepsilon \hat{\phi} d\Gamma + \int_{\Omega} W_l p d\Omega \end{aligned}$$

где I , D , и ε - линейные дифференциальные операторы более низкого порядка, чем исходный оператор L . Результат подставки этого выражения в уравнение (*) называется слабой формулировкой метода взвешенных невязок:

$$\int_{\Omega} (IW_l)(D\hat{\phi}) d\Omega + \int_{\Gamma} W_l \varepsilon \hat{\phi} d\Gamma + \int_{\Omega} W_l p d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{W}_l (M\hat{\phi} + \Gamma) d\Gamma = 0.$$

Надлежащим выбором граничной весовой функции \bar{W}_l можно добиться того, что подчеркнутые слагаемые взаимно уничтожаются и, таким образом, будет исключён интеграл, содержащий приближённое решение $\hat{\phi}$ и его производные вдоль границы. Это возможно только для определённых краевых условий, называемых естественными. Применение такой процедуры для краевых условий, включающих только заданные значения самой функции (например, $\varphi = 3$ при $x = 0$), выгоды не даёт, но оно может быть полезно при задании на границе производной (например $\frac{d\varphi}{dx} = 3$ при $x = 0$).

При понижении порядка линейного дифференциального оператора L используют формулу Гаусса:

$$\int_{\Omega} \alpha \frac{\partial \beta}{\partial x} dx dy = - \int_{\Omega} \frac{\partial \alpha}{\partial x} \beta dx dy + \int_{\Gamma} \alpha \beta n_x d\Gamma$$

$$\int_{\Omega} \alpha \frac{\partial \beta}{\partial y} dx dy = - \int_{\Omega} \frac{\partial \alpha}{\partial y} \beta dx dy + \int_{\Gamma} \alpha \beta n_y d\Gamma$$

где n_x и n_y - направляющие косинусы внешней нормали \mathbf{n} к замкнутой кривой Γ , ограничивающей область Ω в плоскости (x, y) .

3.5 Системы дифференциальных уравнений

Метод взвешенных невязок может быть применён к решению систем дифференциальных уравнений. При этом отыскивается неизвестная функция

$$[\varphi] = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \dots \end{bmatrix} \text{ или } [\varphi]^T = [\varphi_1, \varphi_2, \dots]$$

такая, что в области Ω она удовлетворяет дифференциальным уравнениям, записываемым в виде:

$$A_1([\varphi]) = 0$$

$$A_2([\varphi]) = 0$$

или

$$[A([\varphi])] = \begin{bmatrix} A_1([\varphi]) \\ A_2([\varphi]) \\ \dots \end{bmatrix} = 0 \text{ на } \Omega$$

Предполагается, что на границе Γ области Ω задано нужное число соответствующих краевых условий:

$$B_1([\varphi]) = 0$$

$$B_2([\varphi]) = 0$$

или

$$[B([\varphi])] = \begin{bmatrix} B_1([\varphi]) \\ B_2([\varphi]) \\ \dots \end{bmatrix} = 0 \text{ на } \Gamma$$

Для каждой компоненты неизвестного вектора $[\varphi]$ используем разложение по базисным функциям

$$\varphi_1 \approx \hat{\varphi}_1 = \psi_1 + \sum_{m=1}^M a_{m,1} N_{m,1}$$

$$\varphi_2 \approx \hat{\varphi}_2 = \psi_2 + \sum_{m=1}^M a_{m,2} N_{m,2}$$

...

или

$$[\varphi] \approx [\hat{\varphi}] = [\psi] + \sum_{m=1}^M [a_m] [N_m]$$

где

$$[\psi] = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \dots \end{bmatrix} \text{ или } [\psi]^T = [\psi_1 \quad \psi_2 \quad \dots]$$

$$[N_m] = \begin{bmatrix} N_{m,1} & 0 & 0 \\ 0 & N_{m,2} & 0 \\ 0 & 0 & \dots \end{bmatrix} \quad [a_m] = \begin{bmatrix} a_{m,1} \\ a_{m,2} \\ \dots \end{bmatrix}$$

Тогда получим систему алгебраических уравнений:

$$\int_{\Omega} W_{l,1} A_l([\hat{\phi}]) d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{W}_{l,1} B_l([\hat{\phi}]) d\Gamma = 0$$

$$\int_{\Omega} W_{l,2} A_l([\hat{\phi}]) d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{W}_{l,2} B_l([\hat{\phi}]) d\Gamma = 0$$

...

3.6 Нелинейные задачи.

Метод взвешенных невязок может быть использован для решения нелинейных задач. В этом случае применение обычной процедуры метода взвешенных невязок приводит к системе нелинейных алгебраических уравнений:

$$[K([a])][a] = [f] \quad (3.8)$$

Эти уравнения могут быть решены с помощью итерационного метода. Принимаем некоторое произвольное начальное приближение

$$[a^0] = \begin{bmatrix} a_1^0 \\ a_2^0 \\ \dots \\ a_M^0 \end{bmatrix}.$$

И с этими коэффициентами вычисляем $[K([a^0])]$ и $[f([a^0])]$. Из уравнения (1), которое теперь переписывается в виде $[K([a^0])][a^1] = [f([a^0])]$ находим улучшенное решение $[a^1]$.

Далее общая итерационная схема $[K(a^{n-1})] \cdot [a^n] = [f(a^{n-1})]$ применяется до тех пор, пока процесс сойдётся в пределах заданной точности приближения, т.е. $[a^{n-1}] \approx [a^n]$.

4 Введение. Понятие конечного элемента

4.1 Идея метода конечных элементов

Для решаемой системы дифференциальных уравнений определяют область, в которой она справедлива, и налагают на эту область краевые и начальные условия. На данном этапе математическая модель замкнута и для практических применений требуется найти решения для конкретного множества числовых данных. Однако, точному или аналитическому решению поддаются лишь уравнения самого простого вида внутри геометрически тривиальных границ.

Чтобы преодолеть эти трудности, задачу преобразуют к чисто алгебраической форме, включающей только основные арифметические операции. Кроме того, такая форма задачи наиболее удобна при автоматизации процесса решения с использованием вычислительной техники. Для достижения этой цели применяются различные виды *дискретизации* непрерывной задачи, определенной дифференциальными уравнениями. При такой дискретизации бесконечное множество чисел, представляющих неизвестную функцию, заменяется конечным числом неизвестных параметров. Такой процесс требует некоторой формы *аппроксимации*.

Для методов конечных элементов характерно задание приближенного решения исходной задачи в аппроксимационной форме:

$$\varphi \approx \psi = \Psi + \sum_{m=1}^M a_m \cdot N_m, \quad (4.1)$$

где φ – неизвестная функция;

Ψ – некоторая функция, принимающая одинаковые значения на границе исследуемой области Γ ;

N_m – система независимых базисных функций;

a_m – параметры, вычисляемые таким образом, чтобы получить хорошее приближение.

При этом область Ω разбивается на ряд неперекрывающихся подобластей или элементов Ω^e . Затем строится аппроксимация φ кусочным образом, т.е. отдельно на каждой подобласти. В отличие от классических аппроксимационных методов, в которых базисная функция N_m была определена одним выражением на всей области Ω , в методе конечных элементов базисные функции определены кусочным образом.

В таком случае входящие в аппроксимирующие уравнения определенные интегралы получаются простым суммированием их вклада по каждой подобласти или элементу:

$$\int_{\Omega} W_e \cdot R_{\Omega} \cdot d\Omega = \sum_{e=1}^E \int_{\Omega^e} W_e \cdot R_{\Omega} \cdot d\Omega$$
$$\int_{\Gamma} \overline{W}_e \cdot R_{\Gamma} \cdot d\Gamma = \sum_{e=1}^E \overline{W}_e \cdot R_{\Gamma} \cdot d\Gamma$$

при условии $\sum_{e=1}^E \Omega^e = \Omega$; $\sum_{e=1}^E \Gamma^e = \Gamma$. Здесь E – общее число подобластей, на которые разбивается вся область, а Γ^e – часть границы Ω^e , лежащая на Γ .

Если подобласти имеют сравнительно простую форму (например, треугольники, прямоугольники – в плоском случае; тетраэдры и призмы – в трехмерном) и базисные функции на этих подобластях определяются однотипно, то весьма просто найти решение для областей сложной формы. В этом заключается идея метода конечных элементов.

4.2 Примеры типичных базисных функций

Рассмотрим построение аппроксимации для произвольной функции $\varphi(x)$ на отрезке $\Omega = [0; L_x]$ с помощью методов конечных элементов для двух вариантов базисной функции.

В *первом случае* используется аппроксимация посредством функции $\hat{\varphi}(x)$, принимающей постоянное значение на каждом элементе (см. рис. 4.1).

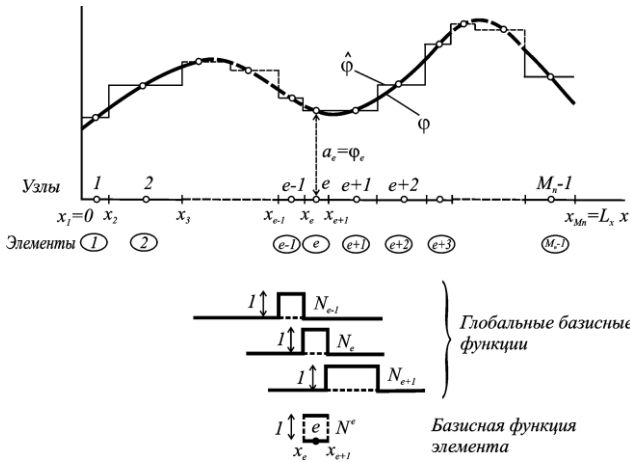


Рисунок 4.1 – Аппроксимация функции одной переменной с использованием кусочно-постоянных элементов

Такая аппроксимация является разрывной со скачками в точках сопряжения элементов. В качестве узлов выбираются средние точки элементов. Функция записывается в стандартной форме (4.1) путем сопоставления каждому узлу m кусочно-постоянной разрывной одинаковой для всех элементов базисной функции N_m , принимающей значение I на элементе m и 0 на всех других элементах:

$$\varphi \approx \hat{\varphi} = \sum_{m=1}^M \varphi_m N_m \text{ в } \Omega,$$

где φ_m – значения функции в узле m .

Произвольная функция ψ опущена и аппроксимация φ в граничных точках не будет равна значению функции φ . Однако $\varphi \rightarrow \hat{\varphi}$ в граничных точках при уменьшении длин элементов, прилегающих к границам $x=0$ и $x=L_x$.

На каждом элементе e аппроксимация выражается через значение φ_e и $N^e \varphi \approx \hat{\varphi} \cdot N^e = \varphi_e$ на элементе e .

Во *втором случае* используется аппроксимация функцией, линейно меняющейся по x на каждом элементе. В этом случае узлами являются точки сопряжения элементов. Аппроксимация осуществляется путем сопоставления каждому узлу i кусочно-линейной базисной функции N_i . Причем $N_i=1$ в узле i и $N_i=0$ во всех других узлах.

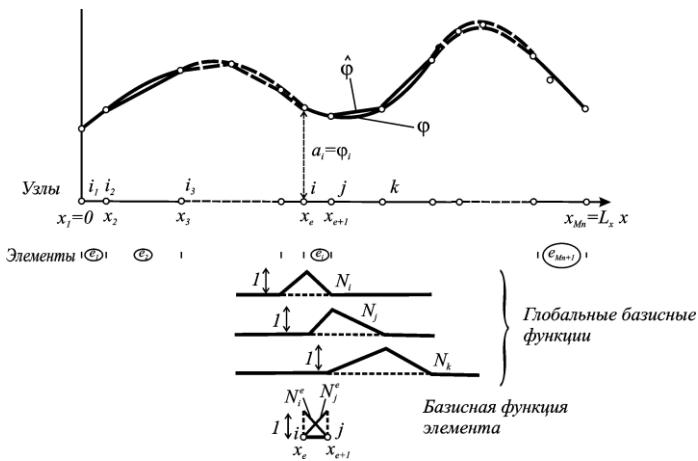


Рисунок 4.2 – Аппроксимация функции одной переменной с использованием кусочно-линейных элементов

В данном случае аппроксимация также записывается в виде

$$\varphi \approx \hat{\varphi} = \sum_{m=1}^M \varphi_m N_m \text{ в } \Omega .$$

На каждом элементе e с узлами i и j аппроксимация может быть выражен с помощью двух линейных базисных функций N_i^e и N_j^e и узловых значений φ_i и φ_j по правилу

$$\varphi \approx \hat{\varphi} = \varphi_i N_i^e + \varphi_j N_j^e \text{ на элементе } e.$$

Аналогичные кусочно-постоянные и кусочно-линейные базисные функции можно использовать для аппроксимации на двумерных областях. На рисунках 4.3 и 4.4 осуществлено разбиение двумерной области на треугольники.

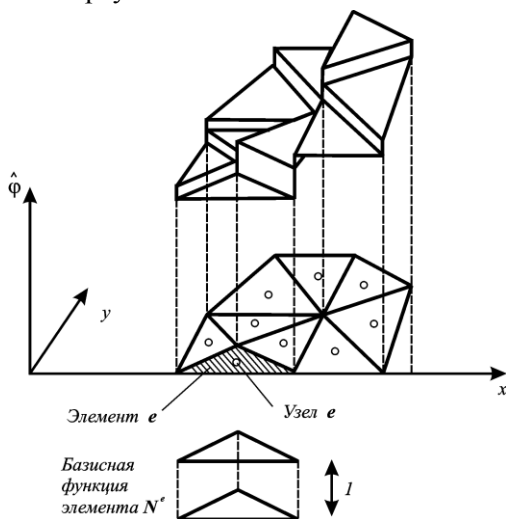


Рисунок 4.3 – Аппроксимация функции двух переменных методом поточечной коллокации с использованием кусочно-постоянных треугольных элементов

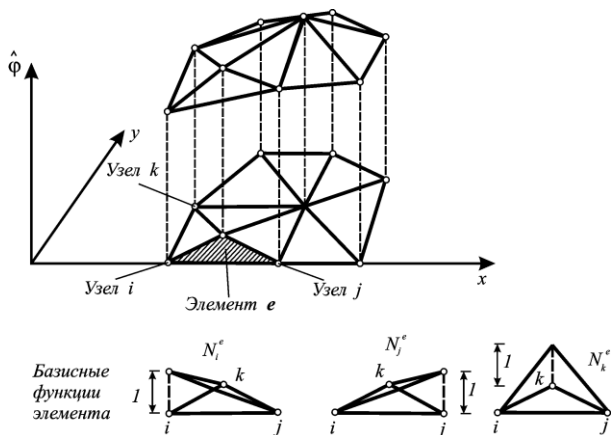


Рисунок 4.4 – Аппроксимация функции двух переменных методом поточечной коллокации с использованием кусочно-линейных треугольных элементов

При аппроксимации кусочно-постоянными функциями в качестве узлов взяты центры тяжести треугольников.

4.3 Слабая формулировка и требование гладкости

При рассмотрении примеров типичных базисных функций использовались разрывные базисные функции, а также непрерывные, но с разрывными производными. Поскольку уравнение взвешенных невязок

$$\int_{\Omega} \bar{W}_l R_{\Omega} d\Omega + \int_{\bar{A}} \bar{W}_l R_{\bar{A}} d\bar{A} = 0, \quad (4.2)$$

где $R_{\Omega} = L\varphi + p$, $R_{\bar{A}} = M\varphi + r$, включает производные от базисных функций то необходимо выставить к ним определенные требования.

Рассмотрим поведение трех типов одномерных базисных функций N_m вблизи точки стыковки двух элементов (рис. 4.5)

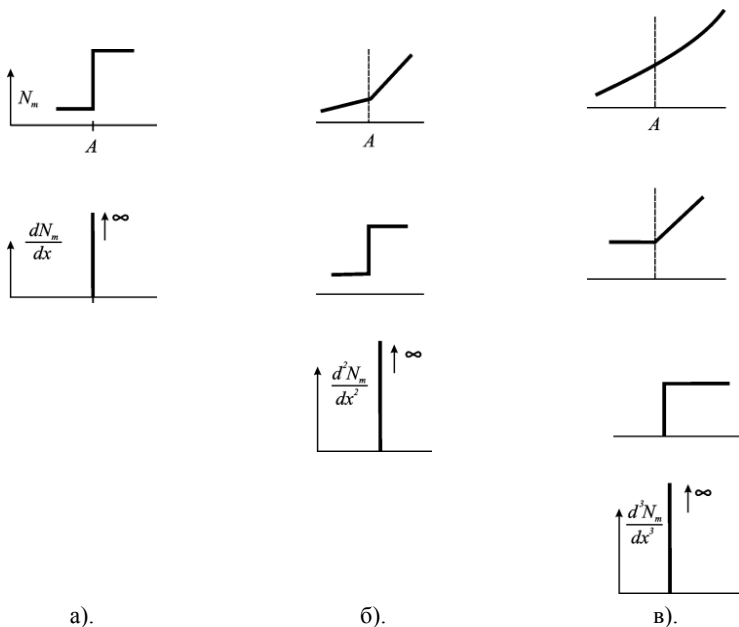


Рисунок 4.5 – Поведение трёх типов базисных функций и их производных вблизи точки стыковки двух элементов

Первая функция разрывна в точке, вторая имеет разрывную производную $\frac{dN_m}{dx}$, у третьей разрывна вторая производная $\frac{d^2N_m}{dx^2}$. При этом в точках разрывов соответственно первая, вторая и третья производные этих функций не будут ограничены.

Если интегралы в (4.2) содержат производные порядка s , то необходимо гарантировать кусочную дифференцируемость производных порядка $s-1$.

Например, если мы просто интерполируем данную функцию и не используем никакого дифференциального оператора, то допустимо применение разрывных базисных функций, если в L и M входят первые производные, то требуется функция с порядком гладкости как на рисунке 4.5 б; если вторые то, как на рисунке 4.5 в.

Рассмотрим уравнение метода взвешенных невязок (4.2). В этом уравнении первое слагаемое

$$\int_{\Omega} W_l R_{\Omega} d\Omega \equiv \int_r \bar{W}_l (L\hat{\phi} + p) d\Omega$$

можно преобразовать к виду (используя интегрирование по частям или преобразование Грина-Стокса).

$$\int_{\Omega} W_l (L\hat{\phi}) d\Omega \equiv \int_{\Omega} (C W_l) \cdot (D\hat{\phi}) \cdot d\Omega + \int_{\Gamma} W_l (E\hat{\phi}) d\Gamma, \quad (4.3)$$

где C , D и E – линейные дифференциальные операторы более низкого порядка чем исходной L . Результат подстановки (4.3) в (4.2) часто называется слабой формулировкой метода взвешенных невязок. Достигаемое таким преобразованием преимущество заключается в том, что в таком случае от базисных функций N_m будет требоваться более низкий порядок гладкости. Однако при этом от весовых функций W_l потребуются более высокий порядок гладкости.

Однако, так как операторы C и D одного порядка дифференцирования и в силу равенства $W_l = N_l$ в методе Галеркина гладкости функции W_l будет достаточно при дифференцировании оператором C .

4.4 Пример континуальной задачи

Рассмотрим упругий стержень в виде прямого кругового цилиндра, длина которого значительно больше его диаметра. Это позволит отождествлять стержень с его осью (рис. 4.6).

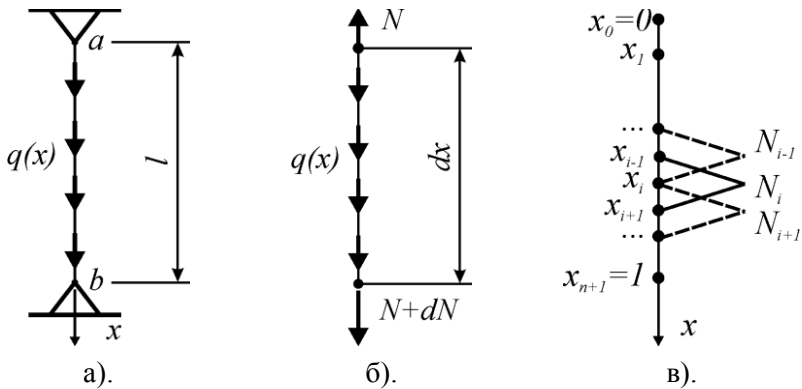


Рисунок 4.6 – Расчётная схема континуальной задачи

К оси стержня вдоль x приложим внешнюю распределенную нагрузку. Задача состоит в определении перемещении точек, принадлежащих оси стержня. Бесконечно малая часть стержня dx находится в равновесии по действию нагрузки $q(x) \cdot dx$ и предельных внутренних сил $N(x)$ (рис.4.6 б):

$$dN + q \cdot dx = 0 \quad (4.4)$$

Согласно закону Гука, для упругого стержня

$$N = c \frac{d\varphi}{dx}, \quad (4.5)$$

где c – продольная жёсткость стержня, $\varphi(x)$ – функция перемещений точек стержня.

Подставляя (4.5) в (4.4) получим задачу относительно $\varphi(x)$ в виде дифференциального уравнения и краевых условий.

$$-c \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = q \quad (4.6)$$

$$\varphi(0) = \varphi_a; \quad \varphi(l) = \varphi_b$$

Для простоты положим $c=1$, $l=1$; $\varphi(a)=\varphi(b)=0$, тогда задача (4.6) будет

$$-\varphi'' = q(x); \quad \varphi(0) = \varphi(1) = 0. \quad (4.7)$$

Согласно схеме метода конечных элементов разобьём интервал $(0;1)$ на элементы, соединённые в узлах $X_i (i=0,1,\dots,n+1)$ рис 4.6 в. Будем разыскивать приближённое решение (4.7) в виде:

$$\varphi(x) = \varphi_0 N_0 + \varphi_1 N_1 + \dots + \varphi_n N_n + \varphi_{n+1} N_{n+1} \quad (4.8)$$

Для того чтобы в (4.8) $\varphi(x_i) = \varphi_i$ во всех узлах x_i функция N_i должна удовлетворять условиям $N_i(x_i) = 1$; $N_i(x_j) = 0$ при $i \neq j$. Воспользуемся кусочно-линейными функциями N_i , отличными от нуля на двух элементах (см. рис. 4.6 в). Остаётся определить φ_i в (4.8). Однако, поскольку уравнение (4.7) содержит φ'' , а уже φ' терпит разрывы непрерывности в узлах, используем слабую формулировку. Обозначим невязку уравнения (4.7)

$$R(x) = \varphi''(x) + q(x).$$

Тогда по методу взвешенных невязок

$$\int_0^1 [\varphi''(x) + q(x)] \cdot W_j(x) dx = 0, \text{ где } j=1,2,\dots,n \quad (4.9)$$

Используя метод Галёркина, приравняем весовые функции $W(x)$ к базисным

$$W_j(x) = N_j(x).$$

Выполним в (4.9) интегрирование по частям при условии $N_j(0) = N_j(1) = 0$.

$$\begin{aligned} \int_0^1 [\varphi''(x) + q(x)] \cdot N_j dx &= \int_0^1 \varphi''(x) N_j dx + \int_0^1 q(x) N_j dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} U = N_j \quad dU = N'_j dx \\ dV = \varphi'(x) dx \quad V = \varphi'(x) \end{array} \right| + \int_0^1 q(x) N_j dx = N_j \cdot \varphi'(x) \Big|_0^1 - \\ &- \int_0^1 \varphi'(x) N'_j \cdot dx + \int_0^1 q(x) \cdot N_j dx = \int_0^1 (-\varphi'(x) N'_j + q(x) \cdot N_j) dx \end{aligned}$$

получим

$$\int_0^1 (-\varphi'(x) N'_j + q(x) \cdot N_j) dx = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (4.10)$$

Подставим (4.8) в (4.10)

$$\int_0^l \left[- \left(\sum_{i=1}^n (\varphi_i \cdot N_i)' \right) \cdot N_j' + q \cdot N_j \right] dx = 0$$

в силу того, что $\varphi_i = \text{const}$

$$\sum_{i=1}^n \varphi_i \cdot K_{ij} = P_j \quad \text{или} \quad \varphi \cdot K = P \quad (4.11)$$

$$\text{где } K_{ij} = \int_0^l N_i' N_j' \cdot dx \quad P_j = \int_0^l q(x) N_j \cdot dx \quad (4.12)$$

Матрица K носит название *матрица жёсткости* при этом она симметрична, что характерно для метода Галёркина. Для простоты примем длину элементов одинаковой и равной h . Согласно рис.4.6 в

$$N_i' = \frac{1}{h} \quad \text{на интервале } (x_{i-1}; x_i) \text{ и}$$

$$N_i' = -\frac{1}{h} \quad \text{на интервале } (x_i; x_{i+1}).$$

Возможны три варианта комбинирования i и j ;

1). $i=j$, тогда

$$\begin{aligned} K_{ij} &= \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (N_i')^2 dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{1}{h} \right)^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(-\frac{1}{h} \right)^2 dx = \\ &= \frac{1}{h^2} \left(x \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} + x \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} \right) = \frac{1}{h^2} (x_i - x_{i-1} + x_{i+1} - x_i) = \\ &= \frac{1}{h^2} (x_{i+1} - x_{i-1}) = \frac{1}{h^2} \cdot 2h = \frac{2}{h} \end{aligned}$$

с известными коэффициентами и правой частью. Решение полученной системы алгебраических уравнений даёт множество φ_i и позволяет представить приближённое решение в форме (4.8).

5 Подходы к методу конечных элементов

К решению встречающихся в технике задач прикладной механики при помощи метода конечных элементов существует два подхода.

Первый и наиболее распространенный заключается в том, что постулируется вариационный экстремальный принцип, справедливый для всей области. При этом решение минимизирует некоторую величину χ , которая определяется как некоторый интеграл от неизвестных величин по всей области. Интегральная величина χ , представляющая собой функцию от неизвестной функции, называется функционалом.

Например, задача определения поля перемещения в конструкции сводится к задаче минимизации полной потенциальной энергии, определенной в виде функционала от перемещений.

Второй позволяет получить основные соотношения метода конечных элементов непосредственно из дифференциальных уравнений задачи. Этот метод называется методом взвешенных невязок.

5.1 Минимизация функционала

Пусть физическая постановка задачи требует минимизации функционала χ в некоторой области V с границей S :

$$\chi = \int_V f\left(\varphi; \frac{\partial}{\partial x} \varphi; \dots\right) dV + \int_S g\left(\varphi, \frac{\partial}{\partial x} \varphi; \dots\right) dS. \quad (5.1)$$

Разобьем рассматриваемую область на элементы. Пусть функции, которые мы хотим определить, для каждого элемента записываются в виде:

$$\varphi = [N] \cdot \{\Phi\}^e, \quad (5.2)$$

где $\{\Phi\}^e$ – содержит узловые значения функции, соответствующие элементу e , $[N]$ – матрица, определяющая зависимость базисной функции от координат.

Для минимизации функционала χ по все параметрам $\{\Phi\}$ полной области следует записать систему уравнений

$$\frac{\partial \chi}{\partial \{\Phi\}} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \chi}{\partial \Phi_1} \\ \frac{\partial \chi}{\partial \Phi_2} \\ \dots \end{Bmatrix} = 0 \quad (5.3)$$

Если справедливо утверждение, что функционал равен сумме вкладов отдельных элементов, т.е. что

$$\chi = \sum \chi^e, \quad (5.4)$$

то каждое уравнение системы (5.3) примет вид

$$\frac{\partial \chi}{\partial \Phi_n} = \sum \frac{\partial \chi^e}{\partial \Phi_n} = 0, \quad (5.5)$$

где суммирование производится по всем элементам.

В частном случае, когда χ является квадратичным функционалом от Φ и ее производных, производную для элемента e можно записать в виде:

$$\frac{\partial \chi^e}{\partial \{\Phi\}^e} = [K]^e \{\Phi\}^e + \{F\}^e, \quad (5.6)$$

где $[K]^e$ и $\{F\}^e$ – постоянные матрицы. Теперь систему уравнений (5.3), минимизирующей функционал, можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial \chi}{\partial \{\Phi\}} = [K]\{\Phi\} + \{F\} = 0, \quad (5.7)$$

$$\text{где } [K_{ij}] = \sum [k_{ij}]^e, \quad (5.8)$$

$$\{F_i\} = \sum \{F_i\}^e. \quad (5.9)$$

5.2 Метод взвешенных невязок

Рассмотрим задачу приближенного решения дифференциального уравнения, которому должна удовлетворять неизвестная функция φ в области V :

$$A(\varphi) = 0 \quad (5.10)$$

граничное условие на S

$$C(\varphi) = 0. \quad (5.11)$$

Если

$$\hat{\varphi} = [N]\{\Phi\}, \quad (5.12)$$

где $[N]$ – является базисной функцией, а $\{\Phi\}$ – узловое значение, то в общем случае

$$A(\varphi) = R \neq 0 \quad (5.13)$$

Наилучшим решением будет то, которое дает во всех точках области V наименьшую невязку R . Это решение можно получить, используя то обстоятельство, что если невязка R тождественно равна нулю всюду в области, то

$$\int_V WR dV = 0. \quad (5.14)$$

Если число неизвестных параметров $\{\Phi\}$ равно n , то, выбрав n линейно независимых функций W_i , запишем соответствующую систему уравнений:

$$\int_V W_i R dV = \int_V W_i A([N]\{\Phi\}) dV = 0 \quad (5.15)$$

из которой может быть найдена функция $\{\Phi\}$.

Выбор различных весовых функций приводит к различным классическим методам.

Метод коллокации в точке, в котором полагается, что $W_i=1$ в некоторой точке i и равна нулю во всех остальных. При этом основное дифференциальное уравнение удовлетворяется в n отдельных точках.

Метод коллокации в подобласти, в котором считается, что $W_i=1$ в некоторой подобласти и $W_i=0$ в остальной части области.

Метод Галеркина. В этом случае $W_i=N_i$, то есть в качестве весовой функции выбирается базисная функция, с помощью которой

аппроксимируется решение. Этот метод обычно приводит к наилучшим результатам.

Преимущество метода взвешенных невязок по сравнению с минимизацией функционала состоит в том, что

1) исчезает необходимость искать функциональный эквивалент известным дифференциальным уравнениям.

2) этот метод может быть распространен на задачи, для которых функционал либо вообще не существует, либо пока еще не получен.

К **недостатку** метода взвешенных невязок следует отнести то, что при его применении дифференциальный оператор A содержит производные более высоких порядков, чем вариационный функционал χ . Поэтому необходимо обеспечить выполнение условий непрерывности базисной функции более высокого порядка.

5.3 Пример минимизации функционала и метода взвешенных невязок для уравнения Пуассона

Рассмотрим задачу решения уравнения в частных производных

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + C = 0 \quad (5.16)$$

в некоторой области V при заданных значениях функции $\varphi = \varphi_r$ на границе.

Можно показать, что решение этой задачи эквивалентно нахождению функции φ , удовлетворяющей краевым условиям и минимизирующей функционал

$$\chi = \iint_V \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 - C \varphi \right] dx dy. \quad (5.17)$$

Для приближенного решения этого уравнения разобьем область на элементы, для каждого из которых

$$\varphi = [N_i, N_j, \dots] \begin{Bmatrix} \varphi_i \\ \varphi_j \\ \dots \\ K \end{Bmatrix} = [N] \{\varphi\}^e \quad (5.18)$$

где $\{\varphi\}^e$ – набор параметров, представляющих собой значения функции φ в узловых точках элемента.

В методе минимизации функционала можно ограничиться рассмотрением типичного элемента, если выполняется равенство (5.4). Это возможно, если матрицу $[N]$ определить так, что функция φ непрерывна между элементами. Далее подставим (5.18) в (5.17) и, интегрируя по площади элемент, получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{X}^e}{\partial \varphi_i} &= \iint_{V^e} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi_i} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi_i} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) - C \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi_i} \right] dx dy = \\ &= \iint_{V^e} \left[\left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \varphi_i + \frac{\partial N_j}{\partial x} \varphi_j + \dots \right) \frac{\partial N_i}{\partial x} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial N_i}{\partial y} \varphi_i + \frac{\partial N_j}{\partial y} \varphi_j + \dots \right) \frac{\partial N_i}{\partial y} - CN_i \right] dx dy \\ \text{или } \frac{\partial \mathcal{X}^e}{\partial \{\varphi\}^e} &= [K]^e \{\varphi\}^e + \{F\}^e, \end{aligned} \quad (5.19)$$

$$\text{где } K_{ij} = \iint_{V^e} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy \quad (5.20)$$

$$F_i = - \iint_{V^e} CN_i dx dy \quad (5.21)$$

При заданных форме элемента и базисных функциях эти величины могут быть вычислены и подставлены в (5.7), (5.8), (5.9). Задача будет полностью сформулирована при учете граничных условий, а ее решение сводится к решению системы линейных уравнений.

При использовании метода взвешенных невязок с помощью уравнений (5.15) и (5.16) можно получить типичное уравнение:

$$\iint_V W_i \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + C \right] dx dy = 0, \quad (5.22)$$

в котором функция φ определяется соотношением (5.18).

Далее используем интегрирование по частям

$$\begin{aligned} \iint_V W_i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dx dy &= \int_S \left. W_i \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_A^B dy - \iint_V \frac{\partial W_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dy \equiv \\ &\equiv \oint_S W_i \frac{\partial \varphi}{\partial x} l_x dS - \iint_V \frac{\partial W_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dy \end{aligned} \quad (5.23)$$

где l_x – косинус угла между внешней нормалью к поверхности рис. 5.1 и направлением x , а контурный интеграл по S берется по всей границе.

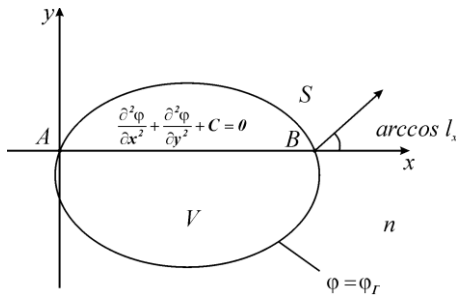


Рисунок 5.1 – Иллюстрация к методу взвешенных невязок

Проинтегрировав таким же образом и второй член уравнения (5.22), можно записать

$$\iint_V \left[\frac{\partial W_i}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial W_i}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - W_i C \right] dx dy - \int_S W_i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} l_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} l_y \right) dS = 0. \quad (5.24)$$

Первый интеграл не содержит вкладов от границ между элементами, если функция φ непрерывна. Функция W_i должна быть также непрерывной, поэтому используем метод Галеркина, в котором функция веса

$$W_i = N_i. \quad (5.25)$$

Используя соотношение (5.18) вклад каждого элемента в интеграл (5.24) можно записать в виде

$$\sum_{j=0}^n K_{ij} \varphi_j + \{F_i\} - \int_S N_i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} l_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} l_y \right) dS = 0 \quad (5.26)$$

В соотношении (5.26) выражения для K_{ij}^e и F_i идентичны соответствующим выражениям (5.20) и (5.21), полученным вариационным путем. После суммирования вкладов всех элементов получим систему уравнений, аналогичную прежней, за исключением того, что добавляется поверхностный интеграл. Он не дает вклада в уравнение для внутренних точек, а для точек лежащих на границе вычисляется при подстановке краевых условий.

6 Двумерный конечный элемент

Метод конечных элементов получил широкое распространение при решении различных трехмерных задач, поскольку для них точное решение возможно лишь в случае простейших областей и крайних условий. Чтобы сократить объем вычислений и выкладок рассмотрим двумерные конечные элементы. Полученные для двумерного анализа результаты без труда могут быть обобщены на случай трех измерений. Также ограничимся рассмотрением лишь линейных базисных функций.

Простейшим элементом для двумерных задач является треугольник, в трехмерном случае его аналогом является тетраэдр. Очевидно, что для получения заданной степени точности количество простых треугольных элементов должно быть очень большим. Это приводит к огромному числу уравнений. Кроме того, ширина ленты матрицы основной системы уравнений становится большой и в результате увеличивается необходимый объем памяти вычислительной машины. Если учесть, что вычислительные трудности пропорциональны количеству уравнений и квадрату ширины ленты матрицы, то нетрудно представить себе сложность решения таких задач.

Поэтому для уточнения решения трехмерных задач используют более сложные элементы, обладающие большим числом степеней свободы.

6.1 Линейный треугольник

С помощью семейств треугольников можно легко и достаточно точно представить области с криволинейными границами весьма сложной формы. Найдем базисную функцию $N_i^e(\mathbf{x}; \mathbf{y})$, принимающую значение единица в узле i и равную нулю в узлах j и k треугольного элемента e (см. рис. 6.1).

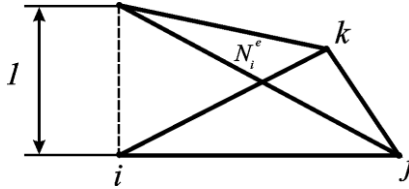


Рисунок 6.1 – Линейная базисная функция треугольника конечного элемента

Кроме того, соответствующая глобальная базисная функция N_i должна быть непрерывной при переходе через границы элемента и отличаться от нуля только на элементах, ассоциируемых с узлом i . Это можно обеспечить, если предположить линейность N_i^e , т.е.

$$N_i^e = \alpha_i^e + \beta_i^e x + \gamma_i^e y \quad (6.1)$$

на элементе e .

α_i^e , $\beta_i^e x$ и $\gamma_i^e y$ находятся из условий

$$\begin{aligned} N_i^e(x_i, y_i) &= 1 \\ N_i^e(x_j, y_j) &= 0 \\ N_i^e(x_k, y_k) &= 0 \end{aligned} \quad (6.2)$$

Выполнение условий (6.2) дает систему уравнений, которую можно записать в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_i^e \\ \beta_i^e \\ \gamma_i^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.3)$$

Решение системы:

$$\alpha_i^e = \frac{x_j y_k - x_k y_j}{2\Delta^e},$$

$$\beta_i^e = \frac{y_j - y_k}{2\Delta^e},$$

$$\gamma_i^e = \frac{x_k - x_j}{2\Delta^e},$$

где $2\Delta^e = \det \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} = 2 \cdot \text{площадь элемента } e$

Зная базисные функции для треугольника, легко вычислить все необходимые матрицы элементов для любой задачи, в слабую формулировку которой входят только первые производные.

6.2 Билинейный прямоугольник

С каждым элементом ассоциируем четыре узла, расположенных в вершинах прямоугольника. Базисные функции узлов получаем в виде произведения двух одномерных линейных базисных функций (см. рис. 6.2).

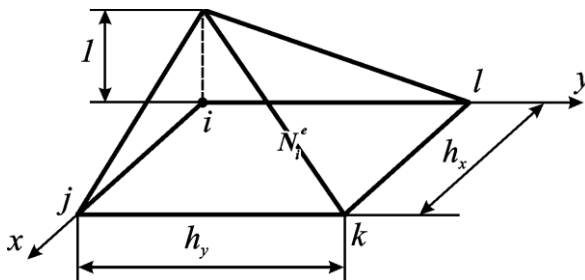


Рисунок 6.2 – Билинейная базисная функция прямоугольного конечного элемента

С узлом i элемента e ассоциируем базисную функцию элемента

$$N_i^e = \frac{h_x^e - x}{h_x^e} \cdot \frac{h_y^e - y}{h_y^e}. \quad (6.5)$$

Элемент называется билинейным, т.к. в это выражение входит произведение $x \cdot y$. Выражение (6.5) автоматически удовлетворяет требованию (6.6).

$$\begin{aligned} N_i^e(x_i, y_i) &= 1 \\ N_i^e(x_j, y_j) &= N^e(x_k, y_k) = N^e(x_l, y_l) = 0 \end{aligned} \quad (6.6)$$

Прямоугольные элементы этого типа удобны при разбиении областей типа квадрата или прямоугольника. Треугольные элементы предпочтительнее, когда требуется учесть сложную геометрию границы. Для учета сложной формы границы возможно использование смешанной конечно-элементной сетки.

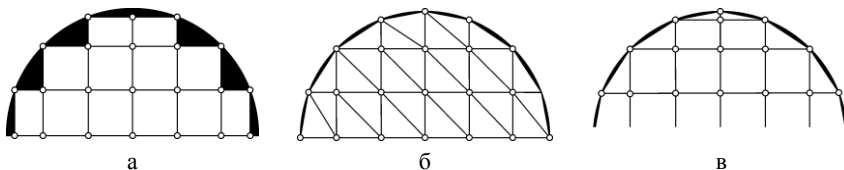


Рисунок 6.3 – Конечно-элементное разбиение полуокруга, использующее только прямоугольные элементы (а), треугольные элементы с тем самым общим числом узлов (б) и комбинацию треугольных и прямоугольных элементов с дополнительными граничными узлами (в). В каждом случае зачерненная область показывает величину погрешности, получающейся при соответствующем представлении области.

6.3 Понятие волнового фронта ансамблирования

На рис. 6.4 изображён профиль лопатки, разбитый на треугольные элементы с узлами в вершинах. Пусть требуется исследовать возникающие напряжения или распределение температуры. Задачи такого типа ведут к стандартной системе уравнений

$$K \cdot a = f$$

(6.7)

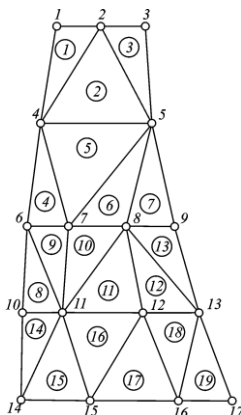


Рисунок 6.4 – Треугольные конечные элементы, использованные для представления профиля лопатки

Для приведенного конечно-элементного разбиения еще до учета краевых условий матрица системы K будет иметь разреженную форму (см. рис. 6.5).

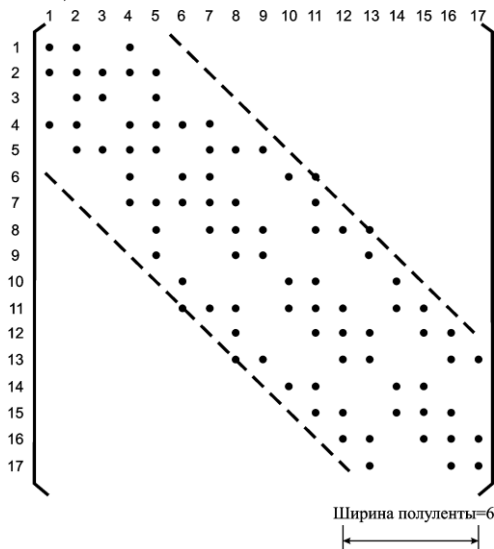


Рисунок 6.5 – Расположение ненулевых компонент матрицы K , получающихся при ансамблировании вкладов элементов, изображенных на рисунке 4.4

Точками обозначены ненулевые компоненты, возникающие из-за связи элементов. Остальные компоненты равны нулю, т.к. если узлы l и m не ассоциируются с элементом e , то $K_{lm}^e = 0$, поскольку базисные функции обращаются в нуль в точках, не принадлежащих данному элементу. Матрица является разреженной и ленточной, поэтому для решения системы алгебраических уравнений требуется меньший объем вычислений (уменьшаются требования к памяти вычислительной машины).

Узлы конечно-элементной сетки должны быть занумерованы таким образом, чтобы обеспечить минимум ширины ленты. Если максимальная разница в номерах узлов любого элемента равна $b-1$, то матрица K будет иметь ширину полуленты b .

Если существует некоторая стандартная формула для определения вкладов K_{lm}^e и f_l^e каждого элемента, то при использовании вычислительной машины:

1) для каждого элемента вычисления должны быть произведены только один раз;

2) один раз найденные вклады каждого элемента могут быть непосредственно учтены в соответствующем месте глобальной матрицы, а затем стерты из памяти.

Таким образом, важен также порядок, в котором нумеруются элементы. На рис. 6.6 показан как влияет вклад первых четырех элементов на матрицу системы K для задачи, представленной на рисунке 6.4.

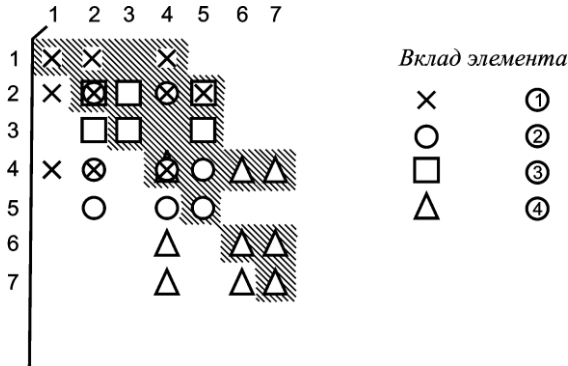


Рисунок 6.6 – Процесс ансамблирования элементов 1-4, изображенных на рисунке 6.4 . Заштрихованная область соответствует информации, которую следует запомнить, если матрица симметрична

Вычисления конкретной строки ансамблированной матрицы заканчивается после того, как будут учтены все элементы, содержащие вершину с номером, соответствующей данной строке. Этот волновой фронт ансамблирования распространяется равномерно, если элементы вовлекаются в вычисления упорядоченным образом. В результате, исключение переменных проводится с окончанием формирования строк.

6.4. Метод конечных элементов для двумерных задач

Рассмотрим задачу стационарной теплопроводности и определим компоненты соответствующих матриц элементов:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + Q = 0 \text{ в } \Omega \quad , \quad (6.8)$$

краевые условия

$$\varphi = \bar{\varphi} \text{ на } \Gamma_{\varphi}, \quad k \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\bar{q} \text{ на } \Gamma_q, \text{ где } \Gamma = \Gamma_{\varphi} + \Gamma_q. \quad (6.9)$$

Аппроксимацию для неизвестной функции φ будем искать в обычной конечно-элементной форме:

$$\varphi \approx \varphi = \sum_{m=1}^M \varphi_m \cdot N_m . \quad (6.10)$$

Приведём подстановку (4.10) в (4.8), а полученное выражение подставим в выражение для взвешенных невязок:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \cdot \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \cdot \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial y} \right) \right] W_l dx dy + \int_{\Omega} W_l Q dx dy + \\ + \int_{\Gamma_q} \left(k \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial n} + q \right) \overline{W}_l d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (6.11)$$

Перепишем первый интеграл, используя формулу Грина, согласно которой для достаточное число раз дифференцируемых функций α и β справедливы тождества

$$\int_{\Omega} \alpha \frac{\partial \beta}{\partial x} dx dy = - \int_{\Omega} \frac{\partial \alpha}{\partial x} \beta dx dy + \int_{\Gamma} \alpha \beta n_x d\Gamma \quad (6.12a)$$

$$\int_{\Omega} \alpha \frac{\partial \beta}{\partial y} dx dy = - \int_{\Omega} \frac{\partial \alpha}{\partial y} \beta dx dy + \int_{\Gamma} \alpha \beta n_y d\Gamma \quad (6.12б)$$

где n_x и n_y – направляющие косинусы внешней нормали \mathbf{n} к замкнутой кривой Γ , ограничивающей область Ω в плоскости (x, y) , а интегрирование вдоль Γ осуществляется в направлении против часовой стрелки. Используя это тождество и, замечая, что

$$n_x \frac{\partial \alpha}{\partial y} + n_y \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{\partial \alpha}{\partial n}, \quad (6.13)$$

уравнение метода взвешенных невязок можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial W_l}{\partial x} \right) k \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} + \left(\frac{\partial W_l}{\partial y} \right) k \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial y} \right] dx dy + \int_{\Omega} W_l Q dx dy + \\ & + \int_{\Gamma_{\varphi} + \Gamma_q} k \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial n} W_l d\Gamma + \int_{\Gamma_q} \left(k \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial n} + \bar{q} \right) W_l d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (6.14)$$

Ограничим выбор весовых функций требованием

$$W_l = 0 \text{ на } \Gamma_{\varphi}, \quad (6.15a)$$

$$\bar{W}_l = -W_l \text{ на } \Gamma_q. \quad (6.15b)$$

Интегралы, включающие градиент от $\hat{\phi}$ на границе, взаимно уничтожаются, и аппроксимирующее соотношение принимает вид

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[\frac{\partial W_l}{\partial x} k \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x} + \frac{\partial W_l}{\partial y} k \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial y} \right] dx dy = \int_{\Omega} W_l Q dx dy - \\ & - \int_{\Gamma_q} W_l \bar{q} d\Gamma, \quad l = 1, 2, \dots, M \end{aligned} \quad (6.16)$$

Подставляя сюда аппроксимацию (6.10), и выбирая в качестве весовых функций базисные, приходим к стандартной системе уравнений

$$\mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{f}, \quad (6.17)$$

где компоненты матрицы \mathbf{K} и \mathbf{f} определяются суммированием вкладов отдельных элементов

$$\mathbf{K}_{lm}^e = \int_{\Omega^e} \left(\frac{\partial N_l^e}{\partial x} k \frac{\partial N_m^e}{\partial x} + \frac{\partial N_l^e}{\partial y} k \frac{\partial N_m^e}{\partial y} \right) dx dy, \quad (6.18)$$

$$f_l^e = \int_{\Omega^e} Q N_l^e dx dy - \int_{\Gamma_q^e} N_l^e \bar{q} d\Gamma. \quad (6.19)$$

Здесь Ω^e – поверхность элемента e , Γ_q^e – та часть границы этого элемента, которая лежит на Γ_q . Таким образом, интеграл по Γ_q^e в (6.19) будет появляться только для элементов, примыкающих к Γ_q .

Полученная конечно-элементная формулировка является достаточно общей, и для определения матриц как треугольных, так и прямоугольных элементов достаточно просто подставить соответствующие базисные функции.

Приложение 1. Некоторые одномерные задачи

Условие

Методом конечных элементов решить следующее уравнение с заданными на границе значениями исходной функции.

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} - \varphi = 0;$$

$0 \leq x \leq 1$ – область решения

$\varphi(x)|_{x=0} = 0$; $\varphi(x)|_{x=1} = 1$ – краевые условия

Решение

На отрезке $0 \leq x \leq 1$ выберем 4 узла. Сопоставим каждому узлу кусочно-линейную глобальную базисную функцию N_m .

Тогда можно построить аппроксимацию

$$\hat{\varphi} \cong \varphi = \sum_{m=1}^4 \varphi_m \cdot N_m, \quad (\text{П1})$$

где φ_m – значение аппроксимации в узле m . В этом случае аппроксимирующая функция $\hat{\varphi}$ не будет тождественно удовлетворять краевым условиям. Тогда к невязке по рассчитываемой области:

$$R_{\Omega} \equiv A(\hat{\varphi}) = L(\hat{\varphi}) + p \text{ на } \Omega \quad (\text{П2})$$

добавляется невязка в краевых условиях.

$$R_{\bar{A}} \equiv B\left(\hat{\varphi}\right) = M\hat{\varphi} + r \text{ на } \Gamma, \quad (\text{П3})$$

где L и M – некоторые дифференциальные операторы, а p и r – параметры, независящие от φ . Тогда, чтобы уменьшить взвешенную сумму невязок на границе и по областям, положим:

$$\int_{\Omega} W_l \cdot R_{\Omega} \cdot d\Omega + \int_{\bar{A}} \bar{W}_l \cdot R_{\bar{A}} \cdot d\bar{A} = 0, \quad l=1\dots 4, \quad (\text{П4})$$

где весовые функции W_l и \bar{W}_l могут быть выбраны независимо. Однако для удобства расчётов весовые функции обычно связывают определённым образом.

В рассматриваемом случае граничная кривая Γ состоит из двух точек $x=0$ и $x=1$, так что интеграл по границе сводится к двум дискретным невязкам и соотношение (П4) теперь можно записать в виде:

$$\int_0^1 W_l \cdot R_{\Omega} \cdot dx + \left[\bar{W}_l \cdot R_{\bar{A}} \right]_{x=0} + \left[\bar{W}_l \cdot R_{\bar{A}} \right]_{x=1} = 0, \quad (\text{П5})$$

$l=1\dots 4.$

Для этого примера используем весовые функции, определённые равенством $W_l = -\bar{W}_l \Big|_{\bar{A}}$. Тогда согласно полученному выше соотношению (П5):

$$\int_0^1 \left(\frac{d^2 \hat{\varphi}}{dx^2} - \hat{\varphi} \right) \cdot W_l \cdot dx - \left[W_l \cdot \hat{\varphi} \right]_{x=0} - \left[W_l \cdot (\hat{\varphi} - 1) \right]_{x=1} = 0$$

$$l=1 \dots 4. \quad (\text{П6})$$

Здесь $R_\Omega = L\hat{\varphi} + p$, т.к. $\hat{\varphi}$ – приближённое решение дифференциального уравнения и если мы подставим это значение в исходное дифференциальное уравнение, то получим невязку. В выражении (П6) члены, учитывающие невязку на границе R_Γ , в силу принятого граничного условия равны нулю.

$$\left[W_l \cdot \hat{\varphi} \right]_{x=0} = 0; \quad \left[W_l \cdot (\hat{\varphi} - 1) \right]_{x=1} = 0 \quad (\text{П7})$$

Тогда уравнение (П6) записывается в виде:

$$\int_0^1 \left(\frac{d^2 \hat{\varphi}}{dx^2} - \hat{\varphi} \right) \cdot W_l \cdot dx = 0, \quad l=1 \dots 4. \quad (\text{П8})$$

Интегрирование по частям приводит к слабой формулировке метода взвешенных невязок:

$$\int_0^1 \frac{d^2 \hat{\varphi}}{dx^2} \cdot W_l \cdot dx \equiv \left| \begin{array}{ll} U = W_l & dU = \frac{dW_l}{dx} \cdot dx \\ dV = \frac{d^2 \hat{\varphi}}{dx^2} & V = \frac{d\hat{\varphi}}{dx} \end{array} \right| \equiv$$

$$\equiv \left[W_l \cdot \frac{d\hat{\varphi}}{dx} \right]_0^I - \int_0^I \frac{d\hat{\varphi}}{dx} \cdot \frac{dW_l}{dx} \cdot dx$$

$$\left[W_l \cdot \frac{d\hat{\varphi}}{dx} \right]_0^I - \int_0^I \left(\frac{d\hat{\varphi}}{dx} \cdot \frac{dW_l}{dx} + \hat{\varphi} \cdot W_l \right) \cdot dx = 0, \quad (\text{П9})$$

$l=1 \dots 4.$

Кусочно-линейные базисные функции удовлетворяют требованию гладкости $\hat{\varphi}$ (а следовательно и N_m), а при использовании метода Галёркина и весовых функций W_l . Используя метод Галёркина и аппроксимацию (П1), получим финальную систему уравнений:

$$\int_0^I \left[\frac{d}{dx} \left(\sum_{m=1}^4 \varphi_m \cdot N_m \right) \cdot \frac{dN_l}{dx} + \left(\sum_{m=1}^4 \varphi_m \cdot N_m \right) \cdot N_l \right] \cdot dx = \left(N_l \cdot \frac{d\hat{\varphi}}{dx} \right)_0^I$$

\Leftrightarrow

$$\int_0^I \left[\left(\sum_{m=1}^4 \varphi_m \cdot \frac{dN_m}{dx} \right) \cdot \frac{dN_l}{dx} + \left(\sum_{m=1}^4 \varphi_m \cdot N_m \right) \cdot N_l \right] \cdot dx = \left(N_l \cdot \frac{d\hat{\varphi}}{dx} \right)_0^I$$

\Leftrightarrow

$$\int_0^I \left[\sum_{m=1}^4 \varphi_m \left(\frac{dN_m}{dx} \cdot \frac{dN_l}{dx} + N_m \cdot N_l \right) \right] \cdot dx = \left(N_l \cdot \frac{d\hat{\varphi}}{dx} \right)_0^I$$

\Leftrightarrow

$$\sum_{m=1}^4 \varphi_m \int_0^1 \left(\frac{dN_m}{dx} \cdot \frac{dN_l}{dx} + N_m \cdot N_l \right) \cdot dx = \left(N_l \cdot \frac{d\hat{\varphi}}{dx} \right)_0^1$$

$$l=1\dots 4,$$

$$[K_{l,m}] \cdot [\varphi_m] = [f_l], \quad (\text{П10})$$

где элементы соответствующих матриц равны следующим величинам:

$$K_{l,m} = \int_0^1 \left(\frac{dN_m}{dx} \cdot \frac{dN_l}{dx} + N_m \cdot N_l \right) \cdot dx, \quad l,m=1\dots 4,$$

$$f_l = \left(N_l \cdot \frac{d\hat{\varphi}}{dx} \right)_0^1, \quad l=1\dots 4,$$

На типичном элементе e , положив $x^e = x - x_i$, $h^e = x_j - x_i$ имеем

$$N_i = N_i^e = \frac{h^e - x^e}{h^e}; \quad N_j = N_j^e = \frac{x^e}{h^e}.$$

Остальные базисные функции N_l на элементе e , для которых l не равно i или j будут равны нулю.

Для элемента e элементы матрицы жёсткости $[K^e]$ можно записать в следующем виде:

$$K_{l,m}^e = 0, \quad l,m \neq i,j;$$

$$K_{i,j}^e = K_{j,i}^e = \int_0^{h^e} \left[\frac{dN_i^e}{dx} \cdot \frac{dN_j^e}{dx} + N_i^e \cdot N_j^e \right] \cdot dx^e = -\frac{1}{h^e} + \frac{h^e}{6}$$

$$K_{i,i}^e = \int_0^{h^e} \left[\left(\frac{dN_i^e}{dx} \right)^2 + (N_i^e)^2 \right] \cdot dx^e = \frac{1}{h^e} + \frac{h^e}{3}$$

Вычислив таким образом компоненты матрицы $[K^e]$ элемента e , простым суммированием по всем таким элементам получим матрицу $[K]$.

$$[K] = \sum_{e=1}^3 [K^e] \quad (\text{П13})$$

Этот процесс называется ансамблированием. Пусть все элементы имеют равную длину (т.е. $h^e = h^1 = h^2 = h^3 = h = \frac{1}{3}$). Если узлы нумеруются последовательно от 1 до 4, а элементы – от 1 до 3, то матрицы элементов принимают вид:

$$[K^1] = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{h} + \frac{h}{3} \right) & \left(-\frac{1}{h} + \frac{h}{6} \right) & 0 & 0 \\ \left(-\frac{1}{h} + \frac{h}{6} \right) & \left(\frac{1}{h} + \frac{h}{3} \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[K^2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{h} + \frac{h}{3} \right) & \left(-\frac{1}{h} + \frac{h}{6} \right) & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{h} + \frac{h}{6} \right) & \left(\frac{1}{h} + \frac{h}{3} \right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{П14})$$

$$[K^3] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{h} + \frac{h}{3}\right) & \left(-\frac{1}{h} + \frac{h}{6}\right) \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{h} + \frac{h}{6}\right) & \left(\frac{1}{h} + \frac{h}{3}\right) \end{bmatrix}$$

Значения для $f_l, l=1...4$ находятся, используя свойства базисных функций, с помощью выражения (П10):

$$f_1 = \left(N_1 \cdot \frac{d\hat{\varphi}}{dx} \right)_0^1 = N_1|_{x=1} \cdot \frac{d\hat{\varphi}}{dx} \Big|_{x=1} - N_1|_{x=0} \cdot \frac{d\hat{\varphi}}{dx} \Big|_{x=0} =$$

= /в силу того, что базисная функция N_1 при $x=1$ равна нулю,

$$\text{первое слагаемое равно нулю/} = -1 \cdot \frac{d\hat{\varphi}}{dx} \Big|_{x=0};$$

$$f_{2,3} = \left(N_{2,3} \cdot \frac{d\hat{\varphi}}{dx} \right)_0^1 = N_{2,3}|_{x=1} \cdot \frac{d\hat{\varphi}}{dx} \Big|_{x=1} - N_{2,3}|_{x=0} \cdot \frac{d\hat{\varphi}}{dx} \Big|_{x=0} =$$

= /в силу того, что базисные функции $N_{2,3}$ при $x=0$ и $x=1$ равны нулю, первое и второе слагаемые равны нулю/ = 0 ;

$$f_4 = \left(N_4 \cdot \frac{d\hat{\varphi}}{dx} \right)_0^1 = N_4|_{x=1} \cdot \frac{d\hat{\varphi}}{dx} \Big|_{x=1} - N_4|_{x=0} \cdot \frac{d\hat{\varphi}}{dx} \Big|_{x=0} =$$

$$= 1 \cdot \frac{d\hat{\varphi}}{dx} \Big|_{x=1} \quad (\text{П15})$$

После суммирования, согласно (13) приходим к системе уравнений:

$$\begin{bmatrix}
 \left(\frac{1}{h} + \frac{h}{3}\right) & \left(-\frac{1}{h} + \frac{h}{6}\right) & 0 & 0 \\
 \left(-\frac{1}{h} + \frac{h}{6}\right) & 2 \cdot \left(\frac{1}{h} + \frac{h}{3}\right) & \left(-\frac{1}{h} + \frac{h}{6}\right) & 0 \\
 0 & \left(-\frac{1}{h} + \frac{h}{6}\right) & 2 \cdot \left(\frac{1}{h} + \frac{h}{3}\right) & \left(-\frac{1}{h} + \frac{h}{6}\right) \\
 0 & 0 & \left(-\frac{1}{h} + \frac{h}{6}\right) & \left(\frac{1}{h} + \frac{h}{3}\right)
 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{d\varphi}{dx} \Big|_{x=0} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{d\varphi}{dx} \Big|_{x=1} \end{bmatrix} \quad (\text{П16})$$

Вычеркнем из системы (16) строки 1 и 4. Эти уравнения получились при применении метода взвешенных невязок к исходному уравнению с базисными функциями, отвечающими узлам, где заданы значения решения. Используем заданные значения $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_4 = 1$ в оставшихся уравнениях:

$$\begin{aligned}
 2 \cdot \left(\frac{1}{h} + \frac{h}{3}\right) \cdot \varphi_2 + \left(-\frac{1}{h} + \frac{h}{6}\right) \cdot \varphi_3 &= 0 \\
 \left(-\frac{1}{h} + \frac{h}{6}\right) \cdot \varphi_2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{h} + \frac{h}{3}\right) \cdot \varphi_3 &= -\left(-\frac{1}{h} + \frac{h}{6}\right)
 \end{aligned} \quad (\text{П17})$$

Решая эти уравнения для $h = \frac{1}{3}$, находим $\varphi_2 = 0.28892$ и $\varphi_3 = 0.61024$.

Непосредственная подстановка численного решения в два вычеркнутых из системы уравнения даёт аппроксимацию градиента решения при $x=0$ и $x=1$. Эта дополнительная информация может быть важна при анализе физических задач, где такие величины могут иметь конкретный физический смысл. Например, в одномерной задаче теплопроводности это будет информация о потоке тепла через границы $x=0$ и $x=1$. В данном случае вычеркнутые уравнения дают:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\hat{\varphi}}{dx} \right|_{x=0} &= -\left(\frac{1}{h} + \frac{h}{3}\right) \cdot \varphi_1 - \left(-\frac{1}{h} + \frac{h}{6}\right) \cdot \varphi_2 = \\ &= -\left(-\frac{1}{h} + \frac{h}{6}\right) \cdot \varphi_2 = 0.8496 \end{aligned} \quad (\text{П18})$$

$$\left. \frac{d\hat{\varphi}}{dx} \right|_{x=1} = \left(\frac{1}{h} + \frac{h}{6}\right) \cdot \varphi_3 + \left(\frac{1}{h} + \frac{h}{3}\right) \cdot \varphi_4 = 1.3156$$

Из этого примера ясно, что нет необходимости вычислять каждую компоненту матрицы элемента $[K^e]$, поскольку её составляющая $K_{l,m}^e$ равна нулю, если узлы l и m не принадлежат элементу. Поэтому на практике вычисляется только приведённая матрица $[k^e]$, содержащая ненулевые элементы $[K^e]$. Для рассмотренного примера $[k^e]$ будет (2×2) -матрицей, определённой соотношением

$$[k^e] = \int_{x_i}^{x_j} \begin{bmatrix} \left(\left(\frac{dN_i^e}{dx} \right)^2 + (N_i^e)^2 \right) & \left(\frac{dN_i^e}{dx} \cdot \frac{dN_j^e}{dx} + N_i^e \cdot N_j^e \right) \\ \left(\frac{dN_i^e}{dx} \cdot \frac{dN_j^e}{dx} + N_i^e \cdot N_j^e \right) & \left(\left(\frac{dN_j^e}{dx} \right)^2 + (N_j^e)^2 \right) \end{bmatrix}. \quad (\text{П19})$$

Подставив сюда базисные функции элемента и проинтегрировав, получим

$$[k^e] = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{h^e} + \frac{h^e}{3} \right) & \left(-\frac{1}{h^e} + \frac{h^e}{6} \right) \\ \left(-\frac{1}{h^e} + \frac{h^e}{6} \right) & \left(\frac{1}{h^e} + \frac{h^e}{3} \right) \end{bmatrix}. \quad (\text{П20})$$

Эти матрицы могут быть вычислены для каждого элемента и после ансамблирования дадут матрицу $[K]$. При этом можно заметить, что ненулевые компоненты $[k^e] \cdot [\varphi^e]$ содержатся в

$$[k^e] \cdot [\varphi^e] = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{h^e} + \frac{h^e}{3} \right) & \left(-\frac{1}{h^e} + \frac{h^e}{6} \right) \\ \left(-\frac{1}{h^e} + \frac{h^e}{6} \right) & \left(\frac{1}{h^e} + \frac{h^e}{3} \right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_i \\ \varphi_j \end{bmatrix}, \quad (\text{П21})$$

где $[\varphi^e] = \begin{bmatrix} \varphi_i \\ \varphi_j \end{bmatrix}$ – вектор значений в узлах элемента e .

Тогда при добавлении вклада элемента e в матрицу $[K]$ компоненты $[k^e]$ должны быть учтены таким образом, чтобы чётко соответствовать узловым переменным φ_i и φ_j .

Для рассматриваемого примера

$$[k^e] = [k^1] = [k^2] = [k^3] = \begin{bmatrix} \frac{28}{9} & -\frac{53}{18} \\ -\frac{53}{18} & \frac{28}{9} \end{bmatrix}. \quad (\text{П22})$$

Тогда процесс ансамблирования производится следующим образом.

Вклад элемента 1. этому элементу соответствуют узлы 1 и 2. произведение приведённой матрицы жёсткости на соответствующий вектор значений в узлах элемента записывается как

$$[k^1] \cdot [\varphi^1] = \begin{bmatrix} \frac{28}{9} & -\frac{53}{18} \\ -\frac{53}{18} & \frac{28}{9} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}. \quad (\text{П23})$$

Тогда компоненты $[k^1]$ учитываются в $[K]$ таким образом, чтобы чётко соответствовать узловым переменным φ_1 и φ_2 :

$$[K] \cdot [\varphi] = \begin{bmatrix} \frac{28}{9} & -\frac{53}{18} & 0 & 0 \\ -\frac{53}{18} & \frac{28}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix}. \quad (\text{П24})$$

Вклад элемента 2. этому элементу соответствуют узлы 2 и 3. произведение приведенной матрицы жёсткости на соответствующий вектор узловых значений элемента записывается как

$$[k^2] \cdot [\varphi^2] = \begin{bmatrix} \frac{28}{9} & -\frac{53}{18} \\ -\frac{53}{18} & \frac{28}{9} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix}. \quad (\text{П25})$$

Добавив этот вклад в $[K]$, получим

$$[K] \cdot [\varphi] = \begin{bmatrix} \frac{28}{9} & -\frac{53}{18} & 0 & 0 \\ -\frac{53}{18} & \frac{28}{9} + \frac{28}{9} & -\frac{53}{18} & 0 \\ 0 & -\frac{53}{18} & \frac{28}{9} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix}. \quad (\text{П26})$$

В этом случае компонента $[K_{2,2}]$ образована суммой двух компонент $[k_{2,2}^I]$ и $[k_{1,1}^2]$, так как узел 2 принадлежит и элементу 1 и элементу 2.

Вклад элемента 3. процесс ансамблирования заканчивается добавлением вклада элемента 3, причём соответствующими узлами будут 3 и 4. Т.о.,

$$[k^3] \cdot [\varphi^3] = \begin{bmatrix} \frac{28}{9} & -\frac{53}{18} \\ -\frac{53}{18} & \frac{28}{9} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} \quad (\text{П27})$$

и добавление этой подматрицы в $[K]$ даёт окончательный результат

$$[K] \cdot [\varphi] = \begin{bmatrix} \frac{28}{9} & -\frac{53}{18} & 0 & 0 \\ -\frac{53}{18} & \left(\frac{28}{9} + \frac{28}{9}\right) & -\frac{53}{18} & 0 \\ 0 & -\frac{53}{18} & \left(\frac{28}{9} + \frac{28}{9}\right) & -\frac{53}{18} \\ 0 & 0 & -\frac{53}{18} & \frac{28}{9} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix}. \quad (\text{П28})$$

Заметим опять, что т.к. узел 3 принадлежит обоим элементам 2 и 3, $K_{3,3}$ получается суммированием вклада этих двух элементов.

Полученная таким образом матрица $[K]$ совпадает с найденной ранее, и дальнейшее решение производится тем же способом.

Приложение 2. Задание к лабораторным работам

Тема 1

Задача 1

Решить уравнение:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + A\varphi = B$$

с краевыми условиями $\varphi = a$ при $x=0$ и $\varphi = b$ при $x=1$, используя шаг сетки Δx

№ вар.	A	B	a	b	Δx
1	8	1	1	3	0.25
2	1	2	8	5	0.2
3	9	6	6	6	0.2
4	5	10	6	5	0.25
5	7	1	10	10	0.25
6	10	9	10	6	0.2
7	5	1	10	9	0.2
8	1	5	1	2	0.2
9	3	1	8	8	0.25
10	8	5	1	1	0.2

Задача 2

Распределение изгибающего момента M в балке под действием распределенной нагрузки $\omega(x)$ на единицу длины удовлетворяет уравнению:

$$\frac{d^2M}{dx^2} = \omega(x).$$

Балка единичной длины свободно оперта (т.е. $M=0$) на обоих концах. Вычислить распределение изгибающего момента конечно-разностным методом, используя шаг сетки Δx .

<i>№ вар.</i>	$\omega(x)$	Δx
1	$\sin \pi x$	0.2
2	$\sin x$	0.25
3	$\cos x$	0.25
4	$\operatorname{tg} x$	0.2
5	$\operatorname{ctg} \left(x + \frac{\pi}{6} \right)$	0.25
6	$\sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)$	0.25
7	$\cos \left(3x - \frac{\pi}{4} \right)$	0.2
8	$\cos \left(3x - \frac{\pi}{6} \right)$	0.25
9	$\operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{6} \right)$	0.25
10	$\sin^2 \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$	0.25

Задача 3

Уравнение, описывающее изменение температуры T в вязкой жидкости, текущей между двумя параллельными пластинами ($y=0$ и $y=2H$) имеет вид:

$$\frac{d^2 T}{dy^2} = -\frac{4U^2 \mu}{H^4 k} (H - y)^2,$$

где μ , k и U – коэффициент вязкости, коэффициент теплопроводности и максимальная скорость жидкости соответственно. Используя конечно-разностный метод и шаг сетки Δy , вычислить распределение температуры, если на одной пластине поддерживается температура $T=a$, а на другом $T=b$.

№ вар.	μ	k	U	H	Δy	a	b
1	0.1	0.08	3	3	0.5H	0	5
2	0.6	0.03	6	6	0.5 H	9	1
3	0.9	0.06	8	8	0.4 H	10	3
4	0.3	0,05	10	6	0.4 H	9	5
5	1	0,1	10	6	0.4 H	10	6
6	0.3	0.06	10	6	0.5 H	6	5
7	0.9	0.07	7	5	0.4 H	4	10
8	0.5	0.06	8	10	0.4 H	9	1
9	1	0.03	10	6	0.5 H	1	5
10	0.9	0.1	10	7	0.4 H	8	1

Тема 2

Задача 1. Решить уравнение

$$e^{-\varphi} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = A$$

с краевыми условиями $\varphi = a$ при $x = 0$ и $\varphi = b$ при $x = 1$, используя сетку с шагом Δx

№ вар	A	a	b	Δx
1	1	4	1	0.25
2	1	1	2	0.2
3	1.3	1.3	1	0.2
4	1.5	1	1	0.25
5	1.3	1	2	0.2
6	1.4	2	1.8	0.25
7	0.6	1.6	2	0.2

8	1.4	4	0	0.25
9	0.7	1.9	2	0.2
10	1.1	3	0	0.2
11	0.8	4	0	0.25
12	1.2	1.8	0	0.2
13	1.5	1.7	1.8	0.2
14	1.5	0	1.9	0.25
15	1.2	1.6	2	0.2

Задача 2. Решить уравнение

$$\varphi \frac{d\varphi}{dx} = \frac{d^2\varphi}{dx^2} + A$$

с краевыми условиями $\varphi = a$ при $x=0$ и $\varphi = b$ при $x = l$. Шаг сетки - Δx

№ вар	A	a	b	Δx
1	7	0	0	1/4
2	1	6	8	1/4
3	2	3	1	1/3
4	3	7	2	1/4
5	0	6	6	1/3
6	2	1	0	1/4
7	1	4	9	1/4
8	6	6	2	1/3
9	4	5	6	1/3
10	9	6	8	1/4
11	6	4	0	1/4
12	3	8	9	1/3
13	5	1	1	1/4
14	1	2	7	1/4

15	9	0	1	1/3
----	---	---	---	-----

Тема 3

Задача 1. Распределение изгибающего момента M в балке под действием распределенной поперечной нагрузки $w(x)$ на единицу длины удовлетворяет уравнению:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = w(x).$$

Балка единичной длины свободно опирается (т.е. $M = 0$) на обоих концах и несет нагрузку

$$w(x) = A \sin(\omega x + \varphi).$$

на единицу длины. Найти распределение изгибающего момента, используя систему базисных функций.

$$N_m = \sin m \pi x.$$

Использовать 4 - х элементное разложение.

№ вар.	A	ω	φ
1	10	7	0,1
2	3	8	0,9
3	1	3	1
4	1	10	0,7
5	6	3	-0,5
6	10	4	-1
7	10	9	0,6
8	4	1	-0,9
9	1	3	-0,6
10	5	10	-0,9

Задача 2. Применяя метод взвешенных невязок решить дифференциальное уравнение.

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \varphi + A = 0.$$

с краевыми условиями $\varphi = a$ при $x = 0$ и $\varphi = b$ при $x = 1$.

Использовать систему базисных функций

$$N_m = \sin m\pi x.$$

и 4 - х элементное разложение

№ вар.	A	a	b
1	6	5	8
2	2	6	1
3	3	4	9
4	1	6	7
5	2	10	6
6	6	1	3
7	2	4	9
8	7	1	1
9	1	5	3
10	9	1	6

Задача 3.Применяя метод взвешенных невязок и одновременную аппроксимацию решений и краевых условий, решить дифференциальное уравнение.

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + A \varphi = 0.$$

с краевыми условиями $\varphi = a$ при $x = 0$ и $\varphi = b$ при $x=1$.

Использовать систему базисных функций

$$N_m = x^{m-1}.$$

и 5 – ти элементное разложение.

№ вар.	A	a	b
1	7	1	6
2	0,9	1	0
3	5	6	2
4	5	1	8
5	5	9	10
6	5	5	9
7	8	10	6
8	3	8	4
9	7	0	3
10	6	8	5

Тема 4

Задача № 1

Решить уравнение

$$e^{-\varphi} \frac{d^2\varphi}{dx^2} = A$$

с краевыми условиями $\varphi = 0$ при $x = 0$ и $\varphi = 0$ при $x = 1$, используя метод взвешенных невязок, двухэлементную аппроксимацию и систему базисных функций:

$$N_m = x^m(1-x)$$

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	1	3	2	-2	-1	0,21	-0,91	0,17	-0,56	-0,32

Задача № 2

Решить уравнение

$$k \frac{d^2\varphi}{dx^2} + Q = 0$$

с краевыми условиями $\varphi = 0$ при $x = 0$ и $\varphi = 0$ при $x = 1$, где $k = const$, а $Q = Q(\varphi)$

$$Q(\varphi) = a\varphi^2 + b\varphi + c.$$

Использовать метод взвешенных невязок, двухэлементную аппроксимацию и систему базисных функций

$$N_m = x^m(1-x)$$

№ вариант	k	a	b	c
1	8	0	8	4
2	1	0	1	6
3	6	9	2	8
4	4	6	0	5
5	9	6	6	6
6	1	3	0	2
7	8	1	0	6
8	1	1	3	5
9	8	0	7	1
10	1	5	0	5

Задача № 3

Решить уравнение

$$\varphi \frac{d\varphi}{dx} = \frac{d^2\varphi}{dx^2} + A$$

с краевыми условиями $\varphi = 0$ при $x = 0$ и $\varphi = 0$ при $x = 1$. Использовать метод взвешенных невязок, двухэлементную аппроксимацию и систему базисных функций:

$$N_m = x^m(1-x)$$

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

A	8	1	7	4	10	2	-2	-3	-7	-8
----------	---	---	---	---	----	---	----	----	----	----

Рекомендуемая литература

1. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копчёнова Н.В. Вычислительные методы для инженеров. – М.: Высшая школа, 1994.
2. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2001.
3. Белоцерковский О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред. – М.: Физматлит, 1994.
4. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы / Пер. с англ. – М.: Мир, 1984.
5. Каханер Д., Моулер К., Нэш С. Численные методы и программное обеспечение. – М.: Мир, 1998.
6. Косарев В.И. 12 лекций по вычислительной математике. – М.: Изд-во МФТИ, 1995.
7. Локуциевский О.В., Гавриков М.Б. Начала численного анализа. – М.: ТОО «Янус», 1995.
8. Пирумов У.Г. Численные методы. – М.: Изд-во МАИ, 1998.
9. Победря Б.Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Изд-во МГУ, 1995.
10. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы математической физики. – М.: Научный мир, 2000.
11. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов / Пер. с англ. – М.: Мир, 1977.

Учебное издание

Макарьянц Георгий Михайлович

Основы метода конечных элементов

Учебное пособие

Самарский университет.
443086 Самара, Московское шоссе, 34.